

MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

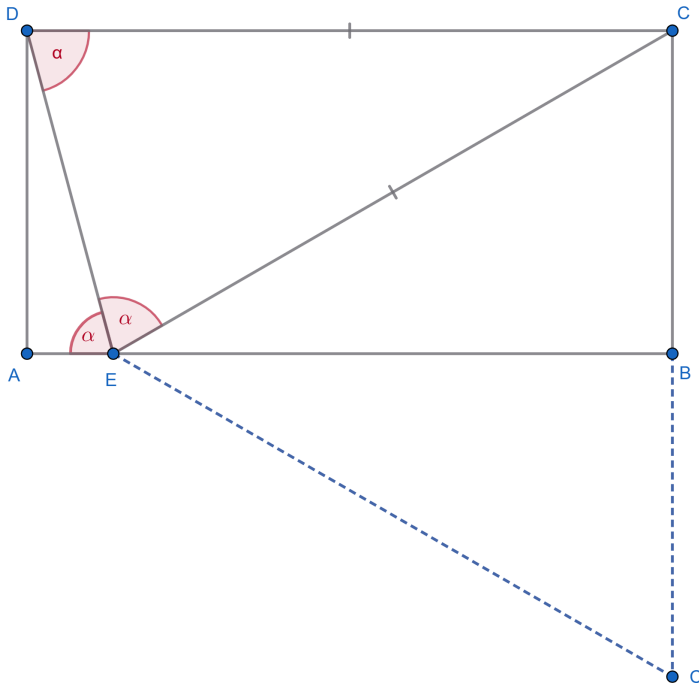
## Zadaci i rješenja

**Zadatak S-5.1.** [10 bodova]

Stranica  $\overline{AB}$  pravokutnika  $ABCD$  dvostruko je dulja od stranice  $\overline{BC}$ . Na stranici  $\overline{AB}$  odabrana je točka  $E$  takva da veličina kuta  $\sphericalangle DEA$  bude jednaka veličini kuta  $\sphericalangle CED$ . Kolika je veličina tog kuta?

**Rješenje.**

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi  $\sphericalangle AED$  i  $\sphericalangle DEC$  su sukladni. Označimo s  $\alpha$  veličine tih kutova.

Budući da je  $DE$  presječnica paralelnih stranica pravokutnika  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ , kutovi  $\sphericalangle AED$  i  $\sphericalangle CDE$  su sukladni pa je  $\alpha = |\sphericalangle CDE|$ .

Budući da trokut  $DEC$  ima dva kuta sukladna, on je jednakokrčan i vrijedi  $|CD| = |CE|$ . Kako je  $|AB| = 2|BC|$ , slijedi i  $|CD| = 2|BC|$  te  $|CE| = 2|BC|$ .

Neka je  $C'$  osnosimetrična slika točke  $C$  s obzirom na  $AB$ . Tada je  $|BC| = |BC'|$  te iz toga slijedi  $|CE| = |CC'|$ .

Kako je  $E$  točka na simetrali dužine  $\overline{CC'}$ , ona je jednako udaljena od točaka  $C$  i  $C'$  pa je  $|CE| = |C'E|$ . Dakle, trokut  $CEC'$  je jednakostraničan.

Jednakostranični trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to  $60^\circ$ . U jednakostraničnom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga  $EB$  prepolavlja kut  $\sphericalangle CEC'$ , odakle zaključujemo da je  $|\sphericalangle CEB| = 30^\circ$ .

Kako je zbroj veličina kutova  $\sphericalangle AED$ ,  $\sphericalangle DEC$  i  $\sphericalangle CEB$  jednak  $180^\circ$  (čine ispruženi kut), slijedi da je  $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$ , odakle je konačno  $\alpha = 75^\circ$ .

**Zadatak S-5.2.** [15 bodova]

Kažemo da je tablica  $3 \times 3$  šarolika ako je u svako polje te tablice upisan po jedan od brojeva  $-1, 0$  i  $1$ , tako da je svih šest zbrojeva brojeva u pojedinom retku odnosno stupcu međusobno različito.

Postoji li takva tablica? Ako postoji, koliko ima različitih šarolikih tablica?

**Prvo rješenje.**

Pokazat ćemo da takva tablica ne postoji. Raspišimo najprije sve moguće kombinacije 3 broja i pogledajmo koji je zbroj svake od njih.

-3	-2	-1	0	1	2	3
-1 -1 -1	-1 -1 0	-1 0 0	0 0 0	1 0 0	1 1 0	1 1 1
		1 1 -1	1 0 -1	-1 -1 1		

Pokažimo najprije da ukoliko je tablica šarolika, u tablici ne mogu istovremeno postojati redak ili stupac čija je suma 3 i čija je suma  $-3$ . Pretpostavimo da je suma prvog retka 3. Tada je odmah jasno da ne postoji stupac u kojem je suma  $-3$  (prvi redak sadrži samo jedinice). Neka je bez smanjenja općenitosti suma drugog retka  $-3$ . Kako svi stupci sada imaju po dva ista broja, moraju se razlikovati u trećem broju pa zadnji redak sadrži sve različite brojeve 1, 0 i  $-1$ , no tada su sume u 2. stupcu i 3. retku jednake.

1	1	1	→	1	1	1
-1	-1	-1		-1	-1	-1
				1	0	-1

Primijetimo da postoji 7 različitih suma. Da bi sume svih redaka i stupaca bile različite, tablica treba sadržavati 6 različitih suma. Stoga se svi zbrojevi osim jednog trebaju postići u tablici te se zato samo jedan od zbrojeva 3 i  $-3$  mora postići.

Primijetimo nadalje da je suma svih redaka i stupaca jednaka dvostrukom zbroju svih elemenata tablice. Kako je suma zbrojeva parna, broj redaka ili stupaca s neparnom sumom mora biti paran. Kako smo zaključili da od zbrojeva koji se postižu u tablici mora nedostajati 3 ili  $-3$ , to nije moguće. Stoga ne postoji šarolika tablica.

**Drugo rješenje.**

Kao u prvom rješenju zaključujemo da postoji 7 različitih suma, a ako je tablica šarolika, treba sadržavati 6 različitih suma. Također zaključujemo da se jedna od suma 3 i  $-3$  mora postići.

Pretpostavimo nadalje da postoji redak kojem je suma 3. Pokažimo da se tada u toj tablici ne može postići suma  $-2$ . Opet kao i ranije zaključujemo da ne postoji stupac kojem je suma  $-2$ . Neka je bez smanjenja općenitosti suma prvog retka 3 i suma drugog retka  $-2$ .

1	1	1
-1	-1	0

Tada, kako smo prije pokazali da suma ni jednog retka ni stupca ne može biti  $-3$ , svi ostali zbrojevi se moraju postići, pa tako i 2. Zbroj 2 se može postići samo brojevima 1,1 i 0. Ukoliko bi to bila suma zadnjeg retka, imamo dva moguća slučaja.

1	1	1	1	1	1
-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	0	1	0	1

U prvom slučaju je suma prva dva stupca jednaka, a u drugom suma trećeg retka i trećeg stupca.

Ako se pak suma 2 postiže u trećem stupcu, tada jedan od preostalih stupaca mora imati sumu  $-1$ , BSO neka je to prvi stupac. To znači da zadnji redak ima na prvom mjestu  $-1$ . Tada neovisno što je drugi element trećeg stupca, suma drugog stupca i trećeg retka su jednake.

1	1	1
-1	-1	0
-1	$x$	1

Zaključili smo da ako postoji suma jednaka 3, ne mogu se postići sume  $-3$  i  $-2$ , a ako je suma  $-3$  analogno zaključujemo da se ne mogu postići 3 i 2. Stoga ne postoji šarolika tablica.

### Zadatak S-5.3. [20 bodova]

Neka su  $m$  i  $n$  relativno prosti prirodni brojevi takvi da je  $\frac{m+n}{m-n}$  također prirodan broj. Dokaži da je barem jedan od brojeva  $mn+1$  i  $4mn+1$  potpun kvadrat.

#### Rješenje.

Neka je  $\frac{m+n}{m-n} = k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \frac{m+n}{m-n} &= k \\ m+n &= km - kn \\ n(k+1) &= m(k-1) \\ \frac{n}{m} &= \frac{k-1}{k+1} \end{aligned}$$

Kako su  $m, n$  relativno prosti, postoji  $d \in \mathbb{N}$  takav da je  $nd = k-1$  te  $md = k+1$ . Množenjem ovih jednakosti dobivamo da je  $mnd^2 = k^2 - 1$ , odnosno

$$d^2 mn + 1 = k^2. \quad (1)$$

Preostaje odrediti  $d$ . S obzirom da  $d$  dijeli  $k-1$  i  $k+1$ , mora dijeliti i njihovu razliku, dakle  $d = 1$  ili  $d = 2$  pa iz (1) slijedi tvrdnja zadatka.

### Zadatak S-5.4. [25 bodova]

U ovisnosti o realnom broju  $x$  odredi vrijednost beskonačne sume:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor + \dots$$

*Napomena:*  $\lfloor a \rfloor$  označava najveći cijeli broj manji ili jednak realnom broju  $a$ .

#### Rješenje.

Primijetimo najprije da je suma konačna. Naime, za dovoljno veliki  $n$  je  $\left| \frac{x}{2^{n+1}} \right| < \frac{1}{2}$  pa je

$$\frac{x+2^n}{2^{n+1}} = \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$$

strogo između 0 i 1. Zato je najveći cijeli broj manji od tog izraza 0.

Neka je  $N \in \mathbb{N}$  takav da je

$$\sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor.$$

Tvrdimo da za  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$$

Neka je  $x = n + \alpha$  gdje je  $n \in \mathbb{N}, \alpha \in [0, 1)$ .

- za  $\alpha < \frac{1}{2}$  je  $2\alpha < 1$  i  $\alpha + \frac{1}{2} < 1$  pa je  $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$  te  $\lfloor 2x \rfloor = 2n$  pa u ovom slučaju vrijedi jednakost
- za  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  je  $2\alpha \geq 1$  i  $\alpha + \frac{1}{2} \geq 1$  pa je  $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$  te  $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$  pa i u ovom slučaju vrijedi jednakost

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor 2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{2^{N-1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2^N} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{N+1}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Vidimo da se suma teleskopira, tj. da se svi srednji članovi pokrate. Imamo

$$\sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{N+1}} \right\rfloor$$

Za dovoljno veliki  $n$  (pa tako i za  $N$ ) je  $\frac{x}{2^{n+1}}$  između 0 i 1 za  $x \geq 0$  te između 0 i  $-1$  za  $x < 0$ , a najveće cijelo od toga je 0 za  $x \geq 0$ , odnosno  $-1$  za  $x < 0$ . Konačno,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

### Zadatak S-5.5. [30 bodova]

Žeton je postavljen u ishodište koordinatnog sustava. Medvjedi Dado i Tina igraju sljedeću igru. Dado igra prvi, a zatim igraju naizmjenično. U svakom potezu igrač bira dva (ne nužno različita) cijela broja  $a$  i  $b$ , koje ni Dado ni Tina nisu odabrali u prethodnim potezima, te zatim pomiče žeton za  $a$  jedinica u horizontalnom smjeru i za  $b$  jedinica u vertikalnom smjeru. Tina pobjeđuje ako se žeton u bilo kojem trenutku vrati u ishodište. Može li Dado spriječiti Tinu da pobijedi?

*Napomena:* Pomak u horizontalnom smjeru za pozitivnu vrijednost ide udesno, a za negativnu ulijevo (analogno vrijedi i za vertikalni smjer).

### Rješenje.

Dado može spriječiti Tinu da pobijedi sljedećom strategijom.

Neka je  $S$  skup svih brojeva koje su Dado i Tina prije odabrali te  $(x, y)$  trenutne koordinate žetona. Stavimo  $t := 3 \cdot \max\{1, |x|, |a| : a \in A\}$ .

Dado na svom potezu bira brojeve  $(a, b) = (t, -x - t)$  te pomiče žeton s  $(x, y)$  na  $(x + t, y - x - t)$ .

Dokažimo najprije da Dado može uvijek odabrati brojeve  $t$  i  $-x - t$ .

Očito je  $t > |a|$  pa se broj  $t$  ne nalazi u skupu  $S$ .

Također imamo da je

$$|-x - t| \geq |t| - |x| \geq \frac{2}{3}|t| > |a|$$

pa slijedi da se ni broj  $-x - t$  ne nalazi u skupu  $S$ .

Budući da se  $t$  i  $-x - t$  ne nalaze u skupu  $S$ , Dado ih može odabrati na svom potezu.

Uočimo da Dado ovom strategijom nikada neće završiti u ishodištu jer je  $t > |x|$  pa je  $x + t > 0$ . Dakle,  $x$ -koordinata nove pozicije žetona će uvijek biti pozitivna nakon što Dado odigra svoj potez.

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da Tina može vratiti žeton natrag u ishodište ako Dado koristi gornju strategiju. Neka je Dado u svom prethodnom potezu, prije nego što je Tina pobjedila, odabrao brojeve  $(t, -x - t)$  te žeton pomaknuo iz  $(x, y)$  u  $(x + t, y - x - t)$ . Kako Tina u idućem potezu pobjeđuje, ona posebno onda mora odabrati broj  $a = -x - t$  da bi  $x$ -koordinata žetona postala 0. Međutim, to dovodi do kontradikcije jer je u prethodnom potezu Dado već odabrao broj  $-x - t$ .

Dakle, prethodno opisanom strategijom Dado spriječava Tinu da pobjedi.

### Zadatak S-5.6. [35 bodova]

Neka je  $A$  konačan skup funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa svojstvima:

(i) ako su  $f, g \in A$ , onda je  $f \circ g \in A$

(ii) za svaku funkciju  $f \in A$  postoji funkcija  $g \in A$  tako da vrijedi  $f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Neka je  $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  identiteta, tj.  $id(x) = x$  za sve  $x \in \mathbb{R}$ . Dokaži da je  $id \in A$ .

### Rješenje.

Uzmimo  $f \in A$  te njoj pridruženu  $g \in A$  tako da vrijedi

$$f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x).$$

Sada uvrstimo  $x = \frac{f(0) - x}{2}$ ,  $y = -f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)$ :

$$g\left(g\left(-f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)\right) - \frac{f(0) - x}{2}\right) = x$$

Vidimo da  $g$  može poprimiti bilo koju vrijednost u  $\mathbb{R}$ , tj. da je  $g$  surjektivna.

Također, fiksiranjem  $x \in \mathbb{R}$  i uvrštavanjem  $y$  takvog da je  $g(y) = x$  dobivamo

$$f(f(x) + y) = 2x + g(0)$$

iz čega slijedi da i  $f$  može poprimiti bilo koju vrijednost u  $\mathbb{R}$ , tj. da je  $f$  surjektivna. Dakle, svaki element u  $A$  je surjektivna.

Uzmimo opet  $f \in A$  te promatrajmo dalje niz  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$  gdje je  $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ puta}}$ .

Svaki član ovog niza je po svojstvu (i) u skupu  $A$ . Kako je  $A$  konačan, moraju se dogoditi ponavljanja u ovom nizu, odnosno postoje  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k > l$  takvi da je  $f^{(k)} = f^{(l)}$ .

Iz toga dalje imamo

$$f^{(k)}(x) = f^{(k-l)}(f^{(l)}(x)) = f^{(l)}(x)$$

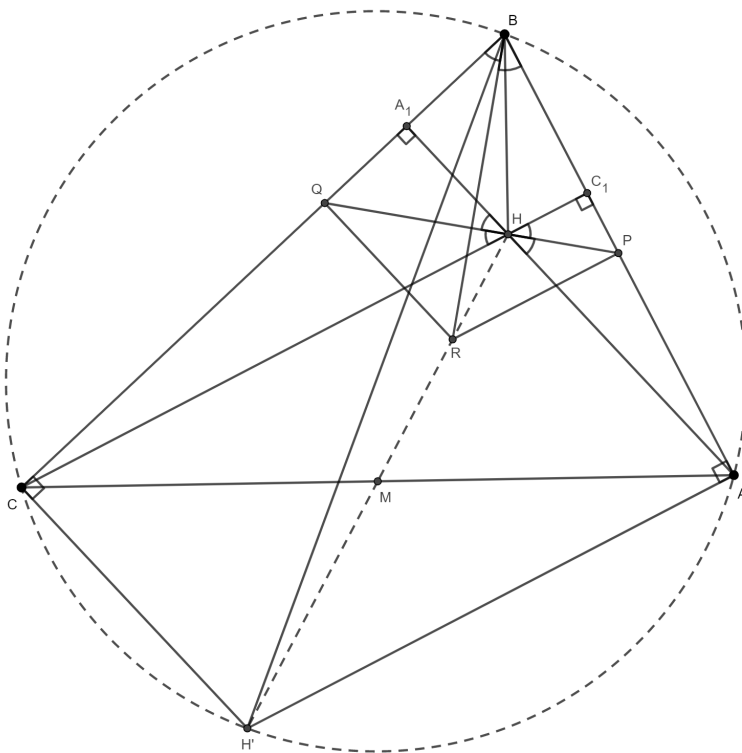
Stavljanjem  $y = f^{(l)}(x)$ , a to možemo postići za svaki  $y \in \mathbb{R}$  jer je  $f$  surjekcija, dobivamo  $f^{(k-l)}(y) = y$ . Dakle, vidimo da je  $f^{(k-l)}$  identiteta.

**Zadatak S-5.7.** [40 bodova]

Neka je točka  $H$  ortocentar raznostraničnog šiljastokutnog trokuta  $ABC$ . Simetrala šiljastog kuta kojeg čine pravci  $AH$  i  $CH$  siječe stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  redom u točkama  $P$  i  $Q$ . Neka je  $M$  polovište stranice  $\overline{AC}$ . Simetrala kuta u vrhu  $B$  trokuta  $ABC$  siječe dužinu  $\overline{HM}$  u točki  $R$ . Dokaži da točke  $P$ ,  $B$ ,  $Q$  i  $R$  leže na istoj kružnici.

**Rješenje.**

Označimo s  $\alpha$  i  $\beta$  redom kutove u vrhovima  $A$  i  $B$  trokuta  $ABC$ . Neka su  $A_1$  i  $C_1$  redom nožišta visina iz vrhova  $A$  i  $C$  u trokutu  $ABC$  te neka je  $H'$  centralno simetrična točka ortocentra  $H$  u odnosu na  $M$ .



Kako je točka  $M$  polovište stranice  $\overline{AC}$  slijedi da je četverokut  $AH'CH$  paralelogram. Posebno, imamo da je  $AH'$  paralelno s  $CH$  i  $CH'$  je paralelno s  $AH$ .

Nadalje, kako su  $AH$  i  $CH$  redom okomiti na  $BC$  i  $AB$  slijedi da je

$$\sphericalangle H'AB = \sphericalangle BCH' = 90^\circ.$$

Prema tome točka  $H'$  se nalazi na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  te je  $\overline{BH'}$  promjer opisane kružnice.

Imamo da je

$$\sphericalangle H'BC = \sphericalangle H'AC = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle C_1BH.$$

Prema K-K poučku o sličnosti trokuta sada slijedi da su trokuti  $BC_1H$  i  $BCH'$  slični, odnosno imamo da vrijedi

$$\frac{|BH|}{|BH'|} = \frac{|BC_1|}{|BC|}.$$

Iz  $\sphericalangle H'BC = \sphericalangle C_1BH$  slijedi da je  $BR$  također i simetrala kuta  $\sphericalangle HBB'$ . Primjenom poučku o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu  $HH'B$  i gornje jednakosti redom imamo

$$\frac{|HR|}{|H'R|} = \frac{|BH|}{|BH'|} = \frac{|BC_1|}{|BC|}.$$

Nadalje, trokuti  $AHC_1$ ,  $CHA_1$  i  $CBC_1$  su slični jer su to pravokutni trokuti te je

$$\sphericalangle C_1HA = \sphericalangle CHA_1 = 180^\circ - \sphericalangle AHC = 180^\circ - \sphericalangle AH'C = \beta.$$

Iz gornje sličnosti sada redom imamo da je

$$\frac{|C_1H|}{|AH|} = \frac{|A_1H|}{|CH|} = \frac{|BC_1|}{|BC|} = \frac{|HR|}{|H'R|}.$$

Primjenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu  $AHC_1$  slijedi da je

$$\frac{|PC_1|}{|PA|} = \frac{|C_1H|}{|AH|} = \frac{|HR|}{|H'R|},$$

odnosno da je pravac  $PR$  paralelan s pravcem  $C_1H$ .

Kako je  $C_1H$  okomito na  $AB$  slijedi da je  $\sphericalangle RPB = 90^\circ$ .

Sasvim analogno se dobije da je  $QR$  paralelno s  $A_1H$  i da je  $\sphericalangle BQR = 90^\circ$ .

Konačno, iz  $\sphericalangle RPB = \sphericalangle BQR = 90^\circ$  slijedi da je četverokut  $PRQB$  tetivan.

### Zadatak S-5.8. [45 bodova]

Dani su prirodni brojevi  $m, n > 1$ . Dokaži da postoji samo konačno mnogo uređenih parova prirodnih brojeva  $(x, y)$  za koje vrijedi

$$(x+1)^n + (x+2)^n + \dots + (x+m)^n = (y+1)^{2n} + (y+2)^{2n} + \dots + (y+m)^{2n}.$$

### Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću lemu.

**Lema:** Postoje prirodni brojevi  $y_0$  i  $C$  takvi da za sva rješenja  $(x, y)$  početne jednadžbe za koja je  $y \geq y_0$  vrijedi

$$y^2 + (m+1)y - C \leq x \leq y^2 + (m+1)y + C.$$

**Dokaz leme:** Stavimo da je  $x = y^2 + (m+1)y + c$ . Uvrstimo taj izraz za  $x$  natrag u početnu jednadžbu. Time na lijevoj i desnoj strani jednadžbe dobivamo polinome stupnja najviše  $2n$  u varijabli  $y$ .

Koeficijenti uz  $y^{2n}$  na obje strane iznose  $m$ , a uz  $y^{2n-1}$  iznose  $nm(m+1)$ .

Koeficijent uz  $y^{2n-2}$  na lijeve strane jednadžbe iznosi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c,$$

a na desnoj strani jednadžbe

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}.$$

Uočimo da koeficijent uz  $y^{2n-2}$  od lijeve strane linearno ovisi o  $c$ , dok koeficijent desne strane uopće ne ovisi o  $c$ . Prema tome slijedi da postoje cijeli brojevi  $C_1$  i  $C_2$  takvi da za sve  $c \geq C_1$  vrijedi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c > \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}$$

te za sve  $c \leq C_2$  vrijedi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c < \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}.$$

U slučaju  $c \geq C_1$  imamo da će koeficijent uz  $y^{2n-2}$  lijeve strane jednadžbe biti uvijek veći nego koeficijent uz  $y^{2n-2}$  od desne strane jednadžbe. Iz toga slijedi da će polinom na lijevoj strani brže rasti nego polinom na desnoj strani. Posebno, postoji prirodan broj  $y_1$  tako da za sve  $y \geq y_1$  će lijeva strana jednadžbe biti veća od desne strane te u tom slučaju nemamo rješenja za našu početnu jednadžbu

Analogno za slučaj  $c \leq C_2$  imamo da postoji prirodan broj  $y_2$  tako da za sve  $y \geq y_2$  će desna strana jednadžbe biti uvijek veća od lijeve strane te ponovo u tom slučaju nemamo rješenja početne jednadžbe.

Stavljanjem  $y_0 := \max\{y_1, y_2\}$  te  $C := \max\{|C_1|, |C_2|\}$  slijedi tvrdnja leme.

□

Neka su sada  $y_0$  i  $C$  brojevi kao u lemi.

Kako polinom stupnja  $n$  ima najviše  $n$  različitih nutločka slijedi da za svaki prirodan broj  $y < y_0$  imamo najviše  $n$  prirodnih brojeva  $x$  koji zadovoljavaju početnu jednadžbu. To nam ukupno daje najviše  $n(y_0 - 1)$  rješenja.

Za  $y \geq y_0$  iz leme slijedi da je tada

$$y^2 + (m+1)y - C \leq x \leq y^2 + (m+1)y + C,$$

odnosno  $x$  može poprimiti  $2C + 1$  mogućih vrijednosti.

Uvrštavanjem svake od tih vrijednosti u početnu jednadžbu dobivamo polinom stupnja  $2n$  u  $y$ . Time slijedi da za svaku od tih vrijednosti  $x$  imamo najviše  $2n$  prirodnih brojeva  $y$  koji zadovoljavaju početnu jednadžbu. Dakle, u slučaju kad je  $y \geq y_0$  ukupno imamo najviše  $2n(2C + 1)$  rješenja.

Konačno, iz gornjih slučajeva slijedi da početna jednadžba ima najviše  $n(y_0 - 1) + 2n(2C + 1)$  rješenja, tj. broj rješenja početne jednadžbe u skupu prirodnih brojeva jest konačan.