

MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-5.1. [10 bodova]

Učenici Petar i Juraj zamolili su učiteljicu da im kaže koje su ocjene dobili iz testa iz matematike. Učiteljica im je nato zadala sljedeću zagonetku: „vaše ocjene su znamenke koje nedostaju u poljima označenima slovima P (za Petra) i J (za Juraja) u sljedećem pisanom množenju”.

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

Pomozi Petru i Juraju da otkriju koje su ocjene dobili!

Rješenje.

Primijetimo da je ovdje pisano množenje s „potpisivanjem ulijevo” što znači da je 1191 rezultat množenja $39\boxed{} \cdot 3$ što znači da nakon dijeljenja 1191 i 3 dobivamo da je jedan od početnih faktora 397.

Prvi pribrojnik ispod crte ima zadnju znamenku 8 što znači da je to zadnja znamenka umnoška $397 \cdot 3\boxed{}$ pa slijedi da na to prazno mjesto može doći samo znamenka 4.

Budući da sada znamo kako treba pomnožiti brojeve 397 i 34, možemo rekonstruirati ostatak pisanog množenja:

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline 1 \end{array}$$

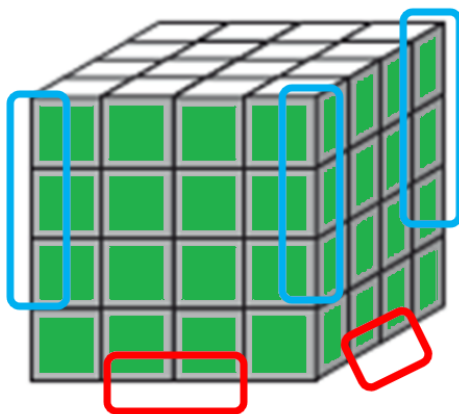
Petar je dobio ocjenu 5, a Juraj ocjenu 4.

Zadatak K-5.2. [15 bodova]

Velika kocka sastavljena je od 64 identične male bijele kocke. Ako pet strana velike kocke obojimo zelenom bojom, koliko će malih kocaka imati točno dvije zelene strane?

Rješenje.

Budući da se velika kocka sastoji od 64 malih kocaka, jedan brid velike kocke čine 4 male kocke.



Po dvije zelene strane ima $4 \cdot 3 = 12$ malih kocaka na vertikalnim bridovima i $4 \cdot 2 = 8$ malih kocaka na donjoj plohi. Ukupno, točno dvije zelene strane ima 20 malih kocaka.

[Video rješenje.](#)

Zadatak K-5.3. [20 bodova]

U nekom je razredu deset učenika dobilo barem jednu peticu, osam učenika barem dvije petice, sedam učenika barem tri petice i pet učenika barem četiri petice. Tri su učenika dobila točno pet petica. Nitko nije dobio više od pet petica. Koliko su ukupno petica dobili učenici tog razreda?

Prvo rješenje.

Odredimo koliko je točno učenika dobilo jednu, dvije, tri i četiri petice. Rješavamo unatrag. Pet učenika je dobilo barem četiri petice. U tom broju su sadržani učenici koji su dobili točno četiri ili točno pet petica (i samo oni). Kako nam je poznato da su tri učenika dobila točno pet petica, zaključujemo da je $5 - 3 = 2$ učenika dobilo točno četiri petice.

Nastavljamo dalje. Sedam učenika koji su dobili barem tri petice čine učenici koji su dobili točno tri petice i učenici koji su dobili barem četiri petice. Stoga je $7 - 5 = 2$ učenika dobilo točno tri petice.

Istim postupkom zaključujemo da je $8 - 7 = 1$ učenik dobio točno dvije petice, a $10 - 8 = 2$ učenika točno jednu peticu.

Konačno, možemo izračunati koliko je ukupno petica dobiveno:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 2 + 2 + 6 + 8 + 15 = 33.$$

Drugo rješenje.

Brojimo direktno dobivene petice. Zamislimo da svakom učeniku za svaku peticu koju je dobio damo po jedno ukrašeno uskršnje jaje, tj. pisanicu. Prebrojimo sada koliko pisanica ukupno imaju učenici, tako da ih postepeno stavljamo u jednu košaru. Neka najprije svaki od deset učenika koji su dobili barem jednu peticu stavi u košaru jednu od svojih pisanica.

Nakon toga neka osam učenika koji su dobili barem dvije petice stavi po jednu pisanicu u košaru. Primijetimo da je to moguće, jer su svi oni do tada stavili samo jednu pisanicu u košaru, dakle sigurno im je ostala bar još jedna za ubaciti u košaru u ovom koraku. U košari je tada $10 + 8 = 18$ pisanica.

Nastavljamo dalje, tako da sedam učenika koji su dobili barem tri petice stave po jednu pisanicu u košaru, nakon toga pet učenika koji su dobili barem četiri petice stave po jednu pisanicu i na kraju tri učenika koji su dobili točno pet petica stave po jednu pisanicu u košaru. Uočimo da su tada sve pisanice u košari, jer nitko nije dobio više od pet pisanica i svi učenici su stavili sve svoje pisanice u košaru.

Ukupni broj pisanica u košari će na kraju biti $10 + 8 + 7 + 5 + 3 = 33$. Kako svaka pisanica odgovara jednoj petici, ovo je traženi ukupni broj petica koji su učenici dobili.

Zadatak K-5.4. [25 bodova]

Umnožak bilo koja dva od brojeva 30, 72 i n je djeljiv s trećim brojem. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja n ?

Rješenje.

Budući da n mora biti djelitelj od $30 \cdot 72$, a $30 \cdot 72 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ u rastavu na proste faktore, zaključujemo da n u svom rastavu na proste faktore nema više od četiri faktora 2, više od tri faktora 3 i više od jednog faktora 5, a nema ni neke druge proste faktore osim 2, 3 i 5.

Budući da $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ mora biti djelitelj od $72n$, a $72n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot n$, zaključujemo da n mora u svom rastavu na proste faktore imati barem jedan faktor 5 što znači da ima točno jedan faktor 5.

Budući da $72 = 2^3 \cdot 3^2$ mora biti djelitelj od $30n$, a $30n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n$, zaključujemo da n mora u svom rastavu na proste faktore imati barem dva faktora 2 i jedan faktor 3.

Dakle, n mora biti višekratnik broja $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, a kako tražimo najmanju vrijednost od n , slijedi da je $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Zadatak K-5.5. [30 bodova]

Dvojica gusara pronašla su na pustom otoku sanduk pun zlatnika, srebrnjaka i bakrenjaka. Prebrojili su sve tri vrste novčića i utvrdili da je najviše srebrnjaka, a najmanje bakrenjaka. Pošto nisu znali kako da međusobno raspodijele blago, odlučili su raspodjelu prepustiti sudbini. Zapisali su sve moguće raspodjele novčića na zasebne papiriće (uključujući i one raspodjele pri kojima jedan od gusara ne dobije niti jedan novčić pojedine vrste) i nasumično izvukli jedan. Sudbina je odlučila biti pravedna i raspodijelila je sve novčiće ravnomjerno među njima.

Ako im je trebalo ukupno 1955 papirića, koliko je novčića svake vrste dobio svaki gusar?

Rješenje.

Označimo sa z broj zlatnika u sanduku, sa s broj srebrnjaka i sa b broj bakrenjaka.

U bilo kojoj raspodjeli prvi gusar može dobiti od 0 do z zlatnika, od 0 do s srebrnjaka i od 0 do b bakrenjaka. To je $z + 1$ mogućnosti za broj dobivenih zlatnika prvog gusara, $s + 1$ mogućnosti za broj dobivenih srebrnjaka i $b + 1$ mogućnosti za broj dobivenih bakrenjaka. Jasno je da je svaka raspodjela novčića jednoznačno određena brojem novčića koje dobije prvi gusar (jer drugi dobije točno sve preostalo).

Ukupni broj mogućih raspodjela stoga iznosi $(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1)$. Budući da je bilo ukupno 1955 mogućih raspodjela (svaka raspodjela na jednom papiriću), vrijedi:

$$(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1) = 1955.$$

Rastavom broja 1955 na proste faktore dobiva se $1955 = 5 \cdot 7 \cdot 53$ pa je

$$(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1) = 5 \cdot 17 \cdot 23.$$

Budući da srebrnjaka ima najviše, slijedi $s + 1 = 23$, tj. $s = 22$.

Najmanje ima bakrenjaka pa je $b + 1 = 5$, tj. $b = 4$.

Promatrajući zlatnike imamo $z + 1 = 17$, tj. $z = 16$.

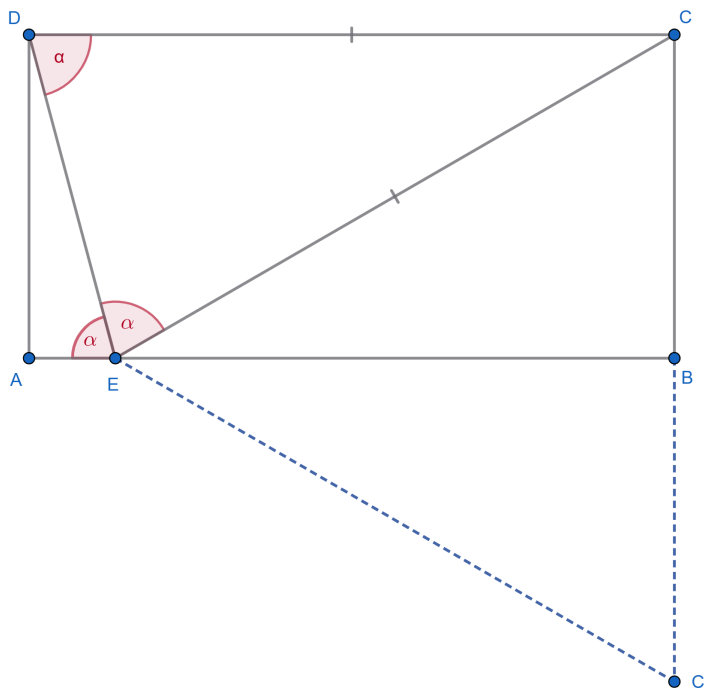
Kako je raspodjela bila ravnomjerna, svaki gusar je dobio 11 srebrnjaka, 2 bakrenjaka i 8 zlatnika.

Zadatak K-5.6. [35 bodova]

Stranica \overline{AB} pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice \overline{BC} . Na stranici \overline{AB} odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Rješenje.

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle CED$ su sukladni. Označimo s α veličine tih kutova.

Budući da je DE presječna paralelnih stranica pravokutnika \overline{AB} i \overline{CD} , kutovi $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle EDC$ su sukladni pa je $\alpha = |\sphericalangle EDC|$.

Budući da trokut CED ima dva kuta sukladna, on je jednakokrčan i vrijedi $|CD| = |CE|$. Kako je $|AB| = 2|BC|$, slijedi i $|CD| = 2|BC|$ te $|CE| = 2|BC|$.

Neka je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na AB . Tada je $|BC| = |BC'|$ te iz toga slijedi $|CE| = |CC'|$.

Kako je E točka na simetrali dužine $\overline{CC'}$, ona je jednako udaljena od točaka C i C' pa je $|CE| = |C'E|$. Dakle, trokut CEC' je jednakostraničan.

Jednakostranični trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to 60° . U jednakostraničnom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga EB prepolavlja kut $\sphericalangle CEC'$, odakle zaključujemo da je $|\sphericalangle BEC| = 30^\circ$.

Kako je zbroj veličina kutova $\sphericalangle DEA$, $\sphericalangle CED$ i $\sphericalangle BEC$ jednak 180° (čine ispruženi kut), slijedi da je $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$, odakle je konačno $\alpha = 75^\circ$.

Zadatak K-5.7. [40 bodova]

Koliko šestoznamenastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili barem četiri znamenke 4 ili barem pet znamenki 5?

Rješenje.

Rješenje ovog zadatka se sastoji od dva velika dijela. Najprije ćemo pojedinačno prebrojati koliko postoji šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem n znamenki n , gdje je $n = 1, 2, 3, 4$ i 5 . Nakon

toga ćemo kombinirati dobivene pojedinačne rezultate u konačni rezultat, pazeći da svaki traženi broj brojimo točno jednom.

$n = 1$ (broj šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1):

Ovdje već možemo upasti u zamku ako krenemo „direktno” prebrojavati. Recimo da razmišljamo kako slijedi. U šestoznamenastom broju trebamo imati barem jednu jedinicu. Njeno mjesto možemo odabrati na 6 načina. Ostalih 5 znamenki možemo odabrati proizvoljno (osim prve koja ne smije biti nula, ali zanemarimo to sada), pa imamo ukupno $6 \cdot 10^5 = 600000$ brojeva u ovom slučaju. No, primijetimo da smo broj 111111 ovakvim brojanjem prebrojali jako puno puta, umjesto smao jednom! Slično vrijedi za sve brojeve u kojima imamo više od jedne jedinice, jer ih brojimo kao nove brojeve svaki put kada promijenimo poziciju znamenke 1 koju brojimo prvu.

U ovakvoj situaciji je često lakše prebrojati tražene brojeve metodom *komplementa*. Naime, lakše nam je ispravno prebrojati koliko šestoznamenastih brojeva ne sadrži niti jednu znamenku 1. Primijetimo da je to točno „suprotan” skup brojeva od onog koje stvarno želimo prebrojati. Zato ćemo preko njega moći odrediti i koliko brojeva zadovoljava svojstvo koje želimo.

Brojimo dakle koliko šestoznamenastih brojeva ne sadrži niti jednu znamenku 1. Prva znamenka takvog broja može biti bilo koja iz skupa $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$, što je 8 mogućnosti. Preostale znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 2, 3, 4, \dots, 9\}$, što je 9 mogućnosti za svaku od preostalih pet znamenki. Dakle, postoji $8 \cdot 9^5 = 472392$ šestoznamenastih brojeva koji ne sadrže niti jednu znamenku 1.

Šestoznamenastih brojeva ukupno ima $9 \cdot 10^5 = 900000$, pa zaključujemo da šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1 ima $900000 - 472392 = 427608$.

$n = 2$ (broj šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem dvije znamenke 2):

I ovdje ćemo se poslužiti metodom komplementa. Komplementarno svojstvo zadanom je sljedeće: šestoznamenasti brojevi koji sadrže najviše jednu znamenku 2. Prebrojavanje ćemo podijeliti na dva međusobno odvojena slučaja: šestoznamenasti brojevi koji nemaju znamenku 2 i oni koji sadrže točno jednu znamenku 2.

Kao i u prethodnom slučaju, broj šestoznamenastih brojeva koji ne sadrže znamenku 2 je $8 \cdot 9^5 = 472392$.

Prebrojimo sada koliko šestoznamenastih brojeva sadrži točno jednu znamenku 2. Kako je prva znamenka posebna (jer ne smije biti nula), izdvojimo slučaj kada je znamenka 2 na prvom mjestu. U tom slučaju postoji $9^5 = 59049$ različitih brojeva, jer preostale znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 1, 3, 4, \dots, 9\}$. Ako znamenka 2 nije na prvom mjestu, imamo 5 mogućnosti za njenu poziciju. Za prvu znamenku imamo 8 mogućnosti (ne smije biti 0 ni 2), a za preostale četiri znamenke imamo po 9 mogućnosti, pa stoga ukupno u ovom slučaju imamo $5 \cdot 8 \cdot 9^4 = 262440$ različitih brojeva. Dakle, ukupno je $59049 + 262440 = 321489$ šestoznamenastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 2.

Konačno, šestoznamenastih brojeva koji sadrže najviše jednu znamenku 2 ima $472392 + 321489 = 793881$. Metodom komplementa zaključujemo da broj šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem dvije znamenke 2 iznosi $900000 - 793881 = 106119$.

$n = 3$ (broj šestoznamenastih brojeva koji sadrže barem tri znamenke 3):

Koristimo ponovno metodu komplementa. Prema rezultatu iz prethodnog koraka (jer sama vrijednost znamenke nije važna) znamo da šestoznamenastih brojeva koji sadrže najviše jednu znamenku 3 ima 793881. Ostaje prebrojati koliko šestoznamenastih brojeva sadrži točno dvije znamenke 3.

Izdvojimo ponovno one brojeve u kojima je jedna od znamenki 3 na prvom mjestu. Druga znamenka 3 može biti na bilo kojem od preostalih pet mjesta, a svaka od preostale četiri znamenke može biti bilo koja iz skupa $\{0, 1, 2, 4, 5, \dots, 9\}$. Stoga je ovom slučaju $5 \cdot 9^4 = 32805$ brojeva.

Ako na prvom mjestu nije znamenka 3, tada dvije znamenke 3 možemo rasporediti na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

načina. Naime, prvu znamenku 3 možemo staviti na pet mjesta, a drugu onda na četiri mjesta. No, time smo duplo prebrojali svaki broj, jer na ovaj način brojimo uzimajući u obzir raspored znamenki (ilustrativno, AB i BA brojimo kao dva broja), međutim kako su znamenke jednake, njihovi različiti rasporedi ne mijenjaju konačni broj. Prvu znamenku biramo na 8 načina, a preostale tri znamenke svaku na po 9 načina. Ukupni broj u ovom slučaju je $10 \cdot 8 \cdot 9^3 = 58320$.

Dakle, ukupno je $32805 + 58320 = 91125$ šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno dvije znamenke 3.

Konačno, šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže najviše dvije znamenke 3 ima $793881 + 91125 = 885006$. Metodom komplementa zaključujemo da broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem tri znamenke 3 iznosi $900000 - 885006 = 14994$.

$n = 4$ (broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem četiri znamenke 4):

Ovdje možemo prijeći na direktno prebrojavanje, umjesto indirektnog prebrojavanja preko komplementa, jer imamo samo tri međusobno odvojene grupe brojeva za prebrojati: oni koji sadrže točno četiri, pet ili šest znamenki 4.

Prebrojimo koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno četiri znamenke 4. Ponovno izdajamo posebno slučaj kada je prva znamenka 4. Tada preostale tri znamenke 4 možemo rasporediti na pet slobodnih mjesta na $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ načina (imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku 4, 4 mogućnosti za drugu i 3 mogućnosti za treću, te ne razlikujemo različite redoslijede znamenki). Preostale dvije znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$. Stoga je u ovom slučaju ukupno $10 \cdot 9^2 = 810$ različitih brojeva.

Ako na prvom mjestu nije znamenka 4, tada četiri znamenke 4 možemo rasporediti na 5 načina na preostalim pet mjestima (odabiremo jedno mjesto na koje ne ide znamenka 4). Prvu znamenku biramo iz skupa $\{1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, a preostalu iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$. Ukupni broj brojeva u ovom slučaju je $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$. Stoga je konačni broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno četiri znamenke 4 jednak $810 + 360 = 1170$.

Prebrojimo sada koliko šesteroznamenkastih brojeva sadrži točno pet znamenki 4. Ako je prva znamenka 4, tada preostale četiri znamenke 4 možemo rasporediti na 5 načina na preostalim 5 mjestima, a preostala znamenka može biti bilo koja iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, pa u ovom slučaju postoji ukupno $5 \cdot 9 = 45$ brojeva. Ako prva znamenka nije 4, tada je ona bilo koja iz skupa $\{1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, što znači da u ovom slučaju postoji 8 brojeva. Sve zajedno, postoji $45 + 8 = 53$ šesteroznamenkastih brojeva koji imaju točno pet znamenki 4.

Na kraju, jasno je da postoji samo jedan šesteroznamenkasti broj koji ima točno 6 znamenki 4. Zaključujemo da traženih šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem četiri znamenke 4 ima $1170 + 53 + 1 = 1224$.

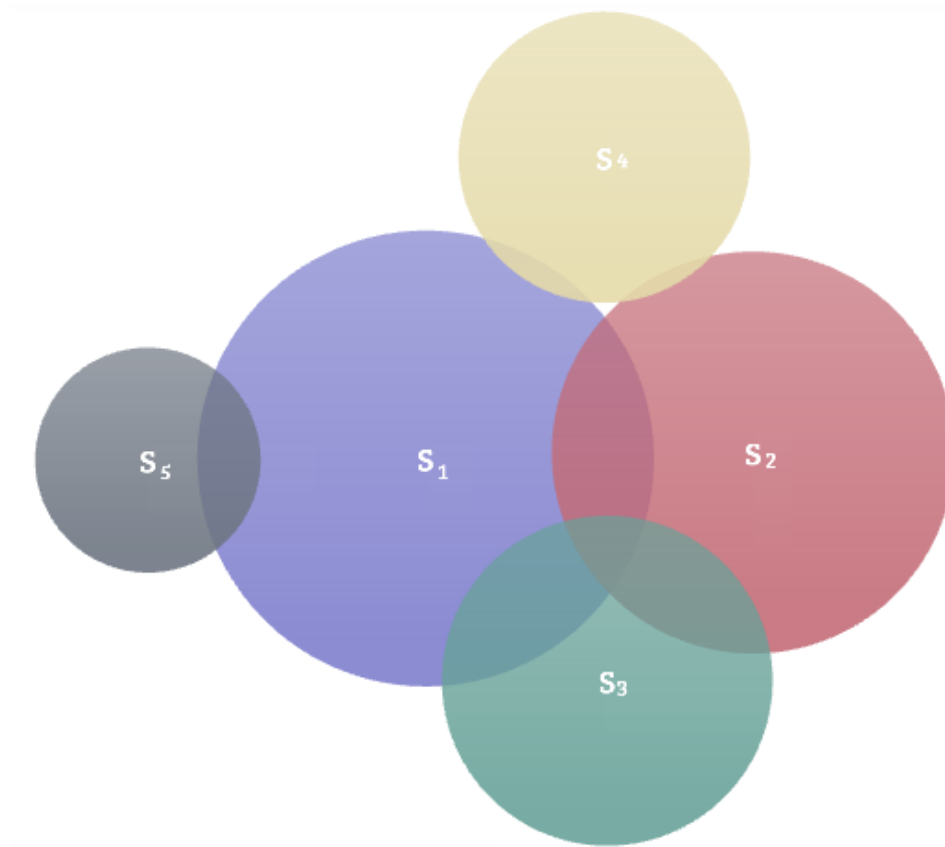
$n = 5$ (broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem pet znamenki 5):

Prema rezultatu iz prethodnog odjeljka, znamo da postoji 53 šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno pet znamenki 5. Zajedno s jednim brojem koji se sastoji od samih znamenki 5, zaključujemo da postoji ukupno 54 šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem pet znamenki 5.

Ovime je završen prvi dio rješenja, tj. određivanje pojedinačnog broja šesteroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju jedan od traženih uvjeta. Sada želimo odrediti koliko brojeva postoji koji zadovoljavaju barem jedno od tih svojstava. Poteškoća na koju sada nailazimo je da neki brojevi zadovoljavaju više svojstava i stoga bismo ih više puta prebrojali ako bismo samo zbrojili dobivene brojeve.

Kako bismo točno izbrojili tražene brojeve, uvodimo *skupove* brojeva koji zadovoljavaju tražena svojstva. Neka je dakle sa S_1 označen skup svih šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1. Analogno označimo i ostale skupove, dakle sa S_2, S_3, S_4 i S_5 . *Veličina skupa* (broj njegovih elemenata) označava se vertikalnim crtama $|\cdot|$. Iz prethodnih izračuna smo dobili da vrijedi $|S_1| = 427608, |S_2| = 106119, |S_3| = 14994, |S_4| = 1224, |S_5| = 54$.

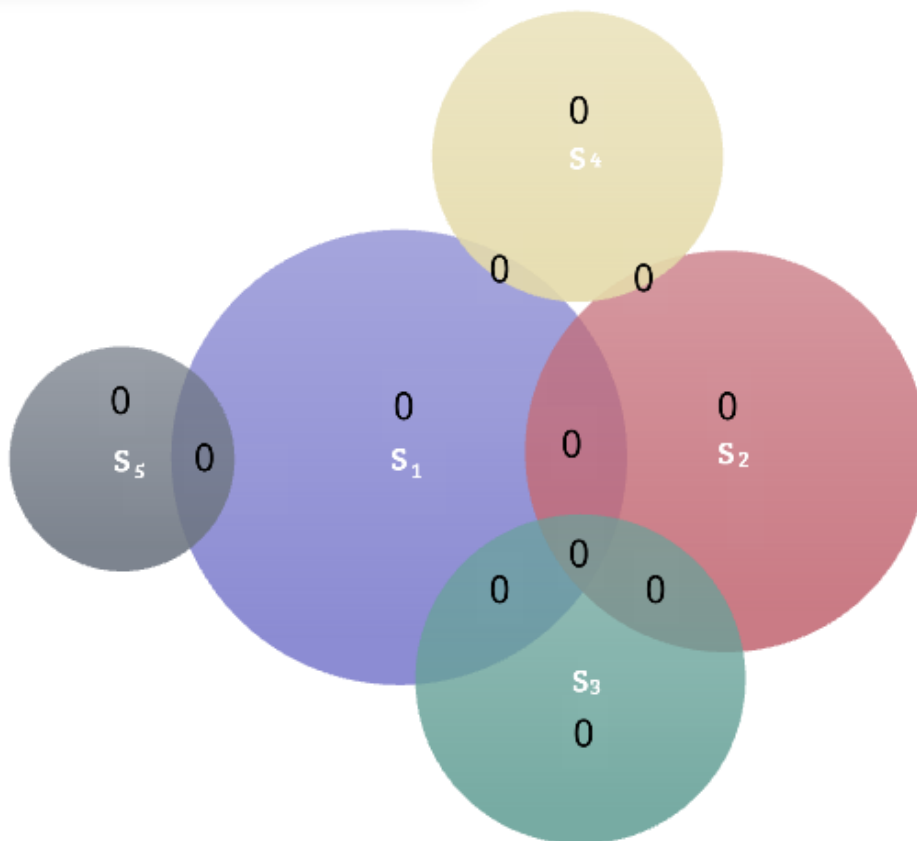
Prikažimo sada ilustrativno skupove kao krugove i to tako da sugestivno označimo kada se neki skupovi „preklapaju”, tj. sadrže isti broj – kažemo da skupovi imaju *presjek*. Ovakva slika naziva se *Vennov dijagram*.



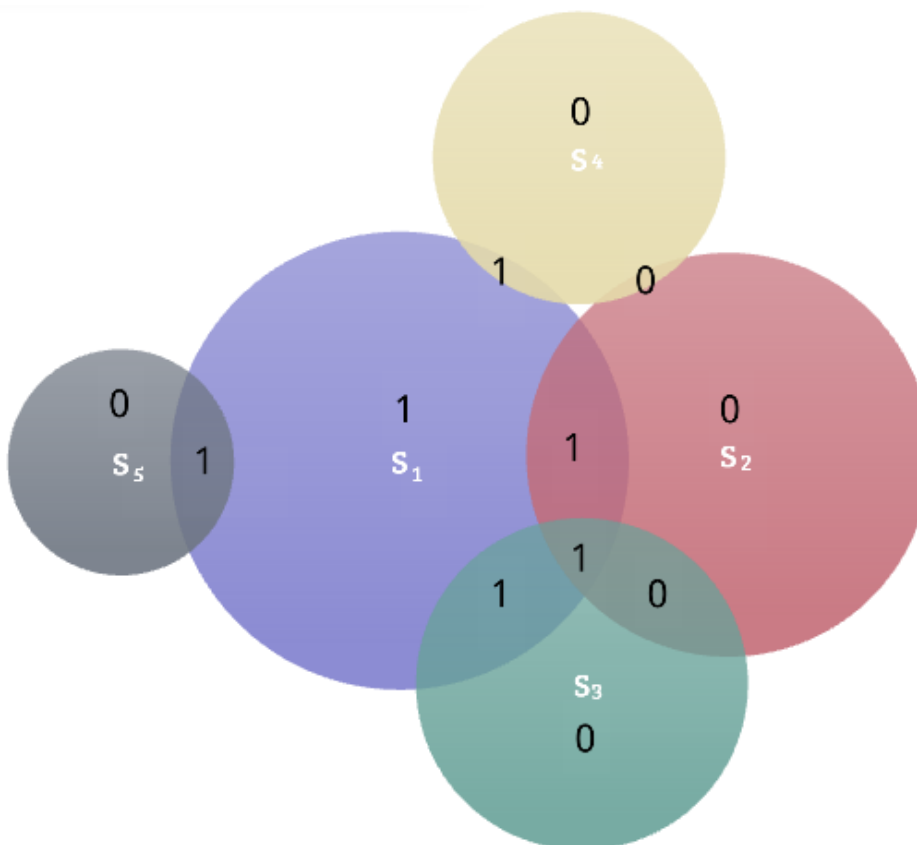
Prokomentirajmo malo zašto Vennov dijagram izgleda baš ovako. Skup S_1 ima presjek sa svim preostalim skupovima. Skup S_2 ima presjek sa svim preostalim skupovima, osim sa skupom S_5 . Naime, šesteroznamenasti broj koji bi bio istovremeno u skupovima S_2 i S_5 bi trebao imati najmanje dvije znamenke 2 i najmanje pet znamenki 5 – no, taj broj bi se tada sastojao od najmanje sedam znamenaka, a to je nemoguće. Skup S_3 ima presjek sa skupovima S_1 i S_2 . Važno je za primijetiti da ova tri skupa imaju zajednički presjek, u koji pripadaju šesteroznamenasti brojevi koji se sastoje od jedne znamenke 1, dvije znamenke 2 i tri znamenke 3. Skup S_4 ima presjek sa skupovima S_1 i S_2 . Ovdje je zanimljivo i važno primijetiti da ova tri skupa nemaju zajednički presjek, jer bi se broj iz tog presjeka trebao sastojati od najmanje $1 + 2 + 4 = 7$ znamenaka. Konačno, skup S_5 ima presjek samo sa skupom S_1 .

Sada dolazi zanimljiv dio zadatka. Trebamo odrediti koliko brojeva ukupno sadrže skupovi S_1 , S_2 , S_3 , S_4 i S_5 . Rekli smo već da je poteškoća u određivanju ovog broja činjenica da se neki brojevi pojavljuju u više od jednog skupa te da stoga moramo paziti da ih ne prebrojimo više od jednom. U tome će nam pomoći naš Vennov dijagram. Brojat ćemo postepeno i na dijagramu označavati koliko puta smo prebrojali elemente pojedinog dijela skupova.

Neka broj Z sadržava trenutni broj elemenata koji smo prebrojali. Na dijagramu označimo koliko puta smo prebrojali svaki element u određenom području. Na početku brojanja je $Z = 0$ i svi brojevi na dijagramu su nula.

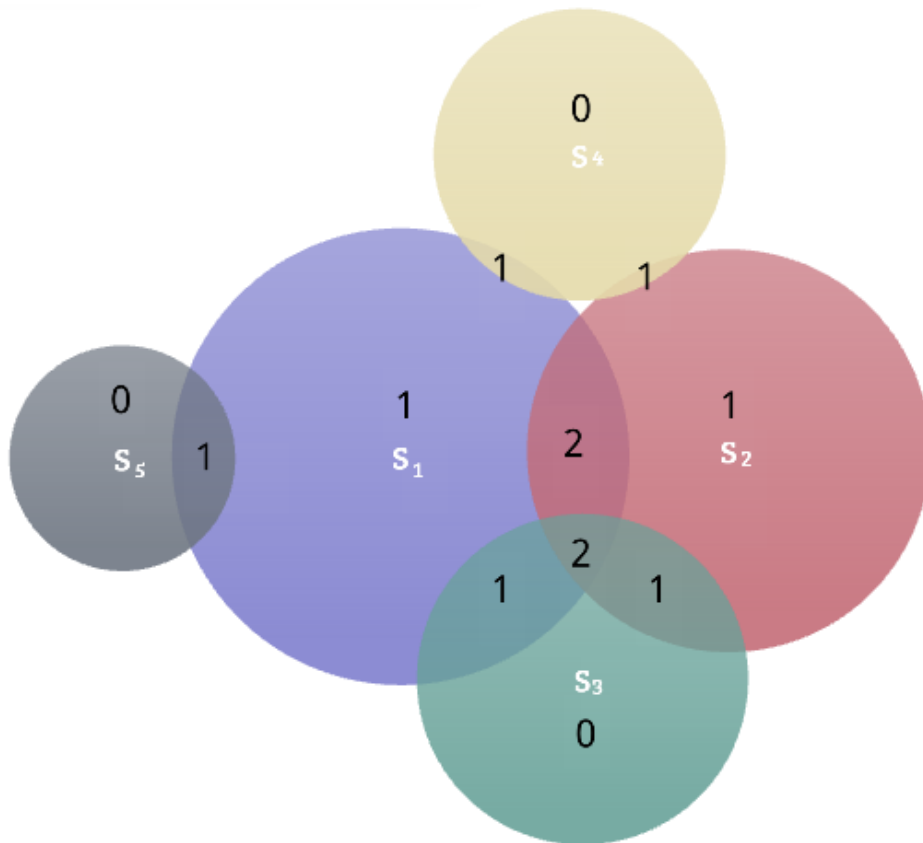


U prvom koraku prebrojimo sve elemente skupa S_1 , pa je tada $Z = 0 + |S_1| = |S_1|$. Dijagram s brojačima sada izgleda ovako:

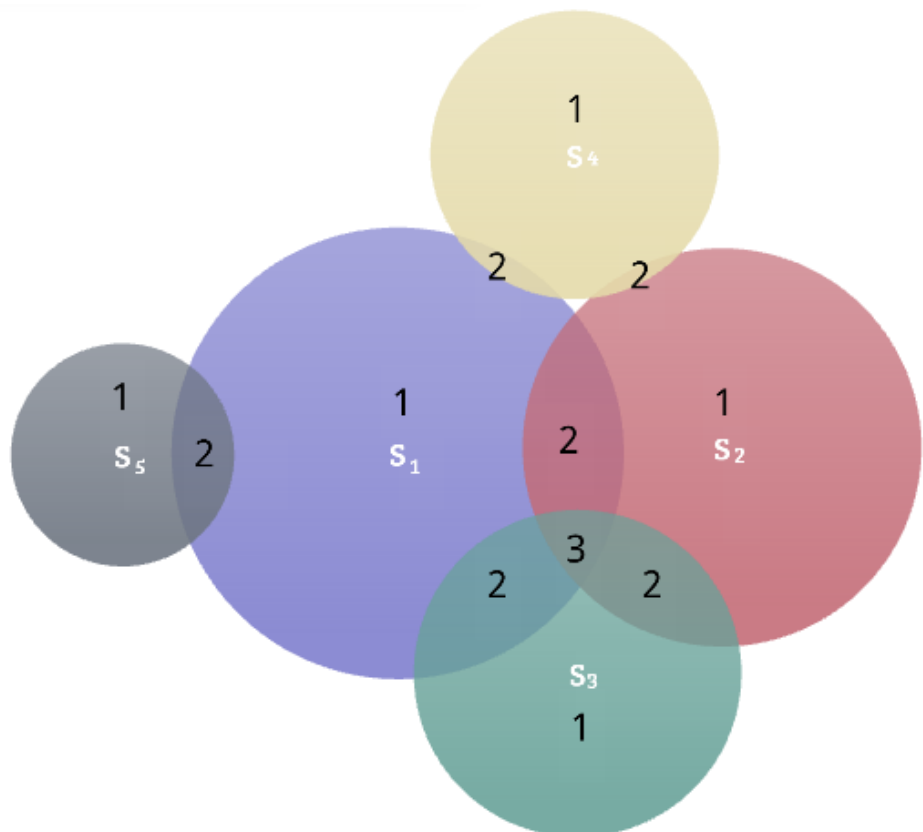


U drugom koraku prebrojimo sve elemente skupa S_2 , pa je tada $Z = |S_1| + |S_2|$. Budući da elemente

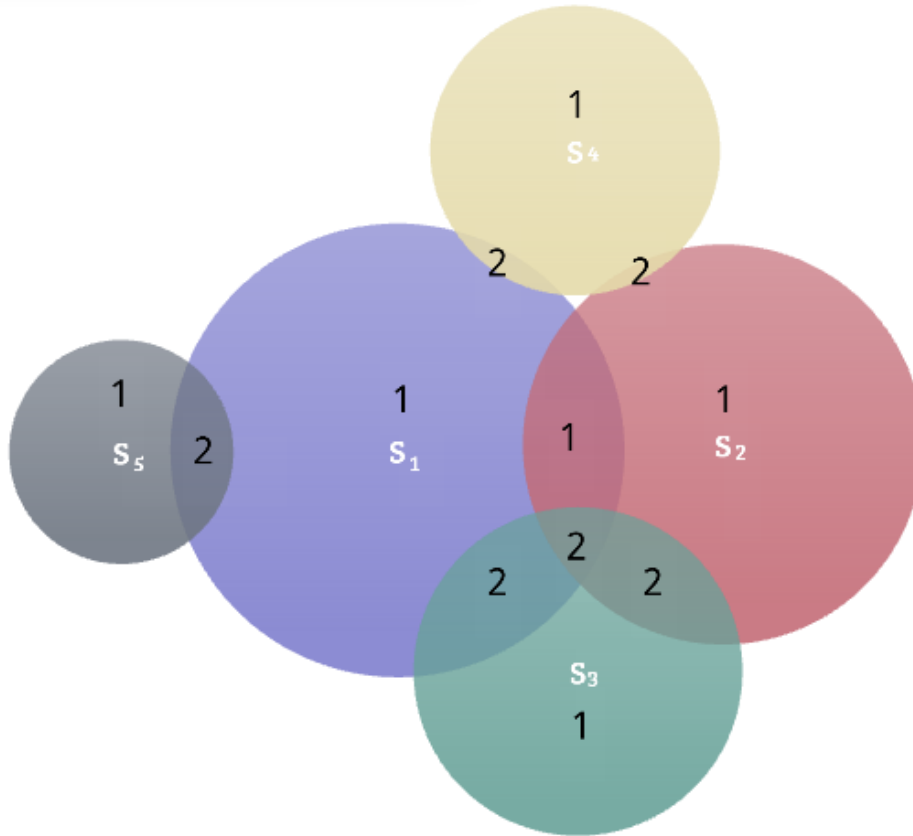
iz presjeka skupova S_1 i S_2 brojimo po drugi put, dijagram s brojačima sada izgleda ovako:



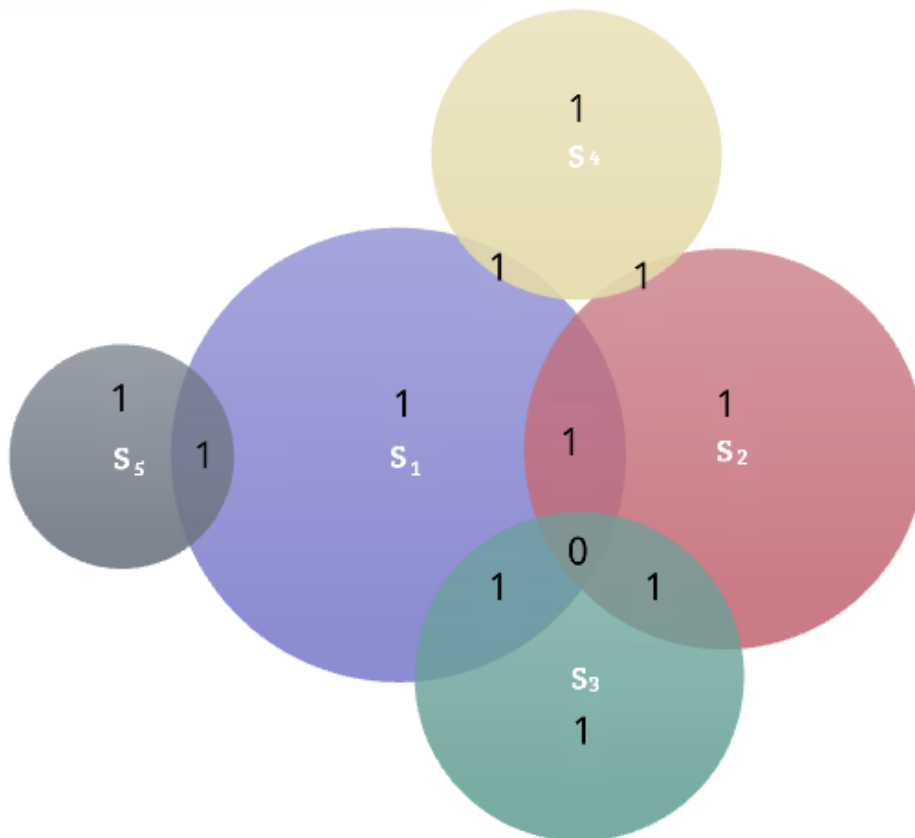
Sada nam je jasno što će se događati, pa možemo razmotriti situaciju nakon što pribrojimo elemente preostalih skupova S_3 , S_4 i S_5 . Tada je $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5|$, a dijagram izgleda ovako:



Cilj nam je da svaki brojač bude na 1, jer to znači da smo elemente iz tog područja dijagrama prebrojali točno jednom. Stoga sada moramo smanjiti sve brojače veće od 1. To postizemo tako da od broja Z oduzimamo broj brojeva koji su u presjeku nekih skupova. Oduzmimo najprije broj brojeva koji su u presjeku skupova S_1 i S_2 – označimo taj skup sa $S_{1,2}$. Tada je $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}|$, a dijagram s brojačima postaje:



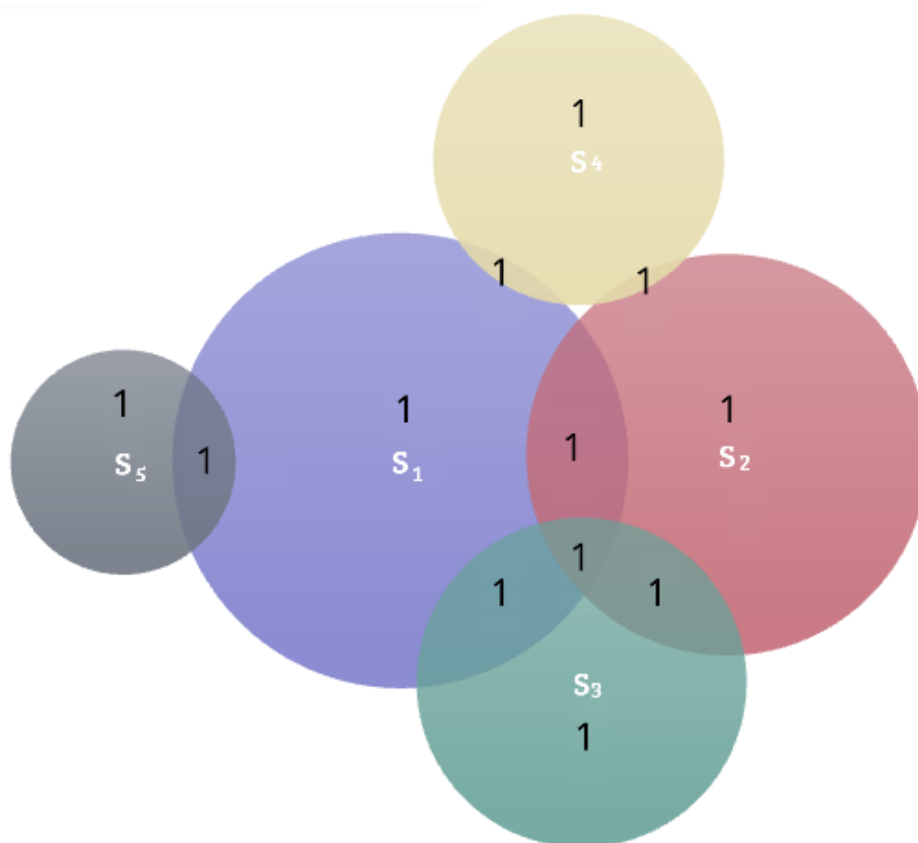
Primijetimo da je i dijagram iz zajedničkog presjeka skupova S_1 , S_2 i S_3 u prethodnom koraku smanjen za jedan, jer je on dio presjeka skupova S_1 i S_2 . Nakon što istim postupkom izbacimo sve presjeke po dva skupa, vrijedi $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}| - |S_{1,3}| - |S_{2,3}| - |S_{2,4}| - |S_{1,5}|$, a dijagram izgleda ovako:



Primijećujemo da je brojač za područje $S_{1,2,3}$ ovim postupkom došao na vrijednost 0, jer smo elemente iz tog područja najprije prebrojali tri puta (po jednom za svaki od skupova S_1 , S_2 i S_3), a potom oduzeli također tri puta (po jednom za svaki presjek $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ i $S_{2,3}$). Stoga u posljednjem koraku našem broju Z trebamo pribrojiti vrijednost $|S_{1,2,3}|$. Konačno dakle vrijedi

$$Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}| - |S_{1,3}| - |S_{2,3}| - |S_{2,4}| - |S_{1,5}| + |S_{1,2,3}|,$$

a dijagram je napokon „ispravan”:



Ovime smo došli do čuvene *FUI formule* – formula uključivanja i isključivanja. Preostaje nam još odrediti veličine presjeka skupova.

Idemo redom. Odredimo veličinu skupa $S_{1,2}$, dakle odredimo broj šesteroznamenkastih brojeva koji istovremeno imaju barem jednu znamenku 1 i barem dvije znamenke 2. Podijelimo ih na 10 skupina s obzirom na to koliko točno znamenki 1 i 2 imaju. Svaku od tih skupina prebrojimo na način analogan prethodnim prebrojavanjima. Primjerice, odredimo broj brojeva koji sadrže točno dvije jedinice i dvije dvojke. Podijelimo ih najprije s obzirom na to je li ijedna od tih znamenki na prvom mjestu ili nije. U slučaju da je neka od tih znamenki na prvom mjestu, preostale možemo rasporediti na preostalim pet mjestima na $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ načina (ponovno ne uzimamo u obzir raspored, bar za sada), a dvije preostale znamenke biramo svaku iz skupa $\{0, 3, 4, \dots, 9\}$, dakle na 8 načina. Još trebamo uzeti u obzir da znamenke 1, 1, 2, 2 možemo poredati na $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$ načina (najprije ih poredamo kao da su sve različite na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ načina, a onda podijelimo s brojem načina da iste znamenke rasporedimo, što je po dva načina za svaku znamenku). Dakle, u ovom slučaju imamo $10 \cdot 8^2 \cdot 6 = 3840$ brojeva. Ako znamenke 1 i 2 nisu na prvom mjestu, tada ih možemo rasporediti na 5 načina na neka četiri od preostalim pet mjestima, pa je broj takvih brojeva $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 = 1680$. Ukupno je dakle $3840 + 1680 = 5520$ šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno dvije znamenke 1 i točno dvije znamenke 2.

Veličine svih skupina su sljedeće:

broj znamenki 1 \ broj znamenki 2	2	3	4	5
1	28800	3680	235	6
2	5520	470	15	0
3	470	20	0	0
4	15	0	0	0

Ukupno je stoga $|S_{1,2}| = 39231$.

Tablica za skup $S_{1,3}$ je samo dio tablice za $S_{1,2}$, jer same vrijednosti znamenki ne mijenjaju broj:

broj znamenki 1 \ broj znamenki 3	3	4	5
	1	3680	235
2	470	15	0
3	20	0	0

Ukupno je stoga $|S_{1,3}| = 4426$.

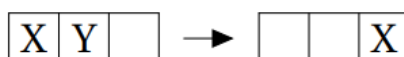
Analognim postupkom dobijemo i $S_{1,4} = 256$, $S_{1,5} = 6$, $S_{2,3} = 505$, $S_{2,4} = 15$. Veličinu skupa $S_{1,2,3}$ izračunamo kao broj svih rasporeda znamenki 1, 1, 1, 2, 2 i 3, koji iznosi $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1} = 60$.

Na kraju krajeva, traženi broj iznosi

$$Z = 427608 + 106119 + 14994 + 1224 + 54 - 39231 - 4426 - 256 - 6 - 505 - 15 + 60 = 505620.$$

Zadatak K-5.8. [45 bodova]

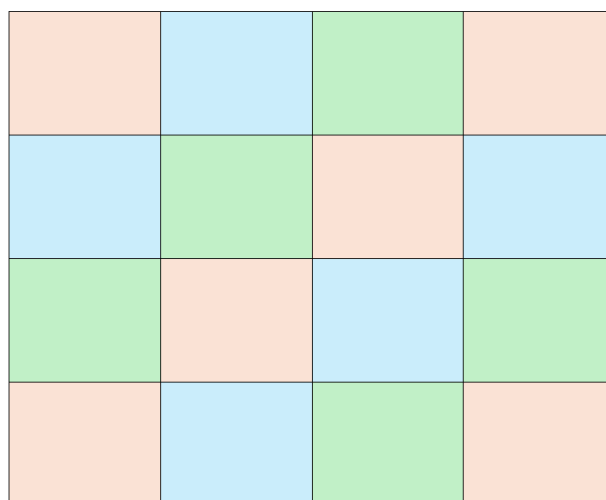
Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja (u horizontalnom ili vertikalnom smjeru), uzima žetom s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).



Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.

Rješenje.

Uočimo da svakim potezom, tj. preskakanjem i uklanjanjem žetona, nestane žeton s polja s kojega je krenuo skok i nestane žeton koji je preskočen, a pojavi se žeton na mjestu koje je do tada bilo prazno. Stoga možemo zaključiti kako s obzirom na promjenu broja žetona u jednom potezu postoje tri vrste polja. Dakle, ima smisla obojiti ploču s 3 različite boje, i to tako da svaka tri uzastopna polja ploče budu obojena u tri različite boje.



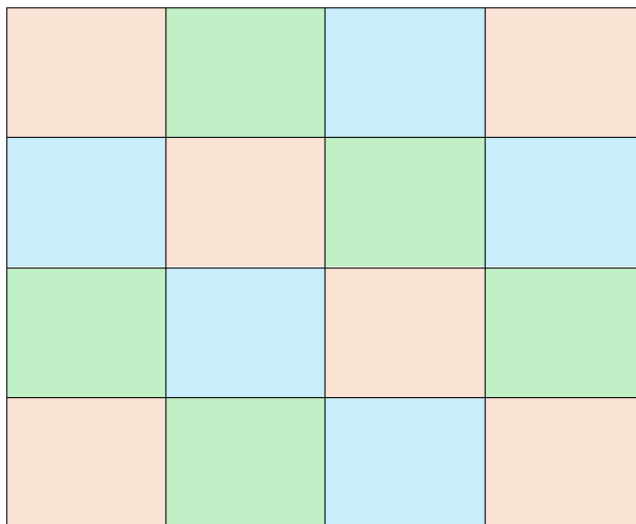
Sada primjećujemo da se kod ovakvog bojanja u svakom potezu ukupan broj žetona koji se nalaze na neke dvije boje smanji za točno 1, a ukupan broj žetona na trećoj boji se poveća za točno 1. Iz toga slijedi da se u svakom potezu promijeni parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji.

Kako je na početku na ploči 15 žetona, ako Anton uspije završiti sa samo jednim žetonom na ploči, znamo da je napravio ukupno 14 poteza. Zaključujemo da će parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji na kraju biti jednaka kao i na početku.

Uočimo da je 6 polja ploče obojeno u crveno, a po 5 polja u plavo i zeleno. Budući da na kraju ostaje samo jedan žeton na cijeloj ploči, broj žetona na neke dvije boje na početku mora biti paran, a na preostaloj boji broj žetona mora biti neparan. Primijetimo sada da nije moguće da istovremeno na plavoj i zelenoj boji imamo po paran broj žetona na početku, jer bi tada barem po jedno plavo i zeleno polje ostalo prazno, a to je u kontradikciji s činjenicom da je na početku samo jedno polje ploče prazno.

Zaključujemo da na crvenim poljima početni broj žetona mora biti paran. No, tada na svim crvenim poljima na početku mora biti postavljen žeton, jer bi u suprotnom barem dva crvena polja bila prazna. Prazno polje stoga može biti plave ili zelene boje.

Primijetimo sada da rotacijom ploče za 90° dobijemo ponovno bojanje koje zadovoljava svojstvo da su svaka tri uzastopna polja obojena u tri različite boje. Stoga istim zaključivanjem zaključujemo da i pri ovakvom bojanju sva crvena polja moraju biti popunjena. Zaključujemo da prazno polje na početku jedino može biti neko polje na rubu ploče koje nije kut ploče.



Sljedeća konstrukcija pokazuje da u tom slučaju Anton zaista može postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton (na slici).

