

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Blagajnica Branka pogriješila je vraćajući Ani ostatak novca: iznos koji je trebala vratiti u eurima vratila je u centima, a iznos koji je trebala vratiti u centima vratila je u eurima. Ne provjeravajući vraćeni novac, Ana ga je spremila u prazni novčanik i otišla u drugu trgovinu gdje je potrošila 4.45 eura. Nakon toga je primijetila da u novčaniku ima točno dvostruko više novca nego što joj je blagajnica Branka trebala vratiti. Koliki je iznos blagajnica Branka trebala vratiti Ani ako je poznato da je taj iznos manji od 100 eura?

Rješenje.

Neka je x broj eura, a y broj centi koje je blagajnica trebala vratiti.

Blagajnica je trebala vratiti $100x + y$ centi, a vratila je $100y + x$ centi.

Nakon što je Ana potrošila 445 centi, u novčaniku joj je ostalo $100y + x - 445$ centi. 1 bod

Prema uvjetu zadatka, to je dvostruko više od onoga što je trebala dobiti pa vrijedi

$$100y + x - 445 = 2(100x + y). \quad 1 \text{ bod}$$

Sređivanjem dobivamo $98y = 199x + 445$, odnosno 1 bod

$$y = \frac{199x + 445}{98} = 2x + 4 + \frac{3x + 53}{98}. \quad 2 \text{ boda}$$

Budući da su x i y cijeli brojevi, mora vrijediti $3x + 53 = 98k$, $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Za broj eura i centi vrijedi $0 \leq x < 100$, $0 \leq y < 100$.

Stoga za $x = \frac{98k - 53}{3}$ vrijedi $0 \leq \frac{98k - 53}{3} < 100$. 1 bod

Sređivanjem slijedi $53 \leq 98k < 353$, odnosno $1 \leq k \leq 3$. 1 bod

Za $k = 3$ slijedi $3x + 53 = 294$, tj. $x = \frac{241}{3} \notin \mathbb{Z}$, što nije moguće.

Za $k = 2$ slijedi $3x + 53 = 196$, tj. $x = \frac{143}{3} \notin \mathbb{Z}$, što nije moguće. 1 bod

Za $k = 1$ slijedi $3x + 53 = 98$, tj. $x = 15$.

Za $x = 15$ dobivamo $y = 35$. Blagajnica je Ani trebala vratiti 15.35 eura. 1 bod

Napomena: Moguće je i da učenici izraze

$$y = \frac{199x + 445}{98} = 2x + \frac{3x + 445}{98}$$

i nakon toga promatraju $3x + 445 = 98k$. Istim postupkom dobivaju $5 \leq k \leq 7$ i jedino rješenje se dobiva za $k = 5$. Takva rješenja se boduju na isti način.

Iz $98y = 199x + 445$, tj. $x = \frac{98y-445}{199}$ učenici mogu zaključiti $0 \leq \frac{98y-445}{199} < 100$, što nosi **1 bod**. Tada se sređivanjem dobiva $5 \leq y \leq 207$, što nosi **1 bod**. Eliminacija mogućnosti $y \geq 100$ nosi još **1 bod**, a eliminacija svih mogućnosti $5 \leq y \leq 99$ osim $y = 35$ nosi **3 boda**. Za zaključak da je $y = 35$ i $x = 15$ jedino rješenje i odgovor da je blagajnica Ani trebala vratiti 15.35 eura dodjeljuje se **1 bod**.

Zadatak se može riješiti i tako da se u postupcima zamijene uloge x i y , te se takvi postupci boduju analogno.

Zadatak B-1.2.

Zadana je jednačba

$$\frac{x-2a}{2+x} - \frac{x+2a}{x-2} = \frac{4a}{4-x^2}.$$

- a) Odredi vrijednost realnog parametra a za koji je 2026 rješenje zadane jednačbe.
- b) Odredi sve vrijednosti realnog parametra a za koje zadana jednačba nema rješenja.

Rješenje.

a) Uvrštavanjem $x = 2026$ u početnu jednačbu dobivamo

$$\frac{2026-2a}{2028} - \frac{2026+2a}{2024} = \frac{4a}{-2024 \cdot 2028}.$$

Množenjem gornje jednačbe s $2024 \cdot 2028$ i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} 2024 \cdot (2026 - 2a) - 2028 \cdot (2026 + 2a) &= -4a & 1 \text{ bod} \\ 4a \cdot (-1012 - 1014 + 1) &= 2026 \cdot 4 \\ a &= \frac{2026 \cdot 4}{4 \cdot (-2025)} = -\frac{2026}{2025}. & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

b) Dana je jednačba ekvivalentna s jednačbom

$$\frac{x-2a}{2+x} - \frac{x+2a}{x-2} = \frac{4a}{(2-x)(2+x)} \quad 1 \text{ bod}$$

pri čemu mora vrijediti $x \neq \pm 2$. 1 bod

Množenjem gornje jednačbe sa $(2-x)(2+x)$ i sređivanjem dobivamo sljedeći niz ekvivalentnih jednačbi:

$$\begin{aligned} (x-2a) \cdot (2-x) + (x+2a) \cdot (2+x) &= 4a & 1 \text{ bod} \\ 2x - x^2 - 4x + 2ax + 2x + x^2 + 4x + 2ax &= 4a \\ 4ax + 4x &= 4a \\ x(a+1) &= a. & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Za $a = -1$ dobivamo $0 = -1$, pa jednadžba nema rješenja. 1 bod

Za $a \neq -1$ je $x = \frac{a}{a+1}$.

Iz uvjeta $x \neq 2$ slijedi $a \neq -2$. 1 bod

Iz uvjeta $x \neq -2$ slijedi $a \neq -\frac{2}{3}$. 1 bod

Dakle, dana jednadžba nema rješenja za $a \in \left\{-2, -1, -\frac{2}{3}\right\}$. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Za realne brojeve a , b i c različite od nule vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Dokaži da je zbroj nekih dvaju od tih brojeva jednak nuli.

Rješenje.

Nakon množenja početne jednadžbe s $abc(a+b+c)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} bc(a+b+c) + ac(a+b+c) + ab(a+b+c) &= abc \\ abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc &= abc. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Nakon pogodnog grupiranja i izlučivanja slijedi:

$$c(a^2 + 2ab + b^2) + c^2(a+b) + ab(a+b) = 0 \quad 2 \text{ boda}$$

Izlučivanjem zajedničkog faktora $(a+b)$ dobivamo:

$$(a+b)(c(a+b) + c^2 + ab) = 0 \quad 2 \text{ boda}$$

Primijetimo da vrijedi

$$c(a+b) + c^2 + ab = ac + bc + c^2 + ab = a(b+c) + c(b+c) = (b+c)(a+c). \quad 2 \text{ boda}$$

Dakle, gornja jednakost se može zapisati kao

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Umnožak tri broja je jednak nuli ako je barem jedan od njih jednak nuli, što daje:

$$a+b=0 \quad \text{ili} \quad b+c=0 \quad \text{ili} \quad a+c=0.$$

i time je tvrdnja dokazana. 2 boda

Zadatak B-1.4.

U polja tablice s 18 redaka i 18 stupaca upisani su redom prirodni brojevi od 1 do 324 tako da su u prvom retku redom slijeva nadesno upisani brojevi $1, 2, 3, \dots, 18$, a u svakom sljedećem retku narednih 18 uzastopnih prirodnih brojeva. Unutar tablice odabran je kvadrat dimenzija 6×6 . Ako zbroj neka tri od četiriju brojeva u kutnim poljima tog kvadrata iznosi 616, odredi koji broj može biti u četvrtom kutnom polju tog kvadrata.

Rješenje.

Neka je x broj u donjem desnom kutu kvadrata dimenzija 6×6 .

Budući da svaki redak kvadrata sadrži 6 brojeva, broj u donjem lijevom kutu je $x - 5$.

U tablici se brojevi u istom stupcu povećavaju za 18 pri prijelazu u sljedeći redak. Kako je broj u donjem desnom kutu pet redaka ispod gornjeg desnog kuta, slijedi da je broj u gornjem desnom kutu jednak $x - 5 \cdot 18 = x - 90$.

1 bod

Broj u gornjem lijevom kutu je za 5 manji od broja u gornjem desnom kutu, pa je broj u gornjem lijevom kutu jednak $(x - 90) - 5 = x - 95$.

1 bod

Dakle, četiri kutna broja su $x, x - 5, x - 90$ i $x - 95$.

Zbroj tri od četiriju kutna broja iznosi 616 pa razlikujemo četiri slučaja.

U prvom slučaju je $(x - 5) + (x - 90) + (x - 95) = 616$, iz čega dobivamo $x = \frac{806}{3}$, što nije prirodan broj. Slučaj nije moguć.

1 bod

U drugom slučaju je $x + (x - 5) + (x - 95) = 616$, iz čega dobivamo $x = \frac{716}{3}$, što nije prirodan broj. Slučaj nije moguć.

1 bod

U trećem slučaju je $x + (x - 5) + (x - 90) = 616$, iz čega dobivamo $x = 237$. U tom slučaju broj u četvrtom kutnom polju jednak je $x - 95 = 142$.

1 bod

Broj 237 nalazi se u 14. retku i 3. stupcu tablice. Kvadrat širine 6 s donjim desnim kutom u 3. stupcu protezao bi se ulijevo izvan granica tablice 18×18 , pa taj položaj nije moguć.

2 boda

U četvrtom slučaju je $x + (x - 90) + (x - 95) = 616$, iz čega dobivamo $x = 267$. U tom slučaju broj u četvrtom kutnom polju jednak je $x - 5 = 262$.

1 bod

Broj 267 nalazi se u 15. retku i 15. stupcu tablice 18×18 . Kvadrat širine 6 s donjim desnim kutom u 15. stupcu proteže se ulijevo do 10. stupca, pa cijeli donji rub kvadrata ostaje unutar istoga retka. Broj u gornjem lijevom kutu kvadrata nalazi u 10. retku, pa je cijeli kvadrat dimenzija 6×6 smješten unutar tablice 18×18 .

2 boda

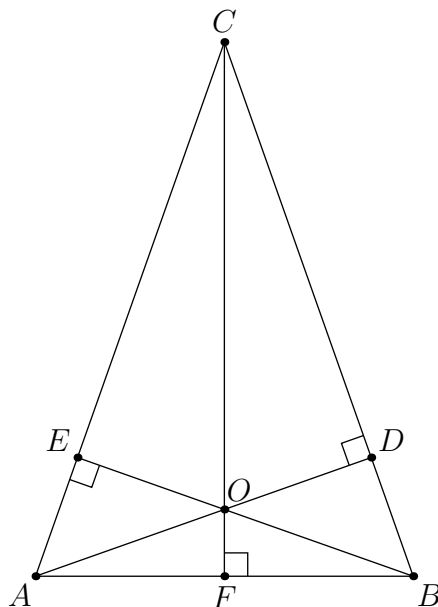
Dakle, jedino rješenje je 262.

Zadatak B-1.5.

U trokutu ABC vrijedi $|AB| = 6$ i $|AC| = |BC| = 9$. Odredi zbroj udaljenosti ortocentra tog trokuta od njegovih vrhova.

Prvo rješenje.

Neka je $|AB| = 6$ i $|AC| = 9$ te neka su sjecišta visina iz vrhova A, B, C na stranice $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ redom točke D, E, F . Sjecište visina je ortocentar. Neka je to točka O .



Budući da je trokut ABC jednakokračan, točka F je polovište dužine $\overline{AB}$. Stoga vrijedi $|AF| = |BF| = 3$.

Prema Pitagorinom poučku za trokut AFC dobivamo

$$|CF| = \sqrt{|AC|^2 - |AF|^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}.$$

Površina trokuta ABC iznosi

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CF|}{2} = 18\sqrt{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

S druge strane, vrijedi

$$P_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}.$$

Iz jednakosti površina slijedi

$$\begin{aligned} \frac{9 \cdot |AD|}{2} &= 18\sqrt{2} \\ |AD| &= 4\sqrt{2}. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Prema Pitagorinom poučku za trokut ABD dobivamo

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 - |AD|^2} = \sqrt{36 - 32} = 2. \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da je $|\angle ADB| = |\angle OFA| = 90^\circ$ i $\angle BAD = \angle FAO$ (zajednički kut), prema K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da je $\triangle ABD \sim \triangle AFO$.

1 bod

Stoga vrijedi

$$\frac{|BD|}{|OF|} = \frac{|AD|}{|AF|}$$

1 bod

$$\frac{2}{|OF|} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$|OF| = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

1 bod

Kako je $|OC| = |CF| - |OF|$ slijedi da je $|OC| = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{21\sqrt{2}}{4}$.

1 bod

Prema Pitagorinom poučku za trokut AFO dobivamo

$$|OA| = \sqrt{|AF|^2 + |OF|^2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

1 bod

Budući da je trokut ABO jednakokratan, vrijedi da je $|AO| = |BO| = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

1 bod

Konačno, zbroj udaljenosti ortocentra od vrhova trokuta jednak je

$$|OA| + |OB| + |OC| = \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{21\sqrt{2}}{4} = \frac{39\sqrt{2}}{4}.$$

1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju uvodimo oznake i pokazujemo da vrijedi

$$|CF| = \sqrt{|AC|^2 - |AF|^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}.$$

U trokutu AFO kut $\angle FAO$ je komplementaran kutu $\angle CBA$, pa vrijedi

$$|\angle FAO| = 90^\circ - |\angle CBA|.$$

Stoga vrijedi $\cos |\angle FAO| = \cos (90^\circ - |\angle CBA|) = \frac{|AF|}{|AO|}$,

1 bod

iz čega slijedi da je $|AO| = \frac{|AF|}{\cos (90^\circ - |\angle CBA|)}$.

Iz trokuta FBC zaključujemo da vrijedi

$$\sin |\angle CBA| = \frac{|CF|}{|BC|} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

1 bod

Budući da je $\cos (90^\circ - |\angle CBA|) = \sin |\angle CBA|$, dobivamo da je

$$|AO| = \frac{|AF|}{\sin |\angle CBA|} = \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

2 boda

Budući da je trokut ABO jednakokračan, vrijedi $|OA| = |OB| = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. 1 bod

Također vrijedi

$$\operatorname{tg} |\angle FAO| = \operatorname{tg} (90^\circ - |\angle CBA|) = \operatorname{ctg} |\angle CBA| = \frac{\cos |\angle CBA|}{\sin |\angle CBA|} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad 2 \text{ boda}$$

Sada iz $\operatorname{tg} (90^\circ - |\angle CBA|) = \frac{|FO|}{|AF|}$ dobivamo $|FO| = |AF| \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - |\angle CBA|) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. 1 bod

Budući da je $|CO| = |CF| - |FO|$, slijedi $|CO| = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{21\sqrt{2}}{4}$. 1 bod

Konačno, zbroj udaljenosti ortocentra od vrhova trokuta jednak je

$$|AO| + |BO| + |CO| = \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{21\sqrt{2}}{4} = \frac{39\sqrt{2}}{4}. \quad 1 \text{ bod}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Napiši neku kvadratnu jednadžbu kojoj su rješenja realni brojevi m i n takvi da vrijedi

$$\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} = 2 \quad \text{i} \quad m + n = 6 \left(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2} \right).$$

Rješenje.

Rješimo sustav i izračunajmo m i n .

Pomnožimo drugu jednadžbu s $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}$:

$$(m + n)(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}) = 6(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}). \quad 2 \text{ boda}$$

Množenjem i sređivanjem (ili primjenom formule za zbroj kubova) dobivamo

$$(m + n)(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}) = 6(m + n), \quad 2 \text{ boda}$$

te dijeljenjem s $m + n$ ($m + n \neq 0$ zbog prvog uvjeta u zadatku) slijedi

$$\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 6. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješavanjem sustava

$$\begin{cases} \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} = 2, \\ \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 6. \end{cases}$$

dobivamo

$$\sqrt[3]{m} = 4, \quad \sqrt[3]{n} = 2, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno

$$m = 64, \quad n = 8. \quad 1 \text{ bod}$$

Tražena kvadratna jednadžba glasi

$$a(x - 64)(x - 8) = 0, \quad \text{gdje je } a \neq 0, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno

$$a(x^2 - 72x + 512) = 0.$$

Napomena: Učenik može napisati jednadžbu sa bilo kojim realnim brojem $a \neq 0$.

Zadatak B-2.2.

U ovisnosti o realnom parametru a odredi u koliko se točaka sijeku grafovi funkcija

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x+a)(x+a+2)$$

i

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = a(x-2a)(x-2a+2) + 24x.$$

Rješenje.

Grafovi funkcija f i g se sijeku u točkama kojima apscisa x zadovoljava jednadžbu

$$a(x+a)(x+a+2) = a(x-2a)(x-2a+2) + 24x. \quad 1 \text{ bod}$$

Pojednostavljuvanjem se dobiva jednadžba $2a^2x - 8x = a^3 - 2a^2$. 2 boda

Zapišimo tu jednadžbu u obliku

$$2x(a-2)(a+2) = a^2(a-2). \quad 2 \text{ boda}$$

Za $a = 2$ jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa se grafovi funkcija f i g podudaraju. 2 boda

Za $a = -2$ jednadžba nema rješenja, pa se grafovi funkcija f i g ne sijeku. 2 boda

Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ jednadžba ima jedinstveno rješenje, pa se grafovi funkcija f i g sijeku u točno jednoj točki. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Odredi duljinu kružnoga luka $\widehat{CA}$ kružnice opisane trokutu ABC kojemu duljine stranica iznose

$$|AB| = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}, \quad |BC| = 2 \quad \text{ i } \quad |AC| = 2\sqrt{3} - 2.$$

Rješenje.

Označimo sa S središte i s R polumjer kružnice opisane trokutu ABC .

Neka je $\varphi = |\sphericalangle CSA|$ mjera kuta $\sphericalangle CSA$ izražena u stupnjevima.

Tada za duljinu kružnog luka $\widehat{CA}$ vrijedi $|\widehat{CA}| = R\pi \cdot \frac{\varphi}{180^\circ}$. 1 bod

Neka je $\beta = |\sphericalangle CBA|$. S obzirom da su $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle CSA$ obodni i središnji kut nad tetivom $\overline{AC}$, vrijedi $\varphi = 2\beta$. 1 bod

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABC vrijedi

$$(2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 + (3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cos \beta, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$\cos \beta = \frac{3 - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Iz $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ slijedi $\beta = 45^\circ$. 1 bod

Nadalje, vrijedi $2R = \frac{|AC|}{\sin \beta}$, 1 bod

iz čega slijedi

$$R = \frac{2\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}. \quad \text{2 boda}$$

Konačno, budući da je $\varphi = 2\beta = 90^\circ$, slijedi

$$|\widehat{CA}| = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \frac{\pi}{2}. \quad \text{1 bod}$$

Napomena: Duljina R polumjera opisane kružnice trokuta ABC može se izračunati i iz površine trokuta ABC , koju možemo računati, na primjer, Heronovom formulom. Taj dio rješenja nosi **3 boda**. Površina P trokuta ABC iznosi $P = 3 - \sqrt{3}$, što nosi **2 boda**. Nadalje, iz $P = \frac{abc}{4R}$ slijedi $R = \frac{4\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, što nosi još **1 bod**.

Zadatak B-2.4.

Odredi površinu mnogokuta koji je omeđen grafovima funkcija

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2$$

i

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = |x + 3| - |x - 2|.$$

Rješenje.

Funkciju f možemo zapisati u obliku

$$f(x) = \sqrt{(x - 3)^2} - 2 = |x - 3| - 2. \quad \text{1 bod}$$

Za funkciju f vrijedi:

$$x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) = -x + 3 - 2 = -x + 1,$$

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow f(x) = x - 3 - 2 = x - 5.$$

Funkciju f možemo zapisati u obliku

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 3, \\ x - 5, & x \geq 3. \end{cases} \quad \text{1 bod}$$

Za funkciju g vrijedi:

$$x \leq -3 \Rightarrow g(x) = -x - 3 + x - 2 = -5,$$

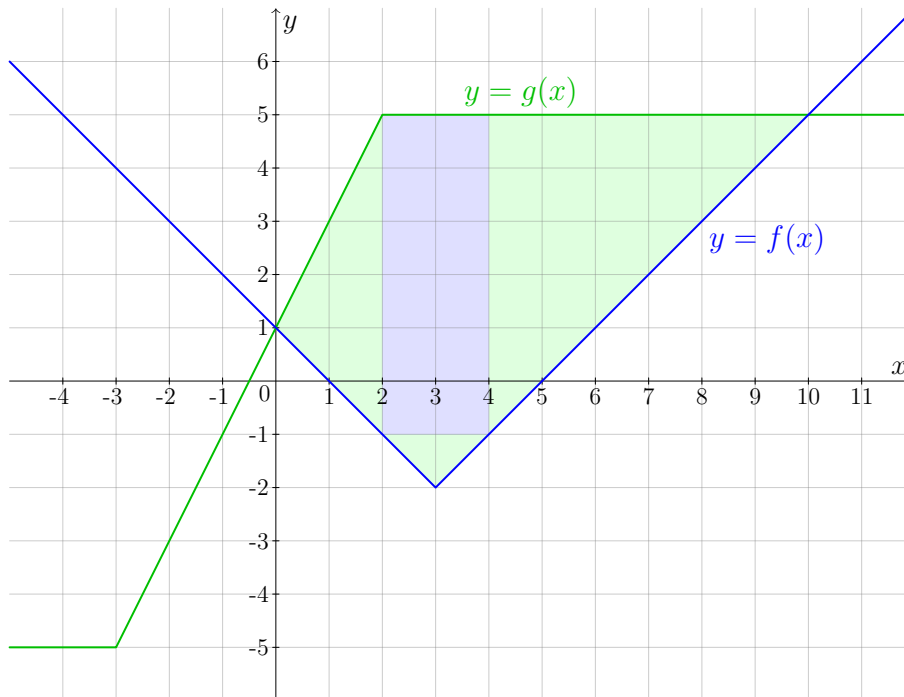
$$-3 < x < 2 \Rightarrow g(x) = x + 3 + x - 2 = 2x + 1,$$

$$x \geq 2 \Rightarrow g(x) = x + 3 - x + 2 = 5.$$

Funkciju g možemo zapisati u obliku

$$g(x) = \begin{cases} -5, & x \leq -3, \\ 2x + 1, & -3 < x < 2, \\ 5, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{2 boda}$$

Nacrtajmo grafove funkcija f i g .



Traženi mnogokut je četverokut kojem su dva vrha točke u kojima se sijeku grafovi funkcija f i g .

Jedno je sjecište točka za čije koordinate vrijedi $-3 < x < 2$, $x < 3$ i

$$\begin{cases} y = -x + 1, \\ y = 2x + 1, \end{cases}$$

i njene su koordinate $(0, 1)$.

1 bod

Drugo je sjecište točka za čije koordinate vrijedi $x \geq 3$, $x \geq 2$ i

$$\begin{cases} y = 5, \\ y = x - 5, \end{cases}$$

i njene su koordinate $(10, 5)$.

1 bod

Preostala su dva vrha mnogokuta točke s koordinatama $(2, 5)$, odnosno $(3, -2)$.

Površinu traženog četverokuta računamo rastavljanjem na pravokutnik te tri trokuta, kao na slici.

2 boda

Tražena površina iznosi

$$P = \frac{6 \cdot 2}{2} + 6 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{6 \cdot 6}{2} = 37.$$

2 boda

Napomena: Računanje površine moguće je drugačijim podjelama na trapeze i trokute, odnosno korištenjem formule za površinu trokuta kojem su dane koordinate vrhova.

Zadatak B-2.5.

Svaku stranicu i dijagonalu pravilnog osmerokuta treba obojiti plavom ili crvenom bojom. Na koliko se načina to može napraviti tako da se rotacijom osmerokuta za 90° oko njegovog središta dobije isti raspored boja?

Rješenje.

Neka je $ABCDEFGH$ zadani osmerokut i točka S njegovo središte.

U karakterističnom trokutu ABS toga mnogokuta mjera kuta pri vrhu S iznosi $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, pa je kut koji zatvaraju dužine $\overline{AS}$ i $\overline{CS}$ pravi.

1 bod

Pri rotaciji osmerokuta za 90° oko točke S u pozitivnom smjeru vrhovi mnogokuta preslikavaju se na sljedeći način:

$$A \mapsto C \mapsto E \mapsto G \mapsto A, \quad B \mapsto D \mapsto F \mapsto H \mapsto B.$$

Stranice osmerokuta preslikavaju se na sljedeći način:

- $\overline{AB} \mapsto \overline{CD} \mapsto \overline{EF} \mapsto \overline{GH} \mapsto \overline{AB}$ i te stranice trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{BC} \mapsto \overline{DE} \mapsto \overline{FG} \mapsto \overline{HA} \mapsto \overline{BC}$ i te stranice trebaju biti obojane istom bojom. 1 bod

Nadalje, dijagonale se preslikavaju na sljedeći način:

- $\overline{AC} \mapsto \overline{CE} \mapsto \overline{EG} \mapsto \overline{GA} \mapsto \overline{AC}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{AD} \mapsto \overline{CF} \mapsto \overline{EH} \mapsto \overline{GB} \mapsto \overline{AD}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{AE} \mapsto \overline{GC} \mapsto \overline{AE}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{AF} \mapsto \overline{CH} \mapsto \overline{BE} \mapsto \overline{GD} \mapsto \overline{AF}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{BD} \mapsto \overline{DF} \mapsto \overline{FH} \mapsto \overline{BH} \mapsto \overline{BD}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom, 1 bod
- $\overline{BF} \mapsto \overline{DH} \mapsto \overline{BF}$ i te dužine trebaju biti obojane istom bojom. 1 bod

Za svaku od navedenih skupina dužina možemo odabrati jednu od dvije boje, crvenu ili plavu. Zato je ukupan broj odabira za stranice i dijagonale

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256. \quad 1 \text{ bod}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredi umnožak svih realnih rješenja jednadžbe $x^2 - \sqrt{2026} \cdot x^{\log_{2026} x} = 0$.

Rješenje.

Iz definicije logaritamske funkcije slijedi $x > 0$.

Zapišemo li zadanu jednadžbu u obliku $x^2 = \sqrt{2026} \cdot x^{\log_{2026} x}$ te je logaritmiramo po bazi 2026, dobivamo jednadžbu

$$\log_{2026} (x^2) = \log_{2026} (\sqrt{2026} \cdot x^{\log_{2026} x}). \quad 1 \text{ bod}$$

Nadalje, primijenimo li svojstva logaritamske funkcije dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\log_{2026} (x^2) = \log_{2026} (\sqrt{2026}) + \log_{2026} (x^{\log_{2026} x}) \quad 1 \text{ bod}$$

$$2 \log_{2026} x = \frac{1}{2} + \log_{2026} x \cdot \log_{2026} x \quad 3 \text{ boda}$$

$$(\log_{2026} x)^2 - 2 \log_{2026} x + \frac{1}{2} = 0 \quad 1 \text{ bod}$$

Uvođenjem supstitucije $\log_{2026} x = t$ jednadžba $(\log_{2026} x)^2 - 2 \log_{2026} x + \frac{1}{2} = 0$ se svodi na kvadratnu jednadžbu $t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$.

Rješenja kvadratne jednadžbe jesu $t_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod

Iz $\log_{2026} x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ slijedi $x_1 = 2026^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ i $x_2 = 2026^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$. 1 bod

Konačno, umnožak rješenja jednak je $x_1 \cdot x_2 = 2026^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 2026^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2026^2$. 2 boda

Napomena: Rješenja t_1 i t_2 , odnosno x_1 i x_2 nije potrebno računati. Budući da vrijedi

$$x_1 \cdot x_2 = 2026^{t_1} \cdot 2026^{t_2} = 2026^{t_1+t_2},$$

dovoljno je odrediti $t_1 + t_2$. Taj zaključak nosi 2 boda. Primjenom Vièteovih formula znamo da za rješenja jednadžbe $t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$ vrijedi $t_1 + t_2 = 2$, tj. $x_1 \cdot x_2 = 2026^2$, što nosi također 2 boda. Nije nužno uvođenje supstitucije.

Zadatak B-3.2.

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju točno dvije različite znamenke?

Prvo rješenje.

Razmotrimo dva slučaja.

Prvo odredimo broj peteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno dvije različite znamenke od kojih niti jedna znamenka nije znamenka nula. Dvije različite znamenke a i b od kojih niti jedna znamenka nije nula možemo odabrati na $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ načina.

1 bod

Peteroznamenkastih brojeva zapisanih pomoću znamenaka a i b ima 2^5 .

1 bod

Među tih 2^5 brojeva zapisanih pomoću znamenaka a i b nalaze se i brojevi zapisani s točno jednom znamenkom, tj. brojevi $\overline{aaaaa}$ i $\overline{bbbbb}$, koje trebamo izbaciti. Dakle, peteroznamenkastih brojeva koji sadrže i znamenku a i znamenku b ima $2^5 - 2$.

2 boda

Stoga različitih peteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno dvije različite znamenke od kojih niti jedna nije jednaka nula ima $36 \cdot (2^5 - 2) = 36 \cdot 30 = 1080$.

1 bod

Odredimo sada broj peteroznamenkastih brojeva koji su zapisani pomoću dvije različite znamenke od kojih je jedna jednaka nula. Tada drugu znamenku a , različitu od nule, možemo odabrati na 9 načina.

1 bod

Peteroznamenkastih brojeva su zapisani pomoću znamenke a i nule ima $2^4 = 16$. U tih 16 brojeva ubrojen je i broj $\overline{aaaaa}$. Stoga peteroznamenkastih brojeva koji su zapisani pomoću znamenke a i znamenke 0 ima $2^4 - 1$.

2 boda

Dakle, različitih peteroznamenkastih brojeva koji su zapisani pomoću točno dvije različite znamenke od kojih je jedna jednaka nula ima $9 \cdot (2^4 - 1) = 135$.

1 bod

Konačno, peteroznamenkastih brojeva koji su zapisani pomoću točno dvije različite znamenke ima $1080 + 135 = 1215$.

1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a i b znamenke koje se pojavljuju u zapisu broja, te neka je a vodeća znamenka.

Ako broj sadrži četiri znamenke a i jednu znamenku b , tada imamo 4 mogućnosti: $\overline{abaaa}$, $\overline{aaba}$, $\overline{aaaba}$, $\overline{aaaab}$.

1 bod

Ako broj sadrži tri znamenke a i dvije znamenke b , tada imamo 6 mogućnosti: $\overline{abbaa}$, $\overline{ababa}$, $\overline{abaab}$, $\overline{aabba}$, $\overline{aaba}$, $\overline{aaabb}$.

1 bod

Ako broj sadrži dvije znamenke a i tri znamenke b , tada imamo 4 mogućnosti: $\overline{abbbb}$, $\overline{ababb}$, $\overline{abbab}$, $\overline{abba}$.

1 bod

Ako broj sadrži jednu znamenku a i četiri znamenke b , tada je samo jedna mogućnost $\overline{abbbb}$.

1 bod

Dakle, imamo $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ mogućih rasporeda znamenaka a i b .

1 bod

Za svaki od tih rasporeda znamenku a možemo odabrati na 9 načina (to može biti bilo koja znamenka osim nule).

2 boda

Također i znamenku b možemo odabrati na 9 načina (to može biti bilo koja znamenka osim znamenke a).

2 boda

Stoga je broj svih peteroznamenkastih brojeva koji imaju točno dvije različite znamenke jednak $15 \cdot 9 \cdot 9 = 1215$.

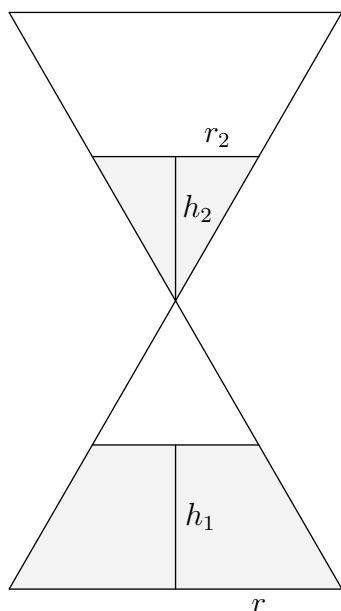
1 bod

Zadatak B-3.3.

Pješčani sat sastoji se od dva sukladna uspravna stošca sa zajedničkim vrhom spojena tako da pijesak prolazi kroz vrh iz jednog dijela u drugi. Pijesak zauzima točno polovinu ukupnog volumena pješčanog sata, a da bi sav pijesak iscurio iz gornjeg dijela sata u donji, potrebno je 125 sekundi. Kada je sav pijesak u gornjem dijelu sata pustimo ga da curi. Koliki će biti omjer visina pijeska u donjem i gornjem dijelu sata nakon 98 sekundi?



Rješenje.



Neka je h visina jednog od dva dijela pješčanog sata. Neka su h_1 i h_2 redom visine pijeska u donjem i gornjem dijelu sata nakon 98 sekundi.

Neka je r polumjer baze jednog dijela pješčanog sata, a r_2 polumjer baze stošca kojeg čini pijesak u gornjem dijelu sata nakon 98 sekundi, kao na slici. Poprečni presjeci tih dvaju stožaca su slični, pa vrijedi $r_2 : r = h_2 : h$.

3 boda

Dio pijeska koji se nalazi u donjem i dio pijeska koji se nalazi u gornjem dijelu sata zajedno čine čitav jedan stožac, tj. neispunjeni dio donjeg stošca sukladan je ispunjenom dijelu gornjeg stošca. Stoga vrijedi $h = h_1 + h_2$.

2 boda

Dio pijeska u gornjem stošcu će iscuriti za preostalih 27 sekundi, a budući da se obujam stošca jednoliko smanjuje tijekom vremena, zaključujemo da je omjer obujma pijeska u gornjem stošcu i obujma ukupnog pijeska jednak $27 : 125$.

2 boda

Obujam ukupnog pijeska je $\frac{1}{3}r^2\pi h$, a obujam pijeska u gornjem dijelu je $\frac{1}{3}r_2^2\pi h_2$.

Dakle, vrijedi $27 : 125 = \frac{1}{3}r_2^2\pi h_2 : \frac{1}{3}r^2\pi h = h_2^3 : h^3$, iz čega slijedi $h_2 = \frac{3}{5}h$.

2 boda

Budući da je $h = h_1 + h_2$, dobivamo da je $h_1 : h_2 = 2 : 3$.

1 bod

Zadatak B-3.4.

Ako su x , y i z realni brojevi takvi da vrijedi

$$\operatorname{tg} x = 2 \cos y, \quad \operatorname{tg} y = 3 \cos z \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} z = 7 \cos x,$$

odredi $\cos 2x$.

Rješenje.

Zapišemo li tangens kao omjer sinusa i kosinusa te kvadriramo zadane izraze, dobivamo sljedeći niz jednakosti

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 4 \cos^2 y, \quad \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = 9 \cos^2 z, \quad \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = 49 \cos^2 x. \quad 2 \text{ boda}$$

Koristeći osnovnu relaciju među trigonometrijskim funkcijama $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, zamijenimo u dobivenim jednadžbama funkciju sinus funkcijom kosinus

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 4 \cos^2 y, \quad \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = 9 \cos^2 z, \quad \frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z} = 49 \cos^2 x. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvedemo li supstitucije $\cos^2 x = a$, $\cos^2 y = b$ i $\cos^2 z = c$ zadatak svodimo na rješavanje sljedećeg sustava jednadžbi

$$\frac{1 - a}{a} = 4b, \quad \frac{1 - b}{b} = 9c, \quad \frac{1 - c}{c} = 49a.$$

Budući da trebamo odrediti realan broj a eliminirajmo nepoznanice b i c . Izrazimo li iz treće jednadžbe $c = \frac{1}{49a + 1}$, te uvrstimo u drugu dobivamo $\frac{1 - b}{b} = \frac{9}{49a + 1}$. 2 boda

Nadalje, izrazimo li iz dobivene jednadžbe $b = \frac{49a + 1}{49a + 10}$, i uvrstimo u prvu jednadžbu dobivamo jednadžbu $\frac{1 - a}{a} = \frac{4(49a + 1)}{49a + 10}$, 1 bod

koja se sređivanjem svodi na kvadratnu jednadžbu $49a^2 - 7a - 2 = 0$. 1 bod

Jedino pozitivno rješenje te jednadžbe je $a = \frac{2}{7}$, pa zaključujemo da je $\cos^2 x = \frac{2}{7}$. 1 bod

Budući da je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$, 1 bod

dobivamo $\cos 2x = 2 \cdot \frac{2}{7} - 1 = -\frac{3}{7}$. 1 bod

Napomena: Budući da je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$, sve tri zadane jednakosti možemo zapisati i pomoću funkcije sinus pri čemu dobivamo sljedeći sustav

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 4 - 4 \sin^2 y, \quad \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} = 9 - 9 \sin^2 z, \quad \frac{\sin^2 z}{1 - \sin^2 z} = 49 - 49 \sin^2 x.$$

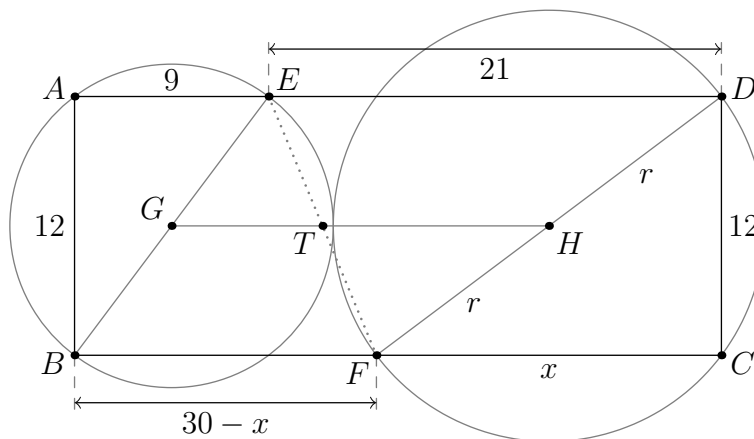
Eliminacijom $\sin^2 y$ i $\sin^2 z$ dobivamo jednadžbu $49 \sin^4 x - 91 \sin^2 x + 40 = 0$, čija rješenja su $\frac{5}{7}$ i $\frac{8}{7}$. Budući da je $\sin x < 1$, zaključujemo $\sin^2 x = \frac{5}{7}$ i $\cos 2x = -\frac{3}{7}$. Pojedini zaključci vrednuju se analogno kao i u ponuđenom rješenju.

Zadatak B-3.5.

Neka je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = 12$ i $|BC| = 30$. Točka E nalazi se na stranici $\overline{AD}$, a točka F na stranici $\overline{BC}$ tako da se kružnice opisane trokutima ABE i CDF dodiruju. Ako je $|AE| = 9$, odredi duljinu dužine $\overline{CF}$.

Prvo rješenje.

Neka je G središte kružnice opisane trokutima ABE , H središte kružnice opisane trokutima CDF , te neka je točka T sjecište dužina $\overline{GH}$ i $\overline{EF}$. Duljinu dužine $\overline{CF}$ označimo s x .



Budući da su trokuti ABE i CDF pravokutni, hipotenuza $\overline{BE}$ je promjer kružnice opisane trokutima ABE , a hipotenuza $\overline{FD}$ promjer je kružnice opisane trokutima CDF . 1 bod

Iz pravokutnog trokuta ABE primjenom Pitagorina poučka dobivamo

$$|BE| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15. \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno, iz pravokutnog trokuta CDF slijedi $2r = |FD| = \sqrt{12^2 + x^2}$. 1 bod

Budući da se kružnice opisane trokutima ABE i CDF dodiruju izvana, zbroj njihovih polumjera jednak je udaljenosti njihovih središta, tj. vrijedi $|GH| = 7.5 + r$. 1 bod

Kako je dužina $\overline{GT}$ srednjica trokuta BFE , a dužina $\overline{TH}$ srednjica trokuta DEF , prema poučku o srednjici trokuta slijedi

$$|GT| = \frac{1}{2} \cdot |BF| = \frac{30-x}{2} \quad \text{i} \quad |TH| = \frac{1}{2} |DE| = \frac{21}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Iz jednakosti $|GT| + |TH| = |GH| = 7.5 + r$ dobivamo jednadžbu

$$\frac{30-x}{2} + \frac{21}{2} = 7.5 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + x^2}, \quad 1 \text{ bod}$$

koja se sređivanjem svodi na jednadžbu

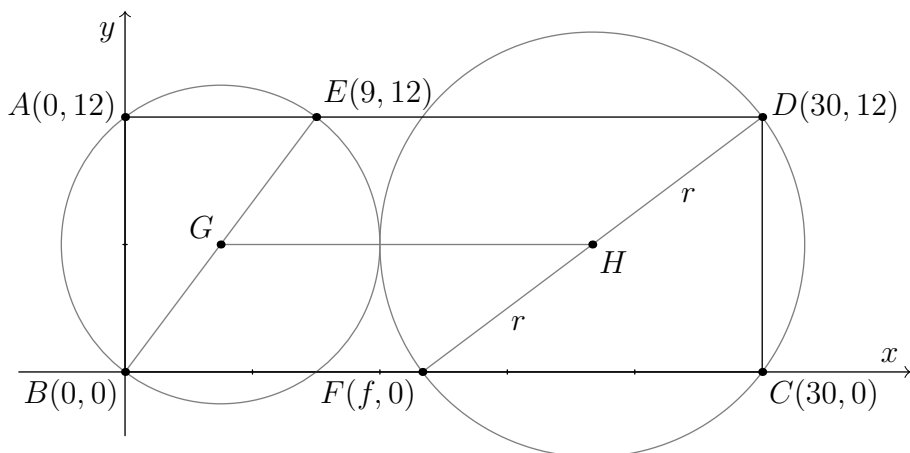
$$36 - x = \sqrt{144 + x^2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Kvadriranjem dobivamo jednadžbu $(36-x)^2 = 144 + x^2$, čije je jedino rješenje $x = 16$. 1 bod

Rješenje zadovoljava jednadžbu $36 - x = \sqrt{144 + x^2}$, pa vrijedi $|CF| = 16$. 1 bod

Drugo rješenje.

Smjestimo pravokutnik $ABCD$ u koordinatni sustav kao na slici. Neka je G središte kružnice opisane trokut ABE , te H središte kružnice opisane trokut CDF .



Koordinate vrhova pravokutnika i istaknutih točaka su $A(0,12)$, $B(0,0)$, $C(30,0)$, $D(30,12)$, $E(9,12)$, $F(f,0)$.

1 bod

Središte trokut ABE opisane kružnice je polovište hipotenuze $\overline{BE}$, pa su koordinate točke $G\left(\frac{9}{2}, 6\right)$.

1 bod

Analogno, središte trokut CDF opisane kružnice je polovište hipotenuze $\overline{DF}$, pa su koordinate točke $H\left(\frac{30+f}{2}, 6\right)$.

1 bod

Iz pravokutnog trokuta ABE primjenom Pitagorina poučka dobivamo

$$|BE| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

1 bod

Analogno, iz pravokutnog trokuta CDF slijedi $2r = |FD| = \sqrt{12^2 + (30-f)^2}$.

1 bod

Budući da se kružnice opisane trokutima ABE i CDF dodiruju izvana, udaljenost između njihovih središta jednaka je zbroju njihovih polumjera, tj. vrijedi

$$|GH| = \frac{15}{2} + r.$$

1 bod

S druge strane, udaljenost između točaka G i H jednaka je razlici njihovih apscisa, tj. vrijedi

$$|GH| = \frac{30+f}{2} - \frac{9}{2} = \frac{21+f}{2}.$$

1 bod

Izjednačavanjem izraza za $|GH|$ i uvrštavanjem izraza za r , dobivamo jednadžbu

$$\frac{21+f}{2} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + (30-f)^2}.$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu $6+f = \sqrt{144 + (30-f)^2}$.

1 bod

Kvadriranjem dobivamo $(6+f)^2 = 144 + (30-f)^2$, čije je jedino rješenje $f = 14$.

1 bod

To rješenje zadovoljava $6+f = \sqrt{144 + (30-f)^2}$, pa je $|CF| = 30 - 14 = 16$.

1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Odredi prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\log_{6-x}(x^2 + 3x - 10)}.$$

Rješenje.

Izraz pod korijenom treba biti nenegativan, tj. treba vrijediti $x^2 - 16 \geq 0$,

što vrijedi za $x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup [4, +\infty)$. 1 bod

Argument logaritamske funkcije treba biti pozitivan, tj. treba vrijediti $x^2 + 3x - 10 > 0$, 1 bod

što vrijedi za $x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$. 1 bod

Baza logaritma treba biti pozitivan broj različit od 1, tj. treba vrijediti $6 - x > 0$ i $6 - x \neq 1$, odnosno $x \in \langle -\infty, 6 \rangle \setminus \{5\}$. 1 bod

Nazivnik treba biti različit od 0, pa mora vrijediti $\log_{6-x}(x^2 + 3x - 10) \neq 0$. 1 bod

Dakle, treba vrijediti $x^2 + 3x - 10 \neq 1$, odnosno $x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}$. 1 bod

Budući da svi uvjeti moraju vrijediti zaključujemo da je prirodna domena funkcije f presjek sva tri navedena skupa iz kojeg trebamo isključiti $\frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}$. 1 bod

Vrijedi $\frac{-3 + \sqrt{53}}{2} \notin \langle -\infty, -4 \rangle \cup [4, +\infty)$, pa moramo isključiti samo broj $\frac{-3 - \sqrt{53}}{2}$ koji je manji od -5 . 1 bod

Konačno, tražena prirodna domena funkcije f je

$$D_f = (\langle -\infty, -5 \rangle \cup [4, 6)) \setminus \left\{ \frac{-3 - \sqrt{53}}{2}, 5 \right\}. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-4.2.

Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = n^2 x_n.$$

Ako je $x_1 = 1013$, koliko je x_{2026} ?

Prvo rješenje.

Iz $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = n^2 x_n$ slijedi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = n^2 x_n - x_n = (n^2 - 1)x_n. \quad 1 \text{ bod}$$

Primijenimo li $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} = (n-1)^2 x_{n-1}$, zaključujemo da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$(n-1)^2 x_{n-1} = (n^2 - 1)x_n. \quad 2 \text{ boda}$$

Dijeljenjem sa $n^2 - 1$ (što je različito od 0 jer je $n \geq 2$) dobivamo

$$x_n = \frac{(n-1)^2}{n^2 - 1} x_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} x_{n-1}. \quad 2 \text{ boda}$$

Slijedi

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} x_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} x_{n-2} = \dots = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} x_1 = \frac{2}{(n+1)n} x_1. \quad 4 \text{ boda}$$

Traženi član iznosi

$$x_{2026} = \frac{2}{2027 \cdot 2026} \cdot 1013 = \frac{1}{2027}. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Iz $x_1 + x_2 = 2^2 \cdot x_2$ slijedi da je $x_2 = \frac{1}{3} x_1$, a iz $x_1 + x_2 + x_3 = 3^2 \cdot x_3$ da je $x_3 = \frac{1}{6} x_1$.

Slično dobivamo $x_4 = \frac{1}{10} x_1$, $x_5 = \frac{1}{15} x_1$, $x_6 = \frac{1}{21} x_1$, itd.

Na temelju ovih formula postavljamo hipotezu da općenito vrijedi

$$x_n = \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} x_1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad 2 \text{ boda}$$

Budući da je $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, hipoteza glasi $x_n = \frac{2x_1}{n(n+1)}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Tvrđnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Baza indukcije za $n = 1$ očito vrijedi.

Neka je $k \geq 2$ prirodni broj i pretpostavimo da tvrdnja $x_n = \frac{2x_1}{n(n+1)}$ vrijedi za sve prirodne brojeve $n < k$. 1 bod

Tada iz $x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k = k^2 x_k$ dobivamo

$$\begin{aligned}(k^2 - 1)x_k &= x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \\ &= x_1 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_1 + \dots + \frac{1}{k(k-1)}x_1 \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x_1 + \dots + 2 \cdot \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)x_1 & 3 \text{ boda} \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_1 = 2 \cdot \frac{k-1}{k}x_1, & 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

pri čemu smo prvo iskoristili pretpostavku indukcije, a nakon toga jednakost

$$\frac{2}{m(m+1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m}\right) \quad \text{za } m = 1, 2, \dots, k-1.$$

Slijedi

$$x_k = 2 \cdot \frac{k-1}{k(k^2-1)}x_1 = 2 \cdot \frac{k-1}{k(k-1)(k+1)}x_1 = \frac{2x_1}{k(k+1)}, \quad 1 \text{ bod}$$

čime smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n = k$. Time je dokaz indukcijom završen.

Uvrštavanjem $n = 2026$ i $x_1 = 1013$, slijedi

$$x_{2026} = \frac{2}{2027 \cdot 2026} \cdot 1013 = \frac{1}{2027}. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Moguće je kombinirati oba prikazana pristupa. Ako učenik pokaže jednakost $(n-1)^2 x_{n-1} = (n^2-1)x_n$, što nosi **3 boda**, i postavi hipotezu $x_n = \frac{2}{n(n+1)}$, što nosi također **3 boda**, tada je dokaz hipoteze indukcijom jednostavniji i nosi **3 boda**, pri čemu se zapis baze i pretpostavke ne boduje. Za izračunavanje $x_{2026} = \frac{1}{2027}$ se dodjeljuje **1 bod** kao u prikaznim rješenjima.

Zadatak B-4.3.

Odredi pozitivan realni broj a takav da u razvoju binoma $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ po potencijama od x koeficijent uz x^6 bude za 52 veći od koeficijenta uz x^{-9} .

Rješenje.

Razvoj binoma $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ po potencijama od x glasi

$$\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (ax)^{6-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k. \quad 1 \text{ bod}$$

Potencija x^6 se postiže za $x^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = x^6$. 1 bod

Tada je $6 - k - 2k = 6$, odnosno $k = 0$. 1 bod

Stoga je koeficijent uz x^6 jednak $\binom{6}{0} a^{6-0} = a^6$. 1 bod

Potencija x^{-9} se postiže za $x^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = x^{-9}$. 1 bod

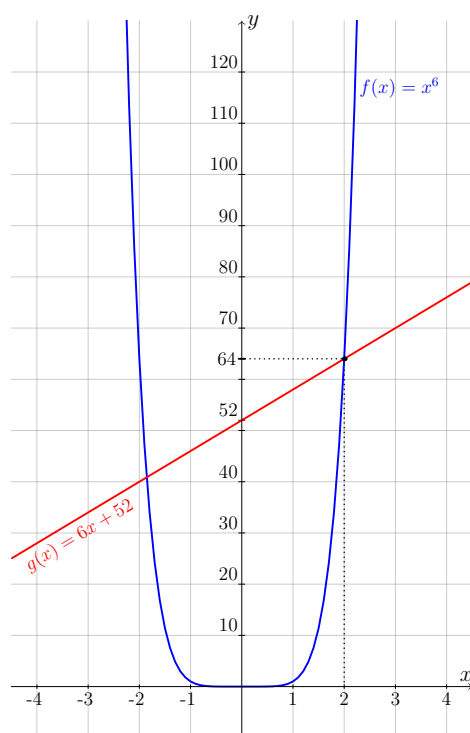
Tada je $6 - k - 2k = -9$, tj. $k = 5$. 1 bod

Stoga je koeficijent uz x^{-9} jednak $\binom{6}{5} a^{6-5} = 6a$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka vrijedi $a^6 = 6a + 52$.

Jedno rješenje ove jednadžbe je $a = 2$. 1 bod

Ako se nacrtaju grafovi funkcija $f(x) = x^6$ i $g(x) = 6x + 52$ vidimo da se sijeku samo u jednoj točki za $x > 0$, stoga je $a = 2$ jedino pozitivno rješenje. 2 boda



Napomena: Ako se binom razvije kao

$$\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (ax)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k},$$

tada se x^6 postiže za $k = 6$, a x^{-9} za $k = 1$.

Jedinstvenost rješenja $a = 2$ jednadžbe $a^6 = 6a + 52$ može se pokazati i algebarski.

Za $0 < a < 2$ vrijedi

$$a^6 = a^5 \cdot a < 32a = 6a + 26a < 6a + 52,$$

a za $a > 2$ vrijedi

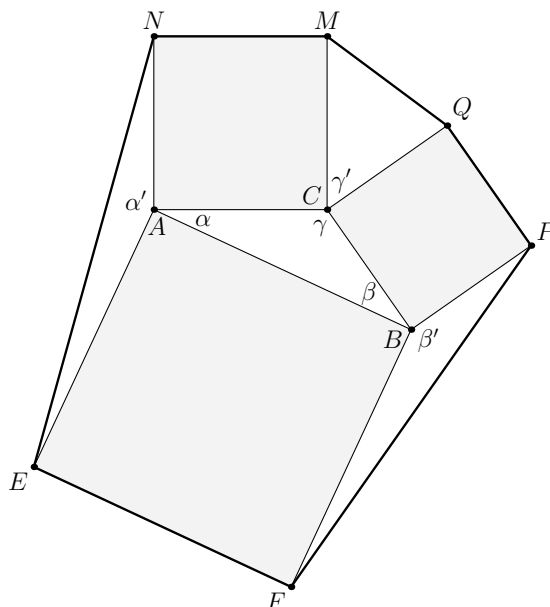
$$a^6 = a^5 \cdot a > 32a = 6a + 26a > 6a + 52.$$

Zadatak B-4.4.

Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $BAEF$, $CBPQ$ i $ACMN$. Ako vrijedi $|BC| = 6$, $|AC| = 5$ i kut $|\angle ACB| = 135^\circ$, kolika je površina šesterokuta $EFPQMN$?

Rješenje.

Neka su α , β i γ redom mjere unutranjih kutova trokuta ABC pri vrhovima A , B i C , te neka je $\alpha' = |\angle NAE|$, $\beta' = |\angle FBP|$ i $\gamma' = |\angle QCM|$.



Vrijedi

$$\alpha' = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$$

i analogno

$$\beta' = 180^\circ - \beta, \quad \gamma' = 180^\circ - \gamma. \quad 1 \text{ bod}$$

Površina trokuta ABC se može izraziti na sljedeće načine:

$$P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi

$$P_{BFP} = \frac{ac \sin \beta'}{2} = \frac{ac \sin(180^\circ - \beta)}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = P, \quad 1 \text{ bod}$$

i analogno

$$P_{MCQ} = \frac{ab \sin \gamma'}{2} = P, \quad P_{EAN} = \frac{bc \sin \alpha'}{2} = P. \quad 2 \text{ boda}$$

$$\text{Vrijedi } P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Prema poučku o kosinusu vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 6^2 + 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 61 + 30\sqrt{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Površina šesterokuta $EFPQMN$ iznosi

$$P_s = 4P + a^2 + b^2 + c^2 \quad 1 \text{ bod}$$

$$= 4 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} + 36 + 25 + 61 + 30\sqrt{2}$$

$$= 122 + 60\sqrt{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-4.5.

Na koliko načina šest parova može sjesti u jedan red kazališta koji ima 20 mjesta, ako svaki par želi sjediti zajedno?

Rješenje.

Svaki par zauzima dva mjesta; nazovimo ih *blok mjesta*.

Kad svi parovi sjednu bit će popunjeno šest blok mjesta i osam mjesta će ostati prazno. Stoga ćemo promatrati kao da na raspolaganju imamo 14 mjesta. 2 boda

Blok mjesta se mogu odabrati na $\binom{14}{6}$ načina. 2 boda

Kad se odaberu blok mjesta šest parova se može rasporediti na $6!$ načina. 2 boda

Svaki par se može smjestiti na odabrano blok mjesto na 2 načina, što za šest parova daje ukupno 2^6 mogućnosti. 2 boda

Ukupni broj traženih razmještaja iznosi $\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^6$. 2 boda

Napomena: Umjesto da promatra na koliko načina se mogu odabrati blok mjesta, učenik može promatrati broj načina odabira praznih mjesta koji je jednak $\binom{14}{8}$.

Nadalje, umjesto zasebnog biranja blok mjesta i raspoređivanja parova na ta mjesta, može se redom raspoređivati parove na $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \binom{14}{6} \cdot 6!$ načina, što nosi 4 boda.

Učenik može, ali ne mora izračunati pripadne vrijednosti:

$$\binom{14}{6} = \binom{14}{8} = 3003, \quad 6! = 720, \quad 2^6 = 64,$$

$$\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^6 = 138\,378\,240.$$