

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-1.1.

Ante i Matea treniraju plivanje. Na jednom od zajedničkih treninga istovremeno su krenuli sa suprotnih strana bazena. Do trenutka kad su se prvi puta istovremeno našli na istom rubu bazena, zajedno su preplivali devet duljina bazena. Od tada do sljedećeg trenutka kad su se ponovno našli istovremeno na istom rubu bazena zajedno su preplivali dodatnih 855 metara. Ako oboje plivaju stalnim brzinama, kolika je duljina bazena u kojem treniraju?

Prvo rješenje.

Označimo s l duljinu bazena u metrima, v_A brzinu u metrima po sekundi kojom pliva Ante, a v_M brzinu u metrima po sekundi kojom pliva Matea. Neka se prvi susret dogodio T sekundi od početka treninga. Prijedeni put jednak je umnošku brzine i trajanja plivanja pa vrijedi

$$T \cdot v_A + T \cdot v_M = 9 \cdot l. \quad (1) \quad 2 \text{ boda}$$

Nakon T sekundi plivanja Ante i Matea kreću plivati od iste strane bazena u istom smjeru. Nakon tih T sekundi plivanja ponovno će se naći na suprotnim stranama bazena. 2 boda

Nakon još T sekundi po drugi puta će se naći na istoj strani bazena. 2 boda

Kako su od prvog do drugog susreta zajedno preplivali točno 855 metara u $2T$ sekundi, mora vrijediti

$$2T \cdot v_A + 2T \cdot v_M = 855. \quad (2) \quad 2 \text{ boda}$$

Konačno iz (1) i (2) slijedi da je $2 \cdot 9l = 855$, tj. $l = 47.5$. 2 boda

Dakle, bazen je dugačak 47.5 metara.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je oboje plivača do prvog trenutka kada su se našli na istom rubu bazena preplivalo cijeli broj duljina bazen. Budući da su zajedno preplivali neparan broj duljina bazen, jedan plivač je preplivao paran, a drugi neparan broj duljina bazena. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je Matea preplivala parno duljina bazena. S T označimo vrijeme u sekundama proteklo od početka do tog prvog susreta, s l duljinu bazena u metrima te s v_A i v_M označimo redom Antinu i Mateinu brzinu plivanja, izraženu u m/s .

U slučaju kada je Matea preplivala 2 duljine bazena, Ante je preplivao 7. Vidimo da je

$$\frac{2l}{v_M} = T = \frac{7l}{v_A},$$

odnosno $v_A = \frac{7}{2} \cdot v_M$. Do prvog sljedećeg trenutka kada su se oboje istovremeno našli na istom rubu bazena je Matea preplivala 4 duljine bazena, a Ante 14, odnosno ukupno su zajedno preplivali 18 duljina bazena.

2 boda

Analogno se u slučajima kada je Matea preplivala 4 odnosno 8 duljina bazen pokaže da su do drugog susreta preplivali dodatnih 18 duljina bazena.

2 boda

U slučaju kada je Matea preplivala 6 duljina bazena, Ante je preplivao 3. Vidimo da je

$$\frac{6l}{v_M} = T = \frac{3l}{v_A},$$

odnosno $v_A = \frac{1}{2} \cdot v_M$. Primijetimo da je ovo u suprotnosti sa pretpostavkom da su se prvi put našli na istom rubu bazena nakon ukupno otplivanih 9 duljina bazena, jer nakon što je Ante otplivao jednu duljinu bazena Matea ih je otplivala točno dvije i oni se u tom trenutku nalaze na istom rubu bazena.

3 boda

U svakom (mogućem) slučaju vidimo da su od prvog susreta na istom rubu bazena do sljedećeg otplivali ukupno 18 duljina bazena.

Stoga je $18l = 855$, odnosno $l = 47.5$.

2 boda

Zaključujemo da je bazen dugačak 47.5 metara.

Napomena: Analiza slučajeva kada je Matea do prvog susreta preplivala 2, 4 odnosno 8 duljina bazena ukupno nosi 4 boda.

Ako učenici analiziraju jedan (bilo koji) od tih slučajeva, trebaju dobiti 2 boda te za svaki od preostalih po još 1 bod.

Zadatak A-1.2.

Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi $a^2 = bc + 1$ i $b^2 = ac + 1$.

Rješenje.

Oduzimanjem dviju jednadžbi dobivamo

$$a^2 - b^2 = bc - ac,$$

odnosno

$$(a - b)(a + b + c) = 0.$$

2 boda

Ova jednakost vrijedi samo ako je $a - b = 0$ ili $a + b + c = 0$.

Ako je $a - b = 0$, odnosno $a = b$, iz prve jednadžbe znamo da je $1 = a^2 - bc = a(a - c)$.

1 bod

Kako je umnožak dvaju cijelih brojeva jednak 1 ako i samo ako su oba faktora jednaki 1 ili -1 , jedina cjelobrojna rješenja su $b = a = \pm 1$, $c = 0$.

1 bod

Ako je $a + b + c = 0$, odnosno $c = -a - b$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo

$$1 = a^2 - bc = a^2 + b^2 + ab, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$2 = a^2 + b^2 + (a + b)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Točno dva od a^2, b^2 i $(a + b)^2$ su jednaka 1, a treći je jednak 0. 2 boda

Ovo nam daje još šest kandidata za rješenja:

$$(a, b, c) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Provjerom se uvjerimo da su $(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1), (1, 1, 0)$ i $(-1, -1, 0)$ zaista rješenja. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Neka je ABC trokut takav da je $|AC| > |BC|$. Neka je M nožište okomice iz vrha B na simetralu kuta $\sphericalangle BCA$. Dokaži da je površina trokuta AMC dvostruko manja od površine trokuta ABC .

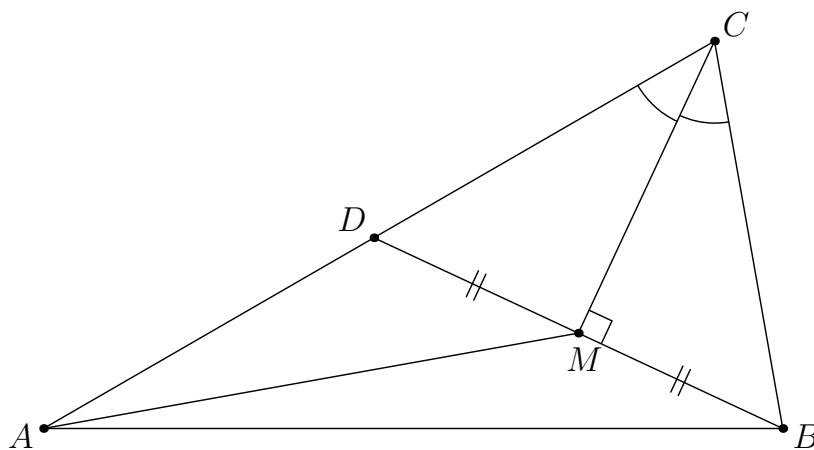
Prvo rješenje.

Uočimo da je

$$P(ABC) = P(AMC) + P(MBC),$$

stoga je dovoljno dokazati da je $P(AMC) = P(MBC)$. 2 boda

Neka je D sjecište pravca BM i stranice AC .



Budući da je $|\sphericalangle DMC| = 90^\circ = |\sphericalangle BMC|$, $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DCM|$ i $\overline{CM}$ zajednička stranica trokuta DMC i BMC , zaključujemo (po K-S-K poučku) da su trokuti DMC i BMC sukladni.

2 boda

Posebno je $P(DMC) = P(BMC)$.

1 bod

Iz sukladnosti trokuta DMC i BMC slijedi da je $|DM| = |BM|$.

1 bod

Budući da trokuti DMA i BMA imaju zajedničku visinu iz vrha A , te su im nasuprotne stranice jednake, slijedi da je $P(DMA) = P(BMA)$.

2 boda

Konačno, vidimo da je

$$\begin{aligned} P(AMC) &= P(AMD) + P(DMC) \\ &= P(AMB) + P(BMC) \\ &= P(ABMC). \end{aligned}$$

2 boda

Drugo rješenje.

Neka je D sjecište pravca BM i stranice AC .

Kao u prvom rješenju pokažemo da je $|DM| = |BM|$.

5 bodova

Označimo nožišta iz B i M na stranicu $\overline{AC}$ redom s N i K .

Kako je $P(ABC) = \frac{1}{2}|BN||AC|$ i $P(AMC) = \frac{1}{2}|MK||AC|$, dovoljno je pokazati da je $|BN| = 2|MK|$.

1 bod

Primijetimo da su trokuti DMK i DBN slični jer imaju zajednički kut pri vrhu D i $\sphericalangle MKD = 90^\circ = \sphericalangle BND$.

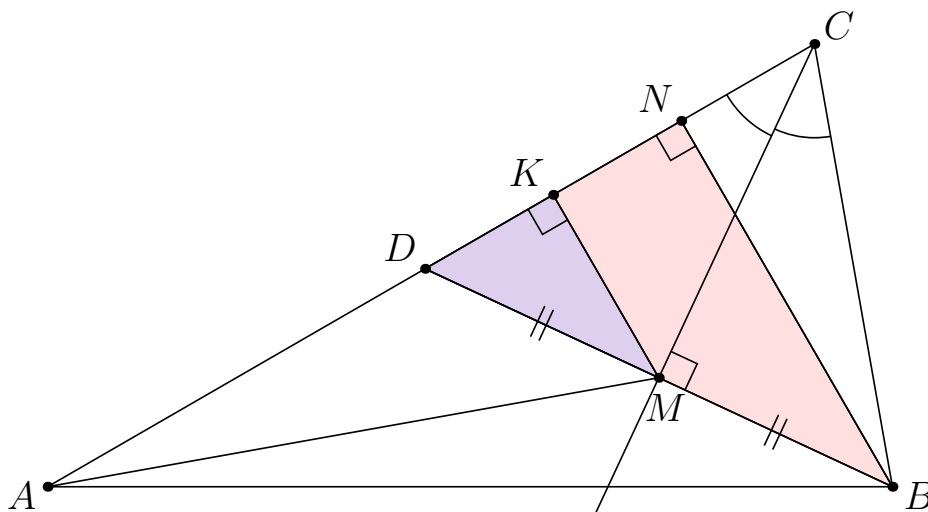
2 boda

Konačno, zbog sličnosti trokuta DMK i DBN imamo

$$\frac{|BN|}{|MK|} = \frac{|BD|}{|MD|} = 2,$$

2 boda

što smo i trebali pokazati.



Treće rješenje.

Označimo duljine stranica $|AC|$ i $|BC|$ redom s b i a , te mjeru unutarnjeg kuta pri vrhu C s γ . Sada je

$$P(ABC) = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}.$$

2 boda

Također,

$$P(AMC) = \frac{b \cdot |MC| \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{2}.$$

2 boda

U pravokutnom trokutu MBC vidimo da je $|MC| = a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$. 2 boda

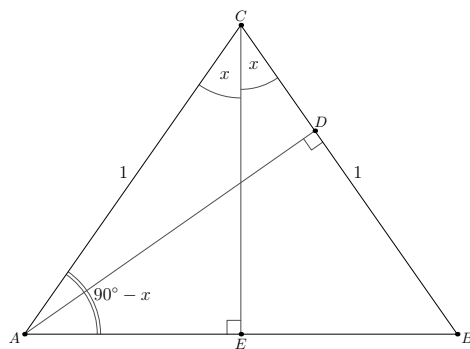
Uvrštavanjem u formulu za površinu trokuta AMC vidimo da je i korištenjem formule za sinus dvostrukog kuta, vidimo da je

$$P(AMC) = \frac{b \cdot a \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ba \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{1}{2} \cdot P(ABC). \quad 4 \text{ boda}$$

Napomena: U trećem rješenju primjenjuje se formula za sinus dvostrukoga kuta:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Ta se formula može dokazati geometrijski. Neka su D i E redom nožišta okomica iz vrhova A i C u jednakokraknom trokutu ABC za koji vrijedi $|AC| = |BC| = 1$, te neka je $2x = |\angle ACB|$.



U pravokutnom trokutu ADC vrijedi $|AD| = |AC| \cdot |\sin \angle ACD| = \sin(2x)$.

Nadalje, u pravokutnom trokutu AEC redom zaključujemo

$$\begin{aligned} |AE| &= |AC| \cdot \sin |\angle ACE| = \sin x, \\ |CE| &= |AC| \cdot \cos |\angle ACE| = \cos x. \end{aligned}$$

Računanjem površine trokuta ABC na dva različita načina dobivamo

$$\begin{aligned} P(ABC) &= \frac{|AB| \cdot |CE|}{2} = \frac{2|AE| \cdot |CE|}{2} = \sin x \cdot \cos x \\ &= \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Učenici ne moraju dokazivati tu formulu.

Zadatak A-1.4.

Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \quad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \quad \frac{2z^2}{1+z^2} = x.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da ako je jedan od brojeva x , y ili z jednak 0, onda i preostala dva moraju biti jednaka 0.

1 bod

Pretpostavimo da niti jedan od x , y i z nije jednak 0. Uzmemo li recipročnu vrijednost svake strane ovih jednakosti imamo

$$\frac{1+x^2}{2x^2} = \frac{1}{y}, \quad \frac{1+y^2}{2y^2} = \frac{1}{z}, \quad \frac{1+z^2}{2z^2} = \frac{1}{x}.$$

1 bod

Sada zbrajanjem ovih jednakosti dobijemo

$$\frac{1+x^2}{2x^2} + \frac{1+y^2}{2y^2} + \frac{1+z^2}{2z^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x},$$

1 bod

odnosno

$$\frac{1-2x+x^2}{2x^2} + \frac{1-2y+y^2}{2y^2} + \frac{1-2z+z^2}{2z^2} = 0.$$

2 boda

Faktorizacijom brojnika na lijevoj strani vidimo da je

$$\frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(y-1)^2}{2y^2} + \frac{(z-1)^2}{2z^2} = 0.$$

2 boda

Budući da su pribrojnici s lijeve strane nenegativni, svi moraju biti 0, stoga za rješenje nužno vrijedi $x = y = z = 1$.

2 boda

Provjerom vidimo da $(0, 0, 0)$ i $(1, 1, 1)$ zaista jesu rješenja danog sustava.

1 bod

Drugo rješenje.

Primijetimo da ako je jedan od brojeva x , y ili z jednak 0, onda i preostala dva moraju biti jednaka 0.

1 bod

Pretpostavimo sada da niti jedan od x , y , z nije jednak 0. Kako su izrazi s lijevih strana pozitivni, slijedi da su x , y , z nužno pozitivni.

1 bod

Primijetimo da je $2x \leq 1+x^2$ jer je $0 \leq (x-1)^2$.

1 bod

Iz toga slijedi

$$y = x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \leq x \cdot \frac{1+x^2}{1+x^2} = x.$$

3 boda

Analogno imamo i $z \leq y$ i $x \leq z$, pa je nužno $x = y = z$.

2 boda

Dakle, vrijedi

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = x,$$

odnosno

$$0 = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2,$$

pa je $x = y = z = 1$.

1 bod

Provjerom vidimo da $(0, 0, 0)$ i $(1, 1, 1)$ zaista jesu rješenja ovog sustava.

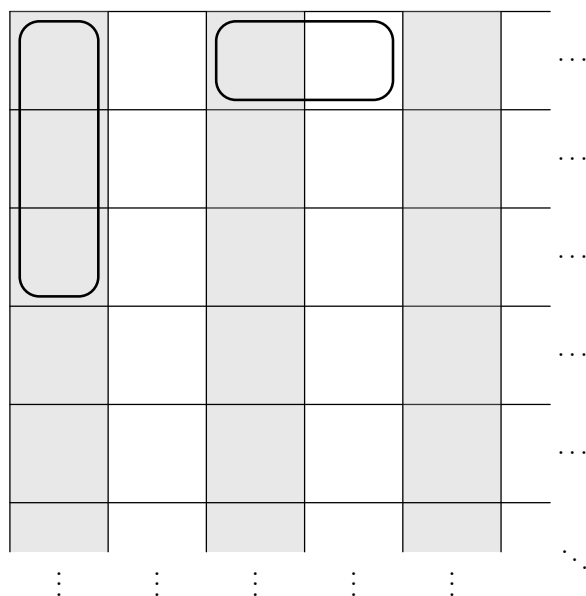
1 bod

Zadatak A-1.5.

Može li se ploča dimenzija 2027×2027 prekriti koristeći dvije vrste pločica:

- pločice dimenzija 1×2 koje prekrivaju po dva susjedna polja u istom retku i
- pločice dimenzija 3×1 koje prekrivaju po tri uzastopna polja u istom stupcu ?

Pločice se ne smiju preklapati niti prelaziti preko ruba dane ploče.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da smo ploču uspjeli popločati. Obojimo sva polja ploče u neparnim stupcima crnom bojom, a polja u parnim stupcima bijelom bojom.

1 bod

Primijetimo da svaka 1×2 pločica kojom popločavamo uvijek prekriva po jedno bijelo i jedno crno polje jer je postavljena tako da prekriva dva susjedna polja u istom retku.

1 bod

Slično, svaka 3×1 pločica, budući da prekriva po tri uzastopna polja u istom stupcu, mora prekrivati ili tri crna ili tri bijela polja.

1 bod

Označimo s d , c i b redom broj 1×2 pločica, crnih 3×1 pločica i bijelih 3×1 pločica.

Na ploči je 1014 stupaca obojeno crnom bojom, a 1013 bijelom bojom pa imamo ukupno $1014 \cdot 2027$ crnih polja i $1013 \cdot 2027$ bijelih.

S druge strane, broj crnih polja je $d + 3c$, a broj bijelih polja je $d + 3b$.

1 bod

Stoga je

$$\begin{aligned} 2027 &= 1014 \cdot 2027 - 1013 \cdot 2027 \\ &= (d + 3c) - (d + 3b) \\ &= 3(c - b). \end{aligned}$$

5 bodova

Budući da 2027 nije djeljiv s 3, dolazimo do kontradikcije. Dakle, takvo popločavanje nije moguće.

1 bod

Drugo rješenje.

Nazovimo 1×2 pločice „domine”, a 3×1 pločice „tromine”.

Pretpostavimo da smo ploču uspjeli popločati.

Broj polja u svakom retku je neparan pa, budući da domine uvijek prekrivaju paran broj polja svakog retka, zaključujemo da je u svakom retku neparno mnogo polja prekriveno trominama.

1 bod

Stoga je broj tromina čiji je gornji vrh u prvom retku neparan.

1 bod

Tromine koje prekrivaju neko polje u drugom retku su one čiji je vrh u prvom ili drugom retku. Onih čiji je vrh u prvom retku je neparno, pa onih čiji je vrh u drugom retku mora biti parno kako bi ukupan broj tromina koje prekrivaju neko polje u drugom retku bio neparan.

1 bod

Slično nastavljamo dalje. Tromine koje prekrivaju neko polje u trećem retku su one čiji je vrh u prvom (njih je neparan broj), drugom (njih je paran broj) ili trećem retku, pa onih čiji je vrh u trećem retku mora biti parno.

1 bod

Tromine koje prekrivaju neko polje u četvrtom retku su one čiji je vrh u drugom, trećem ili četvrtom retku, pa onih čiji je vrh u četvrtom retku mora biti neparno.

1 bod

redak u kojem je vrh	1	2	3	4	...
broj tromina	neparan	paran	paran	neparan	...

Induktivno zaključujemo da je broj tromina čiji je gornji vrh u k -tom retku (od vrha) neparan ako i samo ako k daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

3 boda

Zadnji redak sijeku samo tromine čiji je vrh u 2025-om retku. Kako je 2025 djeljiv s 3, takvih tromina je parno pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, takvo popločavanje nije moguće.

2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve vrijednosti realnog parametra m za koje jednačina $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ ima dva različita realna rješenja pri čemu je veće rješenje manje od dvostrukog manjeg rješenja.

Rješenje.

Kvadratna jednačina $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ će imati dva različita realna rješenja ako je njena diskriminanta pozitivna, tj. ako vrijedi

$$D = (1 - m)^2 - 4(m + 1) = m^2 - 6m - 3 > 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješavanjem gornje kvadratne nejednačbe dobivamo da mora biti

$$m \in \langle -\infty, 3 - 2\sqrt{3} \rangle \cup \langle 3 + 2\sqrt{3}, +\infty \rangle. \quad 2 \text{ boda}$$

Rješenja početne kvadratne jednačbe $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ su

$$x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Direktnom provjerom vidimo da je $x_1 > x_2$ pa da bi vrijedio drugi uvjet zadatka mora biti $x_1 < 2x_2$.

Uvrštavanjem gornjih formula za rješenja kvadratne jednačbe redom imamo

$$\begin{aligned} \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} &< 2 \cdot \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} \\ m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3} &< 2m - 2 - 2\sqrt{m^2 - 6m - 3} \\ 3\sqrt{m^2 - 6m - 3} &< m - 1. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da je $\sqrt{m^2 - 6m - 3} \geq 0$ iz gornje nejednakosti slijedi da nužno mora biti $m > 1$. 1 bod

Nadalje, kvadriranjem prethodne nejednakosti redom imamo

$$\begin{aligned} 9(m^2 - 6m - 3) &< (m - 1)^2 \\ 8m^2 - 52m - 28 &< 0 \\ 2m^2 - 13m - 7 &< 0. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Rješavanjem gornje kvadratne nejednadžbe dobivamo da mora biti $m \in \left\langle -\frac{1}{2}, 7 \right\rangle$. 2 boda

Konačno, kombiniranjem svih uvjeta koje smo prethodno dobili za parametar m , dobivamo da za sve $m \in \langle 3 + 2\sqrt{3}, 7 \rangle$ vrijede uvjeti zadatka. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Odredi najmanji prirodni broj koji ima tri različita pozitivna djelitelja čiji je umnožak 14^{600} .

Prvo rješenje.

Neka je m najmanji takav prirodan broj.

Uočimo da m mora biti djeljiv s 2^{200} . Naime, ako m nije djeljiv s 2^{200} tada za svaki djelitelj od m broj 2 se javlja s eksponentom najviše 199 u rastavu na proste faktore. Posebno, pri umnošku bilo koja tri djelitelja od m broj 2 će se javiti s eksponentom najviše $3 \cdot 199 = 597$ što je u kontradikciji s uvjetom da postoje tri djelitelja čiji je umnožak $14^{600} = 2^{600} \cdot 7^{600}$. 3 boda

Sasvim analogno zaključujemo da m mora biti djeljiv s 7^{200} . 3 boda

Dakle, imamo da m mora biti djeljiv s $2^{200} \cdot 7^{200} = 14^{200}$.

Međutim, ne može biti $m = 14^{200}$ jer je tada najveći djelitelj od m upravo 14^{200} pa će umnožak tri različita djelitelja od m uvijek biti manji od $(14^{200})^3 = 14^{600}$. 1 bod

Kako $m \neq 14^{200}$ i 14^{200} dijeli m slijedi da je $m \geq 2 \cdot 14^{200}$. 1 bod

Broj $m = 2 \cdot 14^{200} = 2^{201} \cdot 7^{200}$ zadovoljava uvjete zadatka jer ima djelitelje $2^{201} \cdot 7^{200}$, $2^{200} \cdot 7^{200}$ i $2^{199} \cdot 7^{200}$ kojima je umnožak upravo $2^{600} \cdot 7^{600} = 14^{600}$. 2 boda

Dakle, odgovor je $m = 2^{201} \cdot 7^{200}$.

Drugo rješenje.

Označimo s m najmanji takav prirodni broj.

Označimo tri djelitelja od m čiji je umnožak 14^{200} redom s $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$ i $\frac{m}{c}$.

Iz uvjeta zadatka imamo da je

$$\frac{m}{a} \cdot \frac{m}{b} \cdot \frac{m}{c} = 14^{600}$$

odnosno slijedi da je

$$m^3 = 14^{600} \cdot abc. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, da bi m bio najmanji takav broj potrebno je i da umnožak abc bude najmanji mogući. 2 boda

Uočimo da su m^3 i 14^{600} kubovi prirodnih brojeva pa iz gornje jednakosti slijedi da umnožak abc također mora biti kub prirodnog broja. 2 boda

Najmanji potpuni kub je očito 1. Međutim, ako je $abc = 1$ onda mora biti $a = b = c = 1$ i u tom slučaju naši djelitelji neće biti međusobno različiti. 1 bod

Drugi najmanji potpuni kub je broj $2^3 = 8$. U ovom slučaju možemo pronaći međusobno različite a , b i c takve da je $abc = 8$, primjerice $a = 4$, $b = 2$ i $c = 1$. 2 boda

Tada je

$$m = \sqrt[3]{14^{600} \cdot 8} = 2 \cdot 14^{200},$$

a djelitelji od m čiji umnožak je 14^{200} su $2^{199} \cdot 7^{200}$, $2^{200} \cdot 7^{200}$ i $2^{101} \cdot 7^{200}$.

2 boda

Zadatak A-2.3.

U kvadrat $ABCD$ upisan je jednakokranični trokut CEF tako da se točka E nalazi na stranici $\overline{AD}$, a točka F na stranici $\overline{AB}$. Neka je G polovište dužine $\overline{CE}$. Dokaži da je trokut ABG jednakokraničan.

Prvo rješenje.

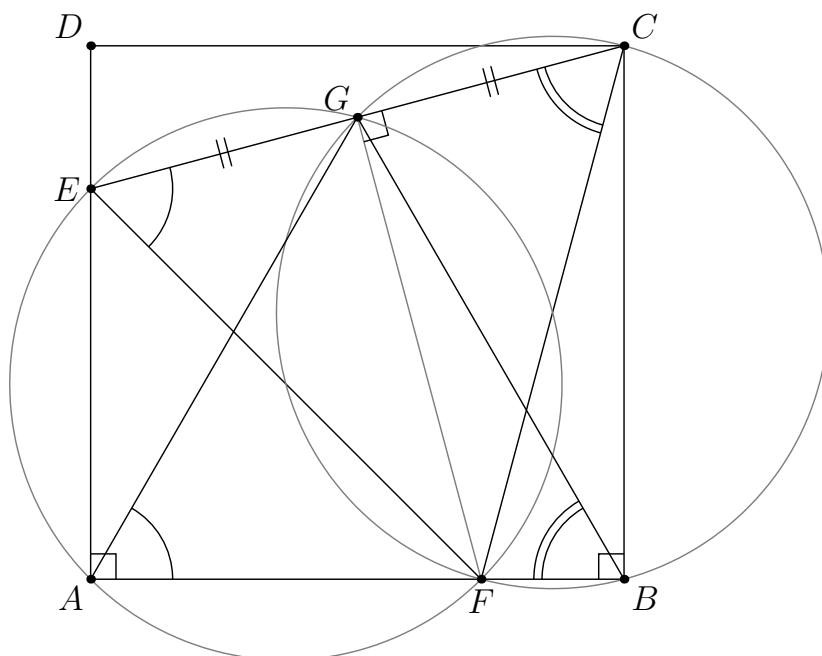
Dužina $\overline{FG}$ je visina trokuta CEF jer je trokut CEF jednakokraničan i točka G je polovište stranice $\overline{CE}$.

1 bod

Posebno, imamo da je $|\angle EGF| = |\angle FGC| = 90^\circ$.

Uočimo da je četvorkut $AFGE$ tetivan jer je $|\angle AFE| = |\angle EGF| = 90^\circ$.

3 boda



Iz gornje tetivnosti imamo da je

$$|\angle BAG| = |\angle FAG| = |\angle FEG| = 60^\circ.$$

1 bod

Analogno je i četverokut $FBCG$ tetivan te imamo

$$|\angle GBA| = |\angle GBF| = |\angle GCF| = 60^\circ.$$

4 boda

Konačno, iz $|\angle BAG| = |\angle GBA| = 60^\circ$ slijedi da je trokut ABG jednakokraničan.

1 bod

Drugo rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|AB| = 1$. Označimo s $x = |AE|$ te neka je točka N nožište okomice iz točke G na pravac AB .

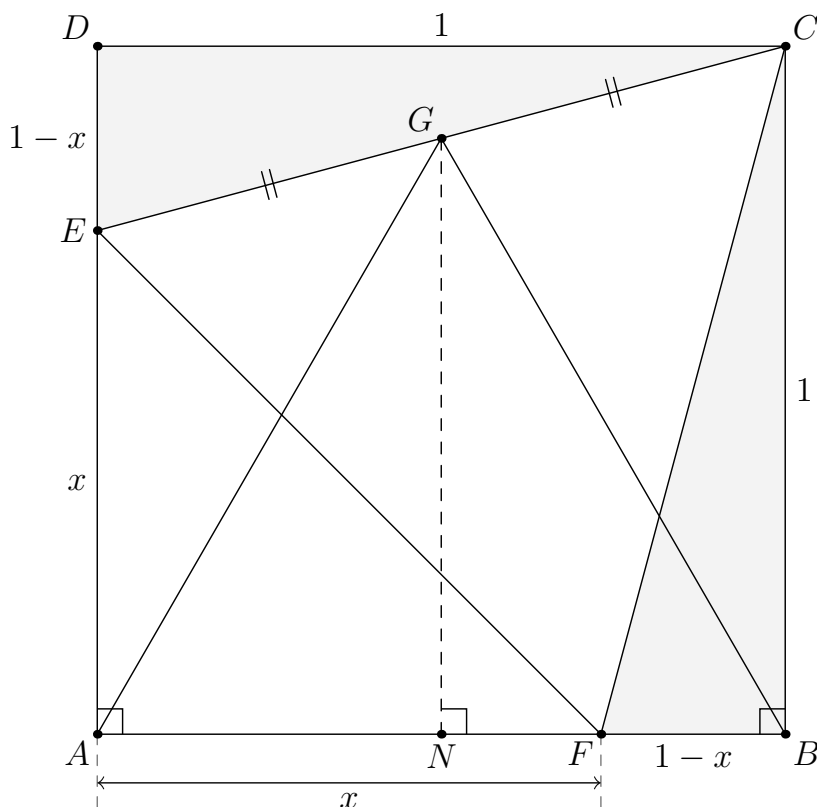
Tada je $|DE| = |AD| - |AE| = 1 - x$.

Nadalje, trokuti FBC i EDC su sukladni jer su pravokutni i vrijedi $|BC| = |CD|$ i $|CF| = |CE|$.

1 bod

Iz gornje sukladnosti slijedi da je $|BF| = |DE| = 1 - x$ te $|AF| = x$.

1 bod



Primjenom Pitagorinog poučka na trokut AFE dobivamo

$$|EF|^2 = |AF|^2 + |AE|^2 = 2x^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABC dobivamo

$$|CF|^2 = |BF|^2 + |BC|^2 = (1-x)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $|EF| = |CF|$ iz gornjih jednakosti slijedi

$$2x^2 = x^2 - 2x + 2,$$

odnosno imamo da je

$$x^2 + 2x - 2 = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su $x_1 = \sqrt{3} - 1$ i $x_2 = -\sqrt{3} - 1$. Budući da je $x = |AE| > 0$ slijedi da mora biti $x = \sqrt{3} - 1$.

1 bod

Uočimo da je $\overline{GN}$ srednjica trapeza $ABCE$ jer je $\overline{GN}$ paralelno s osnovicama $\overline{BC}$ i $\overline{AE}$ te je G polovište kraka $\overline{CE}$. Posebno, imamo da je N polovište drugog kraka $\overline{AB}$.

2 boda

Također, kako je $\overline{GN}$ srednjica trapeza, imamo

$$|GN| = \frac{|BC| + |AE|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1 bod

Konačno primjenom Pitagorinog poučka na trokute ANG i NBG redom imamo

$$\begin{aligned} |AG| &= \sqrt{|AN|^2 + |GN|^2} = 1, \\ |BG| &= \sqrt{|BN|^2 + |GN|^2} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je $|AB| = |AG| = |BG| = 1$ iz čega slijedi da je trokut ABG jednakokraničan.

1 bod

Zadatak A-2.4.

Odredi sve uredene trojke (a, b, c) pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi

$$ab \left(\frac{a+b}{2} - c \right) + bc \left(\frac{b+c}{2} - a \right) + ca \left(\frac{c+a}{2} - b \right) = 0.$$

Prvo rješenje.

Sređivanjem početne jednadžbe redom imamo

$$\begin{aligned} ab \left(\frac{a+b}{2} - c \right) + bc \left(\frac{b+c}{2} - a \right) + ca \left(\frac{c+a}{2} - b \right) &= 0 \\ \frac{a^2b + b^2a}{2} - abc + \frac{b^2c + c^2b}{2} - abc + \frac{c^2a + a^2c}{2} - abc &= 0 \\ a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c - 6abc &= 0, \end{aligned}$$

odnosno vrijedi $a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c = 6abc$.

1 bod

Međutim, primjenom A–G nejednakosti imamo da je

$$a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c \geq 6\sqrt[6]{a^2b \cdot b^2a \cdot b^2c \cdot c^2b \cdot c^2a \cdot a^2c} = 6abc.$$

5 bodova

Budući da vrijedi $a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c = 6abc$ imamo da se u gornjoj A–G nejednakosti postiže jednakost, odnosno mora vrijediti da su brojevi a^2b , b^2a , b^2c , c^2b , c^2a i a^2c svi međusobno jednaki.

1 bod

Iz uvjeta $a^2b = b^2a$ slijedi da je $a = b$, a iz uvjeta $b^2c = c^2b$ imamo da mora biti $b = c$. Dakle, mora vrijediti $a = b = c$ iz čega slijedi da su rješenja početne jednadžbe oblika $(a, b, c) = (t, t, t)$ pri čemu je t pozitivan realan broj.

2 boda

Direktnim uvrštavanjem $a = t$, $b = t$ i $c = t$ u početnu jednadžbu vidimo da je jednadžba zadovoljena za sve pozitivne realne brojeve t .

1 bod

Time imamo da su sva rješenja početne jednadžbe $(a, b, c) = (t, t, t)$ za sve $t > 0$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dobivamo da vrijedi

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) = a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c = 6abc. \quad 1 \text{ bod}$$

Dijeljenjem gornje jednadžbe s abc redom imamo

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} = 6$$

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 6.$$

Uočimo da je

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2 + c^2}{ac} = \frac{(a-c)^2 + 2ac}{ac} = \frac{(a-c)^2}{ac} + 2,$$

te analogno za preostale parove.

4 boda

Uvrštavanjem gornje jednakosti u prethodnu jednadžbu dobivamo da vrijedi

$$\frac{(a-c)^2}{ac} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(a-b)^2}{ab} = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Budući da su a , b i c pozitivni brojevi te $(a-c)^2$, $(b-c)^2$, $(a-b)^2 \geq 0$ gornja jednakost vrijedi ako i samo ako je $a-c=0$, $b-c=0$ i $a-b=0$, tj. ako i samo ako je $a=b=c$.

2 boda

Direktnom provjerom vidimo da su to ujedno i sva rješenja početne jednadžbe.

1 bod

Zadatak A-2.5.

Ana i Borna igraju igru na 3×3 ploči. Na početku Ana u polja ploče upiše sve prirodne brojeve od 1 do 9. Zatim Borna odabire jedan put od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja koji sadrži točno pet polja. Na kraju određuju zbroj brojeva upisanih u polja odabranog puta. Ana želi da taj zbroj bude što veći, a Borna da bude što manji. Ako oboje igraju optimalno, koliki će biti taj zbroj?

(Put je niz polja od kojih svaka dva uzastopna imaju zajedničku stranicu.)

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da će ukupan zbroj uz optimalnu igru biti 29.

Upisivanjem brojeva u ploču kao na slici Ana može osigurati da ne postoji put čiji je zbroj manji od 29.

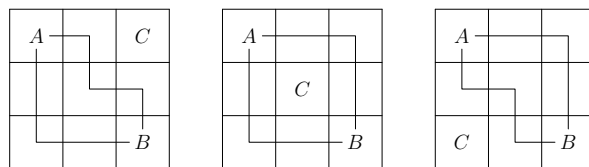
3 boda

9	7	1
6	3	5
2	4	8

Nadalje, dokažimo da Borna uvijek može odabrati put čiji je zbroj najviše 29 neovisno o Aninom rasporedu brojeva na ploči.

Neka su A i B brojevi u gornjem lijevom i donjem desnom kutu ploče te neka je C najveći broj na dijagonali iz donjeg lijevog kuta do gornjeg lijevog kuta.

Promotrimo dva puta iz gornjeg lijevog kuta u donji desni kut ploče koja ne prolaze poljem s brojem C te imaju jedino zajedničko početno i završno polje puta.



Na ta dva puta se nalaze svi brojevi od 1 do 9 bez broja C te se brojevi A i B pojavljuju dva puta. Stoga imamo da je ukupan zbroj tih putova

$$(1+2+\dots+(C-1)+(C+1)+\dots+9)+A+B = (1+2+\dots+9)+A+B-C = 45+A+B-C. \quad 5 \text{ bodova}$$

Kako je $A+B \leq 9+8=17$ i $C \geq 3$ imamo da je ukupan zbroj brojeva na gornjim putevima najviše

$$45+A+B-C \leq 45+17-3=59. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz gornjeg slijedi da barem jedan od ta dva puta ima zbroj brojeva najviše 29 jer bi u suprotnome ukupan zbroj brojeva gornjih putova bio barem 60.

1 bod

Time smo pokazali da Borna zaista uvijek može pronaći put sa zbrojem najviše 29.

Dakle, uz optimalnu igru, Ana i Borna će ukupno skupiti 29 bodova.

Drugo rješenje.

Uz optimalnu igru, Ana i Borna će skupiti 29 bodova.

Isto kao u prvom rješenju, Ana može upisivanjem brojeva na ploču osigurati da ne postoji put čiji je zbroj manje od 29.

3 boda

Pokažimo da se Ani uvijek isplati brojeve 8 i 9 staviti u gornji lijevi i donji desni kut ploče.

Ako se broj 9 ne nalazi niti u gornjem lijevom niti u donjem desnom kutu ploče, zamjenom broja 9 s brojem u gornjem lijevom kutu ploče se suma brojeva na niti jednom putu nije smanjila.

1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se 9 nalazi u gornjem lijevom kutu ploče.

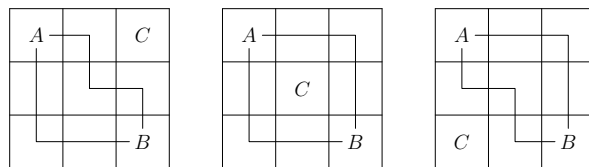
Ako se broj 8 sada ne nalazi u donjem desnom kutu ploče, onda se zamjenom broja 8 s brojem u donjem desnom kutu ploče suma brojeva na niti jednom putu nije smanjila.

1 bod

Sada nastavimo s pretpostavkom da se brojevi 8 i 9 nalaze u gornjem lijevom i donjem desnom kutu ploče.

Neka je C najveći broj na dijagonali koja spaja donji lijevi i gornji desni kut ploče.

Promotrimo dva puta iz gornjeg lijevog kuta u donji desni kut ploče koja ne prolaze poljem s brojem C te imaju jedino zajedničko početno i završno polje puta.



Na ta dva puta se nalaze svi brojevi od 1 do 9 osim broja C te se brojevi 8 i 9 pojavljuju dva puta. Stoga imamo da je ukupan zbroj brojeva na tim putovima jednak

$$(1 + 2 + \dots + 9) + 8 + 9 - C = 62 - C. \quad 3 \text{ boda}$$

Kako je $C \geq 3$ imamo da je ukupan zbroj gornjih putova najviše

$$62 - C \leq 62 - 3 = 59, \quad 1 \text{ bod}$$

iz čega slijedi da je barem jedan od ta dva puta ima zbroj najviše 29 što smo i htjeli pokazati. 1 bod

Napomena: Dokaz tvrdnje da se Ani uvijek isplati smjestiti brojeve 8 i 9 u gornji lijevi i donji desni kut ploče ukupno nosi **2 boda**. Rješenja u kojima ta tvrdnja nije dokazana mogu ostvariti najviše **8 bodova**.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Riješi sustav jednačbi

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 2} - \log_2 y^2 = 3, \quad \frac{\log_2 y}{\log_y 2} - \log_2 x^2 = 3.$$

Prvo rješenje.

Budući da je $\log_2 x = \frac{1}{\log_x 2}$, $\log_2 y = \frac{1}{\log_y 2}$, $\log_2 y^2 = 2 \log_2 y$ i $\log_2 x^2 = 2 \log_x x$, dobijemo sustav

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 y &= 3, \\ (\log_2 y)^2 - 2 \log_2 x &= 3. \end{aligned} \quad 3 \text{ boda}$$

Oduzimanjem druge jednačbe od prve dobijemo

$$0 = (\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 x + \log_2 y + 2). \quad 2 \text{ boda}$$

Stoga je $\log_2 x - \log_2 y = 0$ ili $\log_2 x + \log_2 y + 2 = 0$.

Ako je $\log_2 y = \log_2 x$, uvrštavanjem u prvu jednačbu dobijemo

$$0 = (\log_2 x)^2 - 2 \log_x - 3 = (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 1), \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{odnosno } y = x = \frac{1}{2} \text{ ili } y = x = 8. \quad 1 \text{ bod}$$

Ako je $\log_2 y = -2 - \log_2 x$, uvrštavanjem u prvu jednačbu dobijemo

$$0 = (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 1 = (\log_2 x + 1)^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{odnosno } y = x = \frac{1}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem u polazne jednačbe vidimo da su $(8, 8)$ i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zaista rješenja. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dobijemo

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 y &= 3, \\ (\log_2 y)^2 - 2 \log_2 x &= 3.\end{aligned}$$

3 boda

Označimo li $t = \log_2 x$, imamo

$$\log_2 y = \frac{(\log_2 x)^2 - 3}{2} = \frac{t^2 - 3}{2}.$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo

$$0 = \left(\frac{t^2 - 3}{2}\right)^2 - 2t - 3 = \frac{t^4 - 6t^2 - 8t - 3}{4}.$$

1 bod

Uočimo da $t = 3$ i $t = -1$ jesu rješenja ove jednadžbe.

1 bod

Primijetimo da je

$$0 = t^4 - 6t^2 - 8t - 3 = (t - 3)(t + 1)^3$$

pa zaključujemo da su $t = 3$ i $t = -1$ jedina rješenja ove jednadžbe.

3 boda

Slučaj $t = 3$ nam daje $(x, y) = (8, 8)$ kao kandidata za rješenje, a slučaj $t = -1$ nam daje $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kao kandidata za rješenje..

1 bod

Uvrštavanjem u polazne jednadžbe vidimo da su $(8, 8)$ i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zaista rješenja.

1 bod

Napomena: Rješenja srodna drugom rješenju koja ne argumentiraju da su $t = 3$ i $t = -1$ **jedina** rješenja pripadne jednadžbe četvrtog stupnja mogu ostvariti najviše 7 bodova.

Zadatak A-3.2.

Odredi sva rješenja sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos y + 1)^2 &\geq 2(\sin x + 1)(\cos y + 1) \\ (\sin y + \cos z + 1)^2 &\geq 2(\sin y + 1)(\cos z + 1) \\ (\sin z + \cos x + 1)^2 &\geq 2(\sin z + 1)(\cos x + 1)\end{aligned}$$

za koja vrijedi $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$.

Rješenje.

Množenjem zagrada i kraćenjem zajedničkih članova s obje strane dobijemo da je sustav ekvivalentan sustavu

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &\geq 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 z &\geq 1 \\ \sin^2 z + \cos^2 x &\geq 1.\end{aligned}$$

2 boda

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobijemo

$$3 \leq (\sin^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 y + \cos^2 z) + (\sin^2 z + \cos^2 x).$$

1 bod

Budući da je

$$\begin{aligned} 3 &\leq (\sin^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 y + \cos^2 z) + (\sin^2 z + \cos^2 x) \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + (\sin^2 z + \cos^2 z) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3, \end{aligned}$$

zaključujemo da se u sve tri nejednakosti postiže jednakost.

3 boda

Stoga je

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 y = \sin^2 y.$$

1 bod

Budući da su x i y šiljasti kutovi, njihovi sinusi su pozitivni pa je

$$\sin x = \sin y,$$

odnosno

$$x = y.$$

2 boda

Analogno slijedi i $x = z$.

Sva rješenja zadovoljavaju $x = y = z$. Direktnom provjerom se vidi da svi takvi x, y, z zaista jesu rješenja sustava.

1 bod

Zadatak A-3.3.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ djelitelj broja n .

Za realni broj t , $\lfloor t \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t . Na primjer, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ i $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

Prvo rješenje.

Neka je $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Tada je $n = k^2 + r$, za neki $0 \leq r \leq 2k$.

2 boda

Koristeći nove oznake, uvjet zadatka glasi

$$k + 1 \mid k^2 + r = k(k + 1) + (r - k).$$

Broj $k(k + 1) + (r - k)$ djeljiv je s $k + 1$ ako i samo ako je $r - k$ djeljiv s $k + 1$.

3 boda

Budući da je $|r - k| \leq k < k + 1$, $r - k$ je djeljiv s $k + 1$ ako i samo ako je $r - k = 0$, odnosno $r = k$.

4 boda

Zaključujemo da su rješenja svi brojevi oblika $k^2 + k$ za prirodan broj k .

1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Tada je $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$.

2 boda

Primijetimo da je

$$\frac{n}{k+1} = \frac{k^2 + r}{k+1} > \frac{k^2 - 1}{k+1} = k - 1.$$

2 boda

Slično, imamo da je

$$\frac{n}{k+1} = \frac{k^2 + r}{k+1} < \frac{k^2 + 2k + 1}{k+1} = k + 1.$$

2 boda

Slijedi da $k+1$ dijeli n , odnosno $\frac{n}{k+1}$ je cijeli broj, ako i samo ako je $\frac{n}{k+1} = k$.

3 boda

Zaključujemo da su rješenja svi brojevi oblika $k^2 + k$ za prirodan broj k .

1 bod

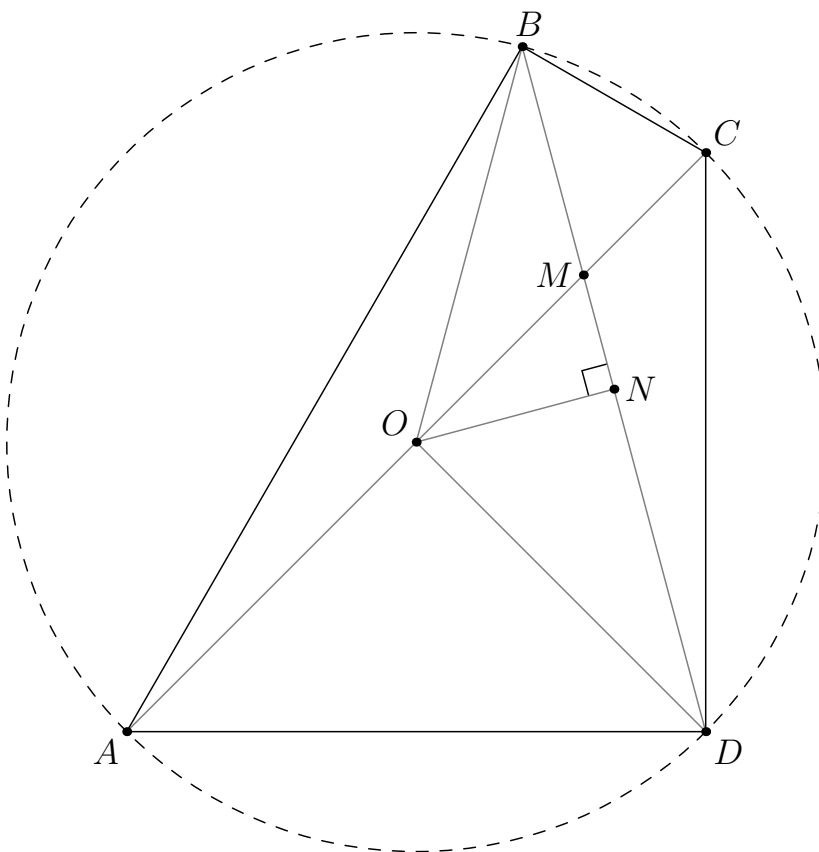
Zadatak A-3.4.

U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|\angle ABC| = 90^\circ$, $|\angle BCD| = 120^\circ$ i $|\angle CDA| = 90^\circ$. Neka je M sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Ako je $|BM| = 1$ i $|MD| = 2$, odredi površinu četverokuta $ABCD$.

Prvo rješenje.

Označimo s O polovište dužine $|AC|$. Budući da je to polovište hipotenuza trokuta pravokutnih trokuta ABC i ACD , zaključujemo da sve četiri točke A, B, C i D leže na kružnici sa središtem u O .

1 bod



Kut $\sphericalangle BOD$ je središnji kut nad tetivom $\overline{BD}$ pa imamo

$$|\sphericalangle BOD| = 2|\sphericalangle BAD| = 2(360^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle CDA|) = 120^\circ. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je trokut BOD jednakokrtačan i $|\sphericalangle BOD| = 120^\circ$ imamo da je

$$|\sphericalangle DBO| = |\sphericalangle ODB| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle BOD|}{2} = 30^\circ.$$

Neka je N polovište dužine $\overline{BD}$.

U pravokutnom trokutu OND imamo

$$\frac{1}{2}|BD| = |ND| = |OD| \cdot \cos |\sphericalangle ODB|,$$

$$\text{odnosno } |OD| = \sqrt{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Nadalje, imamo

$$|ON| = |OD| \sin |\sphericalangle ODN| = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uočimo da je

$$|MN| = |DM| - |DN| = \frac{1}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ONM dobivamo

$$|OM| = \sqrt{|ON|^2 + |MN|^2} = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz tigonometrije u pravokutnom trokutu ONM slijedi da je

$$\sin |\sphericalangle AMB| = \sin |\sphericalangle OMN| = \frac{|ON|}{|OM|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno možemo izračunati površinu četverokuta $ABCD$. Imamo da je

$$P(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD| \cdot \sin |\sphericalangle AMB|}{2} = \frac{9}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Drugo rješenje.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} |MD| &= \frac{\sin |\sphericalangle MAD|}{\sin |\sphericalangle DMA|} \cdot |AD| \\ &= \frac{\sin |\sphericalangle MAD|}{\sin |\sphericalangle DMA|} \cdot \cos |\sphericalangle CAD| \cdot |AC|. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno je

$$\begin{aligned} |MB| &= \frac{\sin |\sphericalangle BAM|}{\sin |\sphericalangle AMB|} \cdot |AB| \\ &= \frac{\sin |\sphericalangle BAM|}{\sin |\sphericalangle AMB|} \cdot \cos |\sphericalangle BAC| \cdot |AC|. \end{aligned}$$

Budući da je $\sin |\sphericalangle DMA| = \sin |\sphericalangle AMB|$, dijeljenjem ove dvije jednakosti dobijemo

$$2 = \frac{|MD|}{|MB|} = \frac{\sin |\sphericalangle MAD| \cdot \cos |\sphericalangle MAD|}{\sin |\sphericalangle BAM| \cdot \cos |\sphericalangle BAM|} = \frac{\sin 2|\sphericalangle MAD|}{\sin 2|\sphericalangle BAM|}.$$

S druge strane znamo da je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle MAD| + |\sphericalangle BAM| &= |\sphericalangle BAD| \\ &= 360^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle CDA| \\ &= 60^\circ. \end{aligned}$$

1 bod

Rješavanjem sustava

$$\begin{cases} |\sphericalangle MAD| + |\sphericalangle BAM| = 60^\circ, \\ \sin 2|\sphericalangle MAD| = 2 \sin 2|\sphericalangle BAM| \end{cases}$$

dobijemo $|\sphericalangle MAD| = 45^\circ$ i $|\sphericalangle BAM| = 15^\circ$.

3 boda

Budući da je $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$, zaključujemo da je četverokut $ABCD$ tetivan.

1 bod

Sada je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle DMA| &= |\sphericalangle DCM| + |\sphericalangle MDC| \\ &= (90^\circ - |\sphericalangle MAD|) + |\sphericalangle BDC| \\ &= 45^\circ + |\sphericalangle BAC| \\ &= 60^\circ. \end{aligned}$$

1 bod

Uvrštavanjem svih poznatih veličina u

$$|MD| = \frac{\sin |\sphericalangle MAD|}{\sin |\sphericalangle DMA|} \cdot \cos |\sphericalangle CAD| \cdot |AC|,$$

dobijemo

$$|AC| = 2\sqrt{3}.$$

1 bod

Sada je

$$\begin{aligned} P(ACD) &= \frac{|AD| \cdot |CD|}{2} \\ &= \frac{\cos |\sphericalangle CAD| \cdot |AC| \cdot \sin |\sphericalangle CAD| \cdot |AC|}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

1 bod

Na isti način je

$$\begin{aligned} P(ABC) &= \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} \\ &= \frac{\cos |\sphericalangle BAC| \cdot |AC| \cdot \sin |\sphericalangle BAC| \cdot |AC|}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1 bod

Konačno, vidimo da je

$$P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD) = \frac{9}{2}.$$

Zadatak A-3.5.

Neka je n prirodni broj. U nekoj državi koriste se kovanice svih apoena od 1 do n . Kolekcionar želi dio svojih kovanica rasporediti u pet kutija tako da budu ispunjena sljedeća četiri uvjeta:

- U svakoj je kutiji najviše jedna kovanica svakog apoena.
- U svim je kutijama isti broj kovanica i jednak iznos novca.
- Bilo koje dvije kutije zajedno sadrže barem jednu kovanicu svakog apoena.
- Kovanice niti jednog apoena ne nalaze se u svim kutijama.

Pod pretpostavkom da kolekcionar ima dovoljno kovanica svakog apoena, može li postići svoj cilj ako je

- (a) $n = 109$?
(b) $n = 110$?

Rješenje.

- (a) Primijetimo da se svaki apoen nalazi u točno četiri kutije. Zaista, kada bi se neki apoen nalazio u tri kutije ili manje, bio bi narušen treći uvjet. S druge strane, četvrti uvjet zahtjeva da se svaki apoen ne nalazi u barem jednoj kutiji. 2 boda

Označimo s k broj kovanica u svakoj kutiji.

Ukupan broj kovanica u kutijama je s jedne strane $5k$, jer se u svakoj od 5 kutija nalazi k kovanica, a s druge strane je $4n$, jer se svaki apoen nalazi u točno 4 kutije odnosno,

$$5k = 4n. \quad \text{4 boda}$$

Dakle, n mora biti djeljiv s 5 da bi kolekcionar uspio u svom naumu, odnosno ne može postići svoj cilj kada je $n = 109$. 1 bod

- (b) Za $n = 110$, kolekcionar može postići željeni cilj na sljedeći način. Rasporedimo apoene u 10 grupa, $1 - 11$, $12 - 22$, $23 - 33$, ..., $100 - 110$.

- U prvu kutiju ćemo staviti sve apoene osim $1 - 11$ i $100 - 110$.
- U drugu kutiju ćemo staviti sve apoene osim $12 - 22$ i $89 - 99$.
- U treću kutiju ćemo staviti sve apoene osim $23 - 33$ i $78 - 88$.
- U četvrtu kutiju ćemo staviti sve apoene osim $34 - 44$ i $67 - 77$.
- U petu kutiju ćemo staviti sve apoene osim $45 - 55$ i $56 - 66$.

Na ovaj način je svaki apoen u točno četiri kutije, u svakoj kutiji se nalazi 88 apoena, te je zbroj apoena u svakoj kutiji jednak 4884. 3 boda

Napomena: Bilo koji raspored apoena po kutijama koji zadovoljava sve uvjete zadatka vrijedi 3 boda. Za dobiti ta 3 boda nije nužno eksplicitno pisati provjeru zadovoljavanja svih uvjeta.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve nenegativne realne brojeve x takve da su $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ i x uzastopni članovi aritmetičkog niza (ne nužno u tom poretaku).

Za realni broj t , $\lfloor t \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t , a $\{t\}$ njegov decimalni dio, tj. $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$. Na primjer, $\lfloor 15.1 \rfloor = 15$ i $\{15.1\} = 0.1$.

Rješenje.

Neka je $x = k + r$, gdje je $k = \lfloor x \rfloor$ i $r = \{x\}$. Iz uvjeta zadatka slijedi da brojevi k, r i $k + r$ čine aritmetički niz. Kako je $x \geq 0$, slijedi $k \geq 0$.

Vidimo da je $k + r \geq k$ i $k + r \geq r$, pa je $k + r$ najveći član niza. 1 bod

Ako je k najmanji član niza, tada je $k \leq r < 1$ pa je $k = 0$. Tada brojevi $0, r$ i r čine aritmetički niz pa je $r = 0$ i dobivamo rješenje $x = 0$. 2 boda

Ako je r najmanji član niza, onda vrijedi $k = \frac{1}{2}(r + (k + r))$. Slijedi da je $r = \frac{k}{2}$. 2 boda

Kako je $r < 1$, mora vrijediti $k < 2$. 3 boda

Za $k = 0$ dobivamo da je $r = 0$ i ponovno dobivamo rješenje $x = 0$.

Za $k = 1$ dobivamo da je $r = \frac{1}{2}$ i dobivamo rješenje $x = \frac{3}{2}$. 2 boda

Zadatak A-4.2.

Neka je z kompleksan broj takav da je broj

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3}$$

realan. Dokaži da je z realan broj ili da vrijedi $|z| = 1$.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da z nije realan broj.

Neka je t realan broj takav da je

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3} = t.$$

Tada je

$$6z^2 + 5z + 6 = t(3z^2 + 10z + 3),$$

odnosno

$$(6 - 3t)z^2 + (5 - 10t)z + (6 - 3t) = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Ako je $6 - 3t = 0$, onda je $z = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da z nije realan. 1 bod

Ako je $6 - 3t \neq 0$, onda imamo kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj jedno od rješenja nije realno. Slijedi da rješenja čine kompleksno konjugirani par, pa su z i $\bar{z}$ rješenja gornje jednadžbe. 4 boda

Iz Vièteovih formula slijedi da je

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{6 - 3t}{6 - 3t} = 1. \quad 3 \text{ boda}$$

Dakle, vrijedi $|z| = 1$.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da z nije realan.

Posebno, $z \neq 0$, pa podijelimo brojnik i nazivnik izraza sa z . Dobivamo izraz

$$\frac{6z + 5 + \frac{6}{z}}{3z + 10 + \frac{3}{z}}. \quad 1 \text{ bod}$$

Neka je $w = z + \frac{1}{z}$. Tada izraz možemo zapisati kao

$$\frac{6w + 5}{3w + 10}. \quad 1 \text{ bod}$$

Taj broj je realan ako i samo ako je jednak svom kompleksnom konjugatu, odnosno ako i samo ako je

$$\frac{6w + 5}{3w + 10} = \frac{6\bar{w} + 5}{3\bar{w} + 10}. \quad 2 \text{ boda}$$

Množenjem s nazivnicima dobivamo uvjet

$$18w\bar{w} + 60w + 15\bar{w} + 50 = 18\bar{w}w + 15w + 60\bar{w} + 50,$$

iz čega slijedi $w = \bar{w}$. Dakle, $w = z + \frac{1}{z}$ realan broj. 2 boda

Neka su x i y realni brojevi takvi da je $z = x + iy$. Tada je

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2 + 1) + iy(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $z + \frac{1}{z}$ realan, slijedi $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$. 2 boda

Budući da z nije realan, $y \neq 0$, pa je $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, tj. $|z| = 1$. 1 bod

Treće rješenje.

Pretpostavimo da z nije realan. Neka je $z = x + yi$ za $x, y \in \mathbb{R}$ i $y \neq 0$.

Izraz koji promatramo je tada jednak

$$\frac{(6(x^2 - y^2) + 5x + 6) + (12xy + 5y)i}{(3(x^2 - y^2) + 10x + 3) + (6xy + 10y)i}.$$

Ako racionaliziramo ovaj razlomak, odnosno pomnožimo brojnik i nazivnik kompleksnim konjugatom nazivnika, dobivamo

$$\frac{((6(x^2 - y^2) + 5x + 6) + (12xy + 5y)i) \cdot ((3(x^2 - y^2) + 10x + 3) - (6xy + 10y)i)}{(3(x^2 - y^2) + 10x + 3)^2 + (6xy + 10y)^2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je nazivnik realan, slijedi da je imaginarni dio brojnika jednak 0. 2 boda

S druge strane, imaginarni dio brojnika je

$$(3(x^2 - y^2) + 10x + 3)(12xy + 5y) - (6(x^2 - y^2) + 5x + 6)(6xy + 10y) = 45y(x^2 + y^2 - 1). \quad 6 \text{ bodova}$$

Budući da je $y \neq 0$, nužno je $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, tj. $|z| = 1$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Na kružnici je označeno 3000 točaka. Muha koja se u početku nalazi na jednoj od točaka kreće se isključivo skokovima u smjeru kazaljke na satu za 2 ili 3 mjesta. Koliko joj je najmanje skokova potrebno za obilazak svih točaka i povratak na početnu točku?

Rješenje.

Odgovor je 3001.

Prvo dokažimo da muha u 3001 skokova može obići sve točke. Označimo točke u smjeru kazaljke na satu s $0, 1, 2, \dots, 2999$ tako da je početna točka 0. Tada možemo prvo 999 puta skočiti za 3 mjesta od 0 do 3, od 3 do 6, $\dots$, od 2994 do 2997. Zatim skočimo za 2 mjesta od 2997 do 2999.

Nakon toga 999 puta skočimo za 3 mjesta od 2999 do 2, od 2 do 5, $\dots$, od 2993 do 2996. Zatim skočimo za 2 mjesta od 2996 do 2998.

Nakon toga 999 puta skočimo za 3 mjesta od 2998 do 1, od 1 do 4, $\dots$, od 2992 do 2995. Zatim u sljedeća dva skoka skočimo do 2997 pa do 0.

Ukupno smo skočili $999 + 1 + 999 + 1 + 999 + 2 = 3001$ puta. 3 boda

Dokažimo da ne možemo u 3000 ili manje skokova obići svaku točku i vratiti se u početnu. U svakom slučaju trebamo barem 3000 skokova jer u svakoj točki treba završiti barem jedan skok.

Pretpostavimo da možemo u točno 3000 skokova obići svaku točku i vratiti se. Neka je a broj skokova duljine 2 i b broj skokova duljine 3 koje smo napravili. Vrijedi $a + b = 3000$.

Brojevi a i b ne mogu biti jednaki 0 – kad bi bilo $b = 0$ tada bi svaki skok bio duljine 2 i skakali bismo samo po točkama s parnim oznakama, a kad bi bilo $a = 0$ tada bi svaki skok bio duljine 3 i skakali bismo samo po točkama s oznakama djeljivim s 3. 1 bod

Neka je k ukupan broj krugova koje smo napravili. Tada je

$$2a + 3b = 3000k.$$

Kako su a i b veći od 0, slijedi

$$6000 = 2 \cdot (a + b) < 2a + 3b = 3000k,$$

pa je $k > 2$.

3 boda

S druge strane,

$$9000 = 3 \cdot (a + b) > 2a + 3b = 3000k,$$

pa je $k < 3$.

3 boda

Dakle, $2 < k < 3$ što je nemoguće.

Napomena: Učenici koji napišu relaciju $2a + 3b = 3000k$, ali ne pokažu $k > 2$ niti $k < 3$ trebaju dobiti 1 bod za tu relaciju.

Zadatak A-4.4.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoje prirodni brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n$ takvi da vrijedi:

- $\sqrt{a_k + 1}$ je prirodan broj za sve $k = 1, 2, \dots, n$
- $\sqrt{a_k + 1}$ je djelitelj broja a_{k+1} za sve $k = 1, 2, \dots, n - 1$
- $a_n - a_1 = 20$.

Rješenje.

Za $k = 1, \dots, n$ neka je $b_k = \sqrt{a_k + 1}$. Iz uvjeta zadatka slijedi da su b_k cijeli brojevi.

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$b_k \mid b_{k+1}^2 - 1 \quad \text{za } k = 1, \dots, n - 1.$$

Nadalje, vrijedi

$$20 = a_n - a_1 = b_n^2 - b_1^2 = (b_n + b_1)(b_n - b_1).$$

Dakle, $b_n - b_1$ i $b_n + b_1$ su prirodni brojevi čiji je umnožak 20. Primijetimo da su iste parnosti pa su oba parni. Slijedi da je nužno $b_n - b_1 = 2$ i $b_n + b_1 = 10$. Iz toga dobivamo $b_n = 6$ i $b_1 = 4$.

1 bod

Pretpostavimo da je $n = 2$. Tada $b_1 \mid b_2^2 - 1$, odnosno $4 \mid 6^2 - 1$, kontradikcija. Zaključujemo da $n = 2$ nije rješenje.

1 bod

Ako je $n = 2k + 1$ neparan broj veći ili jednak 3, stavimo

$$b_1 = 4, \quad b_2 = b_4 = \dots = b_{2k} = 5 \quad \text{i} \quad b_3 = b_5 = \dots = b_{2k+1} = 6.$$

3 boda

Tada $b_1 = 4$ dijeli $b_2^2 - 1 = 24$, $b_{2j} = 5$ dijeli $b_{2j+1}^2 - 1 = 35$ i $b_{2j-1} = 6$ dijeli $b_{2j}^2 - 1 = 24$ za $j \leq k$. Slijedi da za svaki neparan n veći od 1 postoje traženi brojevi.

1 bod

Ako je $n = 2k$ paran broj veći ili jednak 4, stavimo

$$b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = b_5 = \dots = b_{2k-1} = 5 \text{ i } b_4 = b_6 = \dots = b_{2k} = 6.$$

3 boda

Tada $b_1 = 4$ dijeli $b_2^2 - 1 = 8$, $b_2 = 3$ dijeli $b_3^2 - 1 = 24$ i $b_j \mid b_{j+1}^2 - 1$ za ostale j , što se provjeri analogno kao u slučaju kad je n neparan. Slijedi da za svaki paran broj n veći od 2 postoje traženi brojevi.

1 bod

Stoga su rješenja svi prirodni brojevi veći ili jednaki 3.

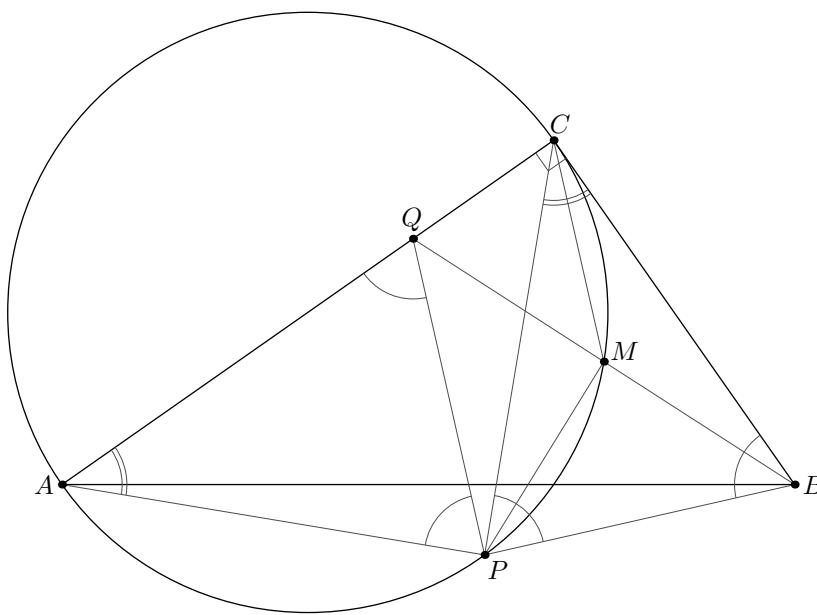
Napomena: Učenici koji po bodovnoj shemi ne dobivaju niti jedan od posljednjih 8 bodova, ali pronađu primjere brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka za $n = 3$ i $n = 4$ (ili neke druge dvije konkretne vrijednosti n različite parnosti) trebaju dobiti još 1 bod.

Zadatak A-4.5.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C i $|AC| > |BC|$. Neka je k polukružnica s promjerom $\overline{AC}$ koja se nalazi s iste strane pravca AC kao i točka B . Neka je P točka na k takva da je $|CP| = |CB|$ i neka je Q točka na $\overline{AC}$ takva da je $|AP| = |AQ|$. Dokaži da polovište dužine $\overline{BQ}$ pripada polukružnici k .

Rješenje.

Označimo s M polovište dužine $\overline{BQ}$ te s $\varphi = |\angle PCB|$.



Budući da je pravac BC tangenta na k u C , poučak o kutu između tangente i tetive daje

$$|\angle PAC| = |\angle PCB|.$$

2 boda

Kako su trokuti BCP i QAP jednakokračni imamo

$$|\angle AQP| = |\angle QPA| = |\angle BPC| = |\angle CBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

1 bod

Sada vidimo da je četverokut $QPBC$ tetivan, jer je $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle AQP|$. 2 boda

Nadalje, kako je M polovište dužine $\overline{BQ}$ te trokut CQB pravokuta prema obratu Talesovog poučka slijedi da je M središte opisane kružnice četverokuta $PBCQ$. 1 bod

Po teoremu o središnjem i obodnom kutu imamo da je

$$|\sphericalangle CMP| = 2|\sphericalangle CBP| = 180^\circ - \varphi. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno, uočimo da vrijedi

$$|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle CMP| = \varphi + (180^\circ - \varphi) = 180^\circ$$

iz čega slijedi da se točka M nalazi na opisanoj kružnici trokuta APC , odnosno da je točka M na polukružnici k . 3 boda