

MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Izračunaj

$$\frac{1}{\frac{1^2}{2026^2} + 1} + \frac{1}{\frac{2^2}{2025^2} + 1} + \frac{1}{\frac{3^2}{2024^2} + 1} + \cdots + \frac{1}{\frac{2026^2}{1^2} + 1}.$$

Rješenje.

Primijetimo da k -ti član sume možemo napisati kao

$$\frac{1}{\frac{k^2}{(2027-k)^2} + 1},$$

gdje je $k = 1, 2, \dots, 2026$. Sada možemo gledati kao parove članove na pozicijama k i $2027 - k$ (prvi i zadnji, drugi i predzadnji, ...). Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{k^2}{(2027-k)^2} + 1} + \frac{1}{\frac{(2027-k)^2}{(2027-(2027-k))^2} + 1} &= \frac{1}{\frac{k^2 + (2027-k)^2}{(2027-k)^2}} + \frac{1}{\frac{(2027-k)^2 + k^2}{k^2}} = \\ &= \frac{(2027-k)^2}{k^2 + (2027-k)^2} + \frac{k^2}{(2027-k)^2 + k^2} = \\ &= \frac{k^2 + (2027-k)^2}{k^2 + (2027-k)^2} = 1. \end{aligned}$$

Ukupno ima 1013 parova pa suma iznosi $1013 \cdot 1 = 1013$.

Zadatak S-3.2. [15 bodova]

Neka je $p \neq 3$ prost broj i neka su a i b cijeli brojevi takvi da

$$p \mid a + b \quad \text{i} \quad p^2 \mid a^3 + b^3.$$

Dokaži da vrijedi $p^2 \mid a + b$ ili $p^3 \mid a^3 + b^3$.

Rješenje.

Izraz $a^3 + b^3$ možemo raspisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= (a + b)(a^2 + b^2 + 2ab - 3ab) = \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 3ab) \end{aligned}$$

Kako $p^2 \mid a^3 + b^3$ i $p \mid a + b$ zaključujemo da $p^2 \mid a + b$ ili $p \mid (a + b)^2 - 3ab$.

Pretpostavimo da $p^2 \nmid a + b$, tj. da $p \mid (a + b)^2 - 3ab$. Kako $p \mid a + b$, vrijedi i $p \mid 3ab$. S obzirom da je $p \neq 3$, mora biti da $p \mid a$ ili $p \mid b$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $p \mid a$. Tada kako $p \mid a + b$, slijedi da $p \mid b$. Oдавде imamo $p^3 \mid a^3$ i $p^3 \mid b^3$ па $p^3 \mid a^3 + b^3$.

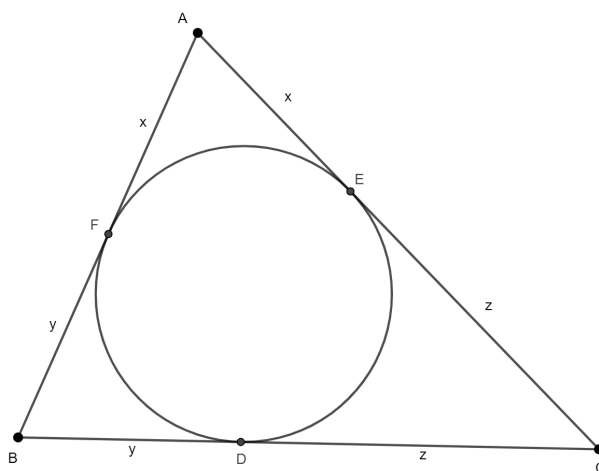
Zadatak S-3.3. [20 bodova]

Zadan je trokut ABC sa stranicama duljina $|BC| = 2025$, $|AC| = 2026$ i $|AB| = 2027$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da upisane kružnice trokuta ABD i ADC dodiruju dužinu $\overline{AD}$ u istoj točki.

Odredi duljinu dužine $\overline{BD}$.

Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću poznatu lemu.



Lema: Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Neka su a , b i c redom duljine stranica trokuta ABC nasuprot vrhova A , B i C . Tada je

$$\begin{aligned} |AE| &= |AF| = \frac{b + c - a}{2}, \\ |BD| &= |BF| = \frac{a + c - b}{2}, \\ |CD| &= |CE| = \frac{a + b - c}{2}. \end{aligned}$$

Dokaz leme: Kako su AE i AF tangente iz točke A na upisanu kružnicu trokuta ABC slijedi da je $|AE| = |AF|$.

Analogno je $|BD| = |BF|$ i $|CD| = |CE|$.

Označimo s $x = |AE| = |AF|$, $y = |BD| = |BF|$ i $z = |CD| = |CE|$.

Redom imamo da je

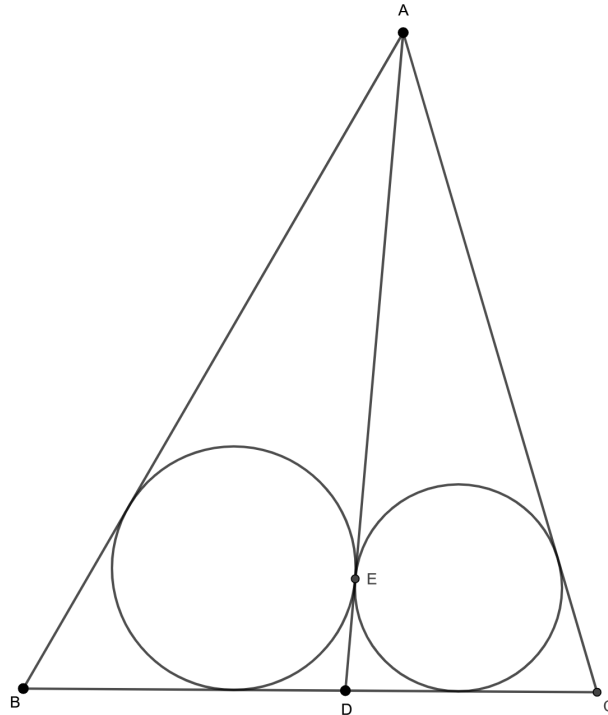
$$\begin{aligned} x + y &= |AF| + |FB| = c, \\ x + z &= |AE| + |EC| = b, \\ y + z &= |BD| + |DC| = a. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava po x , y i z konačno dobivamo

$$\begin{aligned}x &= \frac{b + c - a}{2}, \\y &= \frac{a + c - b}{2}, \\z &= \frac{a + b - c}{2}\end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati. □

Vratimo se sada natrag na početni zadatak. Označimo s $x = |BD|$ te neka je E zajedničko diralište upisanih kružnica trokuta ABD i ADC na dužini $\overline{AD}$.



Primjenom gornje leme na trokut ABD imamo

$$|DE| = \frac{|BD| + |AD| - |AB|}{2} = \frac{x + |AD| - 2027}{2}.$$

Primjenom leme na trokut ADC dobivamo

$$|DE| = \frac{|DC| + |AD| - |AC|}{2} = \frac{2025 - x + |AD| - 2026}{2} = \frac{|AD| - x - 1}{2}.$$

Iz gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{x + |AD| - 2027}{2} = \frac{|AD| - x - 1}{2}$$

iz čega konačno dobivamo da je $x = 1013$.

Dakle, tražena duljina dužine $\overline{BD}$ iznosi 1013.

Zadatak S-3.4. [25 bodova]

Matematičar Matko želi povući 2023 dijagonale u pravilnom 2026-erokutu S tako da se nikoje dvije od njih ne sijeku. *Raspon* dijagonale d definiramo kao manji broj stranica mnogokuta S između vrhova dijagonale d .

Neka je D najveća razlika raspona dijagonala među svim dijagonalama od S koje je Matko nacrtao. Odredi najmanju vrijednost D koju Matko može postići.

Rješenje.

Označimo s d_{min} raspon najmanje dijagonale i s d_{max} raspon najveće dijagonale. Tada je

$$D = d_{max} - d_{min}.$$

Pokažimo najprije da mora vrijediti $d_{min} = 2$. To će slijediti iz sljedeće leme.

Lema: Najveći broj dijagonala koje se mogu povući bez presijecanja u pravilnom n -terokutu iznosi $n - 3$. Te dijagonale dijele mnogokut na trokute.

Dokaz leme: Ovu tvrdnju možemo dokazati **jakom** (ili **potpunom**) matematičkom indukcijom. Jasno je da za $n = 3$ ne možemo povući ni jednu dijagonalu, a za $n = 4$ možemo jednu, koja raspolavlja četverokut na dva trokuta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 3, 4, \dots, k$. Pokazat ćemo da vrijedi i za $k + 1$. Povucimo bilo koju dijagonalu u konveksnom $(k + 1)$ -terokutu. Ona ga dijeli na n_1 -terokut i n_2 -terokut, gdje je

$$n_1 + n_2 = (k + 1) + 2 = k + 3$$

jer ova dva mnogokuta dijele 2 vrha. Oдавde je $n_2 = k + 3 - n_1$. Sve dijagonale koje dalje povlačimo moraju biti sadržane unutar jednog od dva manja mnogokuta, jer bi inače dijagonala sjekla početnu dijagonalu. U n_1 -terokutu po pretpostavci indukcije možemo povući maksimalno $n_1 - 3$ dijagonale koje se ne sijeku, a u n_2 -terokutu $n_2 - 3 = k - n_1$ dijagonale. Ove dijagonale dijele manje mnogokute na trokute. Uključujući dijagonalu koja dijeli mnogokut na dva, imamo da je ukupan maksimalni broj dijagonala koje se ne sijeku u velikom mnogokutu jednak

$$1 + (n_1 - 3) + (k - n_1) = k - 2 = (k + 1) - 3.$$

Kako su manji mnogokuti podijeljeni na trokute, i veliki mnogokut će biti podijeljen na trokute, jer je dobiven spajanjem dva manja mnogokuta. Stoga tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. $\square$

Pretpostavimo sada da je $d_{min} = k > 2$. Ta dijagonala s $k - 1$ vrhova između njenih krajeva čini $(k + 1)$ -terokut u kojem Matko nije povukao niti jednu dijagonalu. No, to je kontradikcija s lemom, jer $k + 1 > 3$, pa 2026-erokut ne bi bio podijeljen na trokute s povučenih 2023 = 2026 - 3 dijagonale.

Preostaje sada minimizirati vrijednost d_{max} . U nastavku dokazujemo da najmanji d_{max} koji Matko može postići iznosi $M := \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil = 676$. Za nesusjedne vrhove U i V mnogokuta S označit ćemo s $d(\overline{UV})$ raspon dijagonale $\overline{UV}$ te s $\widehat{UV}$ skup svih vrhova mnogokuta S koji su u rasponu dijagonale $\overline{UV}$ (dakle, svi vrhovi mnogokuta S koji se nalaze između vrhova U i V , uključujući i njih, i to „s kraće strane”).

Pokažimo najprije da se $d_{max} = M$ može postići. Označimo vrhove 2026-erokuta S redom s $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$, počevši od proizvoljnog. Povucimo prvo dijagonale $\overline{A_1 A_{677}}$, $\overline{A_{677} A_{1352}}$ i $\overline{A_{1352} A_1}$. Time smo S podijelili na 677-erokut $A_1 A_2 \dots A_{677}$, dva 676-erokuta $A_{677} A_{678} \dots A_{1352}$ i $A_{1352} A_{1353} \dots A_1$ i jedan trokut $A_1 A_{677} A_{1352}$. Veće mnogokute možemo podijeliti na trokute s ukupno $(677 - 3) + 2 \cdot (676 - 3) = 2020$ dijagonala. Zajedno s prve tri dijagonale, ovo čini podjelu mnogokuta S na trokute s ukupno 2023 dijagonale. Jasno je da u ovom slučaju vrijedi $d_{max} = d(\overline{A_1 A_{677}}) = 676$.

Dokažimo sada kontradikcijom da je $d_{max} < M$ nemoguće postići. Pretpostavimo suprotno, tj. da Matko može povući 2023 dijagonale u mnogokutu S tako da je maksimalni raspon dijagonale koji je postigao manji od M . Neka je $\widehat{AB}$ neka od dijagonala s najvećim rasponom, tj. vrijedi $d(AB) = d_{max} < M$. Uzmimo točku $C \notin \widehat{AB}$ takvu da je Matko povukao dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ – ova točka sigurno postoji jer je mnogokut S podijeljen na trokute s 2023 dijagonale koje se ne sijeku, pa dijagonala AB mora s obje strane biti dio nekog trokuta. Ako je sada $\widehat{AB} \subset \widehat{AC}$ ili $\widehat{AB} \subset \widehat{BC}$, tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom. Stoga mora biti $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA} = S$, a to znači da je suma raspona stranica

trokuta ABC jednaka 2026. Kako je raspon od $\overline{AB}$ manji od $M = \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil$, barem jedna od stranica $\overline{BC}$ ili $\overline{CA}$ ima raspon veći ili jednak M . No tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom – kontradikcija. Zaključujemo da je najbolje što Matko može postići $d_{max} = 676$ i $d_{min} = 2$, odnosno da je $D = 674$.

Zadatak S-3.5. [30 bodova]

Medvjedi Branko, Bruna i Brundo žive u različitim kućama (točkama u ravnini). Medvjedi su odlučili spremići zalihe hrane na jedno mjesto (točku u ravnini) tako da zbroj vremena koja su im potrebna da dođu od svojih kuća do spremišta bude najmanji mogući.

Svi medvjedi hodaju od svoje kuće do spremišta po pravcu i svi prave korake iste duljine, ali dok Branko napravi jedan korak, Bruna napravi dva koraka, a Brundo tri koraka.

Odredi gdje medvjedi trebaju napraviti spremište hrane.

Rješenje.

Neka su točke X , Y i Z redom Brankova, Brunina i Brundina kuća te neka je točka S mjesto gdje će spremići hranu.

Označimo s $x = |XS|$, $y = |YS|$ i $z = |ZS|$ redom brojeve koraka koji su potrebni Branku, Bruni i Brundu da dođu do spremišta hrane.

Ukupno vrijeme potrebno da dođu do spremišta je tada

$$t = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}.$$

Primjenom nejednakosti trokuta na $XY S$ imamo da je

$$x + y \geq |XY|,$$

iz čega slijedi da je $y \geq |XY| - x$.

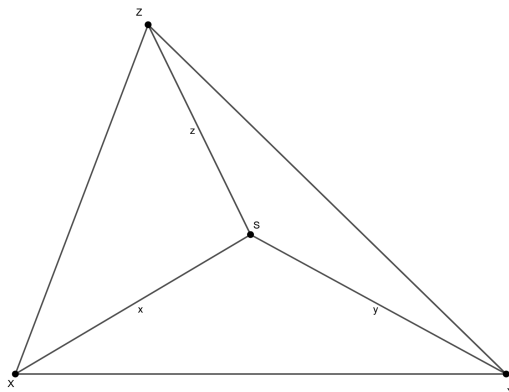
Analogno, primjenom nejednakosti trokuta na XSZ dobivamo da je $z \geq |XZ| - x$.

Sada redom imamo da je

$$t = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \geq x + \frac{|XY| - x}{2} + \frac{|XZ| - x}{3} = \frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3} + \frac{x}{6} \geq \frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3}.$$

Iz gornje nejednakosti vidimo da je minimalno ukupno vrijeme za doći do spremišta $\frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3}$ i ono se postiže kada je $x = 0$, odnosno kada je $S = X$.

Dakle, medvjedi trebaju napraviti spremište hrane u Brankovoj kući.



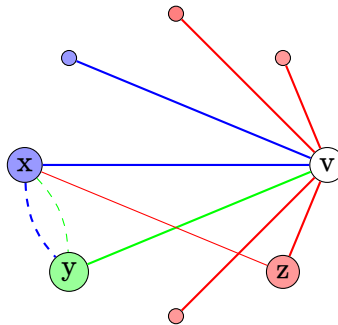
Zadatak S-3.6. [35 bodova]

Na konferenciji je 25 diplomata. Prije konferencije, svaka dva diplomata su se dogovorila na kojem jeziku će razgovarati. Poznato je da među bilo koja tri diplomata postoji diplomat koji će koristiti isti jezik za razgovor s preostala dva diplomata.

Dokaži da postoji diplomat koji na istom jeziku razgovara s najmanje devet drugih diplomata.

Prvo rješenje.

Diplomate možemo prikazati kao vrhove u obojanom grafu, gdje boja brida označava jezik kojim 2 diplomata komuniciraju.



Neka je v diplomat koji priča na istom jeziku s najviše drugih diplomata, tj. v je vrh u grafu iz kojeg izlazi najviše istoboјnih bridova. Neka su ti bridovi **crvene** boje i taj skup označimo s S , a neka je s broj elemenata tog skupa ($v \notin S$). Sve vrhove, osim v oboјimo u onu boju koje boje je brid između v i tog vrha. Označimo s K skup svih vrhova koji nisu v , niti su iz S . Za vrh k iz K , označimo s $f(k)$ skup svih vrhova iz S koji su povezani **crvenim** bridom s k .

Lema: Za dva vrha različite boje x i y iz K , ili je $f(x) \subset f(y)$ ili $f(y) \subset f(x)$.

Dokaz: Neka je x **plave** boje, a y **zelene** boje. x i y su zbog uvjeta zadatka povezani **plavim** ili **zelenim** bridom. Bez smanjenja općenitosti neka su povezani **plavim** bridom. Uzmimo vrh $z \in f(x)$ koji je povezan s x **crvenim** bridom. Onda iz uvjeta zadatka (gledajući trokut xyz), on mora biti povezan s y **crvenim** ili **plavim** bridom. Ako bi bio s **plavim**, onda bi u trokutu vyz imali 3 stranice različite boje. Stoga y i z moraju biti povezani **crvenim** bridom, tj. $z \in f(y)$. Pokazali smo da ako je $z \in f(x)$, da je onda $z \in f(y)$ pa je $f(x) \subset f(y)$. Da su x i y povezani **zelenim** bridom vrijedilo bi $f(y) \subset f(x)$. $\square$

Pokažimo sada da je za svaki $k \in K$, $f(k)$ neprazan skup.

Lema: Za svaki x iz K je $|f(x)| \geq 2$.

Dokaz: Uzmimo vrh x **plave** boje i y zelene boje iz K . x je povezan s vrhovima iz S **crvenom** ili **plavom** bojom. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da je s barem $s - 1$ vrhova iz S povezan **plavom** bojom. Ako su x i y povezani **plavom** bojom, onda iz x imamo barem $(s - 1) + 1 + 1 = s + 1$ **plavih** bridova (vrhovi iz S , v i y), što je kontradikcija s time da je v vrh iz kojeg ide najviše istoboјnih bridova. Stoga su barem 2 vrha iz S povezana s x **crvenom** bojom. Ako su pak x i y povezani **zelenom** bojom tada je iz prethodne leme $f(y) \subset f(x)$. Sada istim zaključivanjem dobivamo $|f(y)| \geq 2$ pa je i $|f(x)| \geq 2$. $\square$

Uzmimo sada vrh x iz K s najmanje **crvenih** susjeda u S . Neka je x **plave** boje. Označimo s P skup svih **plavih** vrhova ($P \subset K$) i s p broj elemenata skupa P . Vrhova iz K koji nisu **plave** boje ima $|K \setminus P| = 25 - s - p - 1$ (svi vrhovi bez vrhova iz S , P i vrha v).

Zbog pretpostavke da je x vrh iz K s najmanje **crvenih** susjeda, za svaki vrh y iz K koji nije **plave** boje, po prethodnoj lemi vrijedi $f(x) \subset f(y)$. Stoga za svaki $z \in f(x)$ koji je povezan s x **crvenom** bojom, je povezan **crvenom** bojom sa svim vrhovima iz $K \setminus P$. Također je povezan **crvenom** bojom s v i x pa iz z izlazi barem $(25 - s - p - 1) + 2 = n - s - p + 1$ **crvenih** bridova. Kako je v vrh s najviše

istobojnih bridova, vrijedi $p \leq s$ i $25 - s - p + 1 \leq s$. Odavde imamo

$$25 + 1 \leq 2s + p \leq 3s \implies s \geq \frac{26}{3}.$$

Stoga je s barem 9.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da svaki diplomat razgovara na istom jeziku s najviše 8 drugih diplomata.

Za uređenu trojku diplomata (x, y, z) kažemo da je *dobra* ako u toj trojci diplomat x razgovara s preostalom dvojicom (y i z) na istom jeziku. Po uvjetu zadatka za svaka 3 diplomata možemo naći redoslijed takav da uređena trojka s ta 3 diplomata bude *dobra*. Stoga *dobrih* trojki ima barem $\binom{25}{3} = 2300$.

Za proizvoljnog diplomata x , neka je k broj jezika koje diplomat x koristi. Označimo s X_i skup preostalih diplomata s kojima x razgovara na i -tom jeziku i neka je x_i broj diplomata u tom skupu, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$. Jasno je da je $\sum_{i=1}^k x_k = 24$. Također, ako uzmemo bilo koja dva elementa iz skupa X_i , x s njima čini dobru trojku. Zato je broj *dobrih* trojki u kojima je x na prvom mjestu

$$\sum_{i=1}^k \binom{x_i}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{x_i(x_i - 1)}{2} = \frac{1}{2} \left(-\sum_{i=1}^k x_k + \sum_{i=1}^k x_k^2 \right) = -12 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k x_k^2.$$

Promotrimo sada koliko ovaj izraz može najviše iznositi. Za to je potrebno naći maksimum od $\sum_{i=1}^k x_k^2$, uz uvjet da je $\sum_{i=1}^k x_k = 24$ i $x_i \leq 8$ za svaki $i = 1, \dots, k$.

Lema: Za $a, b \in \mathbb{N}_0$, t.d. $a \geq b$ vrijedi $a^2 + b^2 < (a + 1)^2 + (b - 1)^2$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 + (b - 1)^2 &= a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = \\ &= a^2 + b^2 + 2(a - (b - 1)) \end{aligned}$$

Kako je $a > b - 1$, slijedi da je $2(a - (b - 1)) > 0$, odakle slijedi tvrdnja. $\square$

Primijetimo da ako iterativno primjenjujemo prethodnu lemu za dva broja a i b , dolazimo do brojeva $(a + b)$ i 0 čija je suma kvadrata najveća moguća od brojeva koji u sumi daju $a + b$.

Analogno zaključujemo da uz uvjete $\sum_{i=1}^k x_k = 24$ i $x_i \leq 8$ za svaki $i = 1, \dots, k$ je suma kvadrata najveća ako je $k = 3$ i $x_1 = x_2 = x_3 = 8$. Tada suma iznosi $3 \cdot 8^2 = 192$.

To znači da *dobrih* trojki s x na prvom mjestu ima najviše $3 \cdot \binom{8}{2} = 84$. Kako je x proizvoljan diplomat, zaključujemo da je maksimalan broj *dobrih* trojki $25 \cdot 84 = 2100$. To je kontradikcija jer smo na početku zaključili da po uvjetu zadatka postoji barem 2300 *dobrih* trojki. Stoga postoji diplomat koji na istom jeziku razgovara s najmanje devet drugih diplomata.

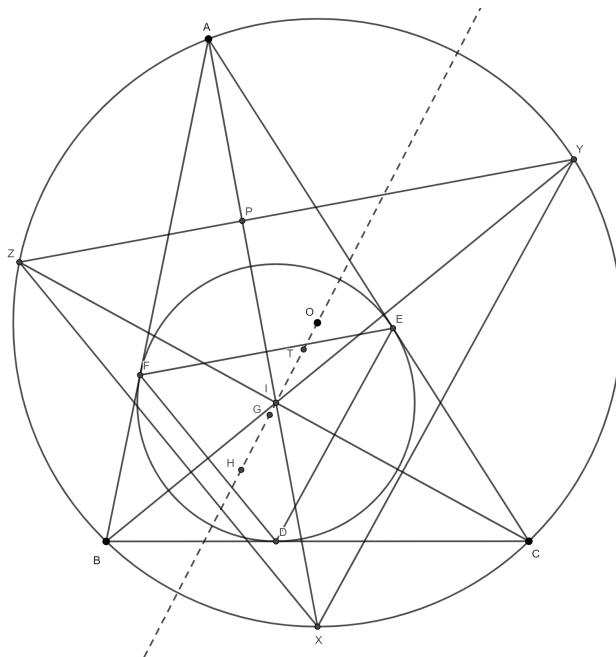
Zadatak S-3.7. [40 bodova]

Neka je O središte opisane kružnice te I središte upisane kružnice trokuta ABC . Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D , E i F .

Neka je G težište trokuta DEF . Dokaži da se točke I , O i G nalaze na istom pravcu.

Rješenje.

Neka su X , Y i Z redom polovišta lukova $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ i $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC kao na slici. Neka je točka P sjecište pravaca AX i YZ . Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC .



Kako je X polovište luka $\widehat{BC}$ slijedi da se točka X nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, tj. točke A , I i X su kolinearne. Sasvim analogno se dobije da su točke B , I i Y te točke C , I i Z kolinearne.

Korištenjem obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta ABC redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle PXZ &= \sphericalangle AXZ = \sphericalangle ACZ = \frac{\gamma}{2}, \\ \sphericalangle CZP &= \sphericalangle CZY = \sphericalangle CBY = \frac{\beta}{2}, \\ \sphericalangle XZC &= \sphericalangle XAC = \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\sphericalangle XZP = \sphericalangle XZC + \sphericalangle CZP = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \sphericalangle PXZ,$$

iz čega slijedi da je trokut XPZ pravokutan. Posebno pravac AX je okomit na pravac YZ .

Na isti način se pokaže da je BY okomito na XZ te CZ okomito na XY .

Iz prijašnjih okomitosti slijedi da visine trokuta XYZ leže na pravcima AX , BY i CZ pa je zato točka I ortocentar trokuta XYZ .

Nadalje, uočimo da je pravac AX okomit na pravac EF jer je trokut AEF jednakokrani ($|AE| = |AF|$) te je AX simetrala kuta $\sphericalangle FAE$.

Kako su pravci EF i YZ okomiti na pravac AX slijedi da je YZ paralelna s pravcem EF .

Sasvim analogno je pravac XY paralelan s pravcem DE te pravac XZ paralelan s pravcem DF .

Iz prethodnih paralelnosti imamo da su odgovarajuće stranice trokuta XYZ i DEF međusobno paralelne. Zbog toga postoji neka homotetija h s centrom u točki H koja trokut XYZ slika u trokut DEF .

Neka je točka T težište trokuta XYZ . Kako homotetija preslikava karakteristične točke prvog trokuta u odgovarajuće karakteristične točke drugog trokuta slijedi da se težište T trokuta XYZ se preslikava u težište G trokuta DEF . Posebno to znači da su točke T , G i H kolinearne.

Nadalje, središte opisane kružnice trokuta XYZ je točka O i ona se po homotetiji h slika u središte opisane kružnice trokuta DEF što je točka I . Iz toga slijedi da su točke O , I i H također kolinearne.

Napokon, kako je I ortocentar, O središte opisane kružnice te T težište trokuta XYZ slijedi da se točke I , O i T nalaze na Eulerovom pravcu trokuta XYZ . Dakle, točke I , O i T su također kolinearne.

Konačno, iz prethodnih kolinearnosti slijedi da se točke O , I , T , G i H sve nalaze na istom pravcu iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak S-3.8. [45 bodova]

Neka je a cijeli broj i n prirodan broj. Dokaži da je zbroj

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$$

djeljiv s n .

$D(x, y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y .

Rješenje.

Zapišimo najprije početnu sumu $\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$ na drugačiji način.

U tu svrhu fiksirajmo prirodan broj d koji je djelitelj broja n i odredimo broj pribrojnika oblika a^d koji se javljaju u početnoj sumi. Za prebrojiti takve pribrojнике trebamo odrediti broj prirodnih brojeva $k \leq n$ takvih da je $D(k, n) = d$.

Kako je $D(k, n) = d$ slijedi da je tada $D\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$. Brojeva $k \leq n$ takvih da je $\frac{k}{d}$ relativno prosto s $\frac{n}{d}$ upravo ima $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Dakle, prema prethodnom imamo da je za svaki prirodan broj $d \mid n$ broj pribrojnika a^d u početnoj sumi jednak $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Time početnu sumu možemo zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)} = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d.$$

Dokažimo sada najprije tvrdnju zadatka za brojeve n oblika $n = p^k$ gdje je p prost broj, a k prirodan broj, tj. dokazat ćemo sljedeću tvrdnju:

Lema: Suma $\sum_{d \mid p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d$ je djeljiva s p^k za svaki prosti broj p i prirodan broj k .

Dokaz leme: Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po k .

Za $k = 1$ imamo da je

$$\sum_{d \mid p} \varphi\left(\frac{p}{d}\right) a^d = a^p + (p-1)a \equiv pa \equiv 0 \pmod{p}$$

pri čemu smo u gornjem računu koristili Mali Fermatov teorem, tj. da je $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k suma $\sum_{d \mid p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d$ djeljiva s p^k i dokažimo da ista tvrdnja vrijedi i za $k+1$.

Primjenom Eulerovog teorema imamo da je

$$a^{p^{j+1}} + (p-1)a^{p^j} \equiv pa^{p^j} \pmod{p^{j+1}}$$

za svaki prirodan broj j .

Sada redom imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^{k+1}} \varphi\left(\frac{p^{k+1}}{d}\right) a^d &= \sum_{i=0}^{k+1} \varphi(p^i) a^{p^{k+1-i}} \\
&= a^{p^{k+1}} + (p-1)a^{p^k} + \sum_{i=2}^{k+1} \varphi(p^i) a^{p^{k+1-i}} \\
&\equiv pa^{p^k} + \sum_{j=2}^{k+1} \varphi(p^j) a^{p^{k+1-j}} \\
&= pa^{p^k} + \sum_{i=2}^{k+1} p\varphi(p^{i-1}) a^{p^{k+1-i}} \\
&= p \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(p^{i-1}) a^{p^{k+1-i}} \\
&= p \sum_{i=0}^k \varphi(p^i) a^{p^{k-i}} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj kongruenciji iskoristili pretpostavku da je suma

$$\sum_{d|p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d = \sum_{i=0}^k \varphi(p^i) a^{p^{k-i}}$$

djeljiva s p^k . □

Dokažimo konačno tvrdnju zadatka za sve prirodne brojeve $n \geq 2$ (za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi).

Neka je p prost djeliteľ broja n te p^α najveća potencija prostog broja p koja dijeli n . Tada djeliteľe od n možemo particionirati u skupove oblika $\{d, dp, \dots, dp^\alpha\}$ za svaki $d \mid n$ takav da je $D(d, p) = 1$. Time sada početnu sumu možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a^{(k,n)} &= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d = \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \left[\varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \varphi\left(\frac{n}{dp}\right) a^{dp} + \dots + \varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) a^{dp^\alpha} \right] \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi\left(\frac{n}{dp^k}\right) a^{dp^k} \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \left[\varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} \right].
\end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi imamo da je

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} = \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) (a^d)^{p^k} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

pa iz prethodne jednakosti imamo da je onda također

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Budući da je p bio proizvoljan djeliteľ broja n iz prethodnog slijedi da je tada suma $\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$ djeljiva s n što smo i trebali dokazati.