

MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-3.1. [10 bodova]

Šest pasa ima veću masu od deset mačaka. Što ima veću masu: dva psa ili tri mačke?

Rješenje.

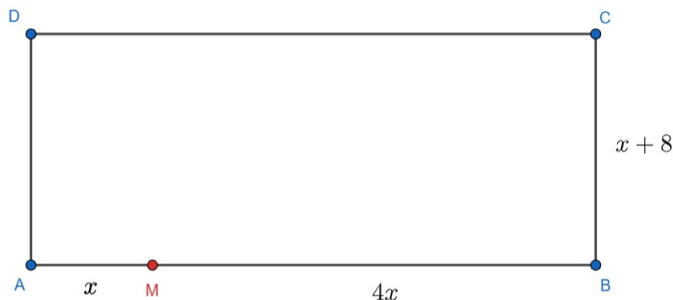
Budući da šest pasa ima veću masu od deset mačaka, šest pasa sigurno ima veću masu od devet mačaka. Tada i tri puta manje pasa ima veću masu od tri puta manje mačaka, tj. dva psa imaju veću masu od tri mačke.

Zadatak K-3.2. [15 bodova]

Dan je pravokutnik $ABCD$ čiji je opseg 64 cm. Na stranici $\overline{AB}$ istaknuta je točka M takva da je duljina $|AM|$ za 8 cm manja od duljine $|BC|$, a duljina $|MB|$ je četiri puta veća od duljine $|AM|$.

Izračunaj površinu pravokutnika $ABCD$.

Rješenje.



Označimo $|AM| = x$. Tada je $|MB| = 4x$, što znači da je $|AB| = 5x$. Također je $|BC| = x + 8$.

Budući da je opseg pravokutnika jednak 64 cm, redom vrijedi:

$$\begin{aligned}2|AB| + 2|BC| &= 64 \\2 \cdot 5x + 2(x + 8) &= 64 \\10x + 2x + 16 &= 64 \\12x &= 48 \\x &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$

S obzirom na to da je $|AB| = 5x$, vrijedi $|AB| = 5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$, a $|BC| = x + 8$, imamo $|BC| = 4 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Površina pravokutnika $ABCD$ je jednaka $|AB| \cdot |BC| = 20 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$.

Zadatak K-3.3. [20 bodova]

Zgrade u gradskim ulicama označene su brojevima. Od početka ulice zgrade s lijeve strane označavaju se neparnim brojevima 1, 3, 5, ..., a s desne strane parnim brojevima 2, 4, 6,

U zapisu svih brojeva s lijeve strane jedne ulice nalazi se 26 znamenki 3 i 24 znamenke 5. U zapisu svih brojeva s desne strane iste ulice nalazi se 26 znamenki 2 i 9 znamenki 5. Koliko je ukupno zgrada u toj ulici?

Rješenje.

Promatrajmo najprije desnu stranu ulice na kojoj su zgrade označene parnim brojevima. Budući da se znamenka 5 pojavljuje samo 9 puta, prvo ćemo provjeriti koji je zadnji broj na desnoj strani koji sadrži znamenku 5. Kako je 5 neparna znamenka, za označavanje parnih brojeva trebat će nam samo kao znamenka desetica. Dvoznamenkastih parnih brojeva koji sadrže znamenku 5 ima pet, a to su:

50, 52, 54, 56, 58.

Vidimo da se u takvima znamenka 5 pojavljuje točno pet puta pa su nam ostale četiri znamenke 5 koje su korištene u zapisivanju troznamenkastih brojeva. Ponovno ju pronalazimo samo kao znamenku desetica i najmanja četiri broja koja ju sadrže su

150, 152, 154, 156.

Zaključujemo da ulica ima barem 156 zgrada. Preostaje nam provjeriti ima li ih 156 ili 157. Ako bi ulica imala i zgradu označenu brojem 158, tada bi se na desnoj strani pojavilo 10 znamenki 5. Primijetimo da iz informacije o broju znamenki 2 ne možemo zaključiti ništa o tome je li broj zgrada 156 ili 157.

Promotrimo sada brojeve na lijevoj strani ulice, označene neparnim brojevima, te ponovno prebrojimo znamenke 5. Kako je 5 neparna znamenka, na lijevoj strani potrebna nam je barem za označavanje svih brojeva koji na mjestu jedinica imaju znamenku 5. Takvih brojeva manjih od 100 ima ukupno 10:

5, 15, 25, ..., 95.

Osim toga, potrebna nam je za označavanje neparnih brojeva koji na mjestu desetice imaju znamenku 5:

51, 53, 55, 57, 59.

Za takve brojeve manje od 100 iskorišteno je još pet znamenaka 5 (znamenku jedinica u broju 55 već smo brojali u prvom dijelu). Sveukupno zato imamo $10 + 5 = 15$ znamenaka 5 na lijevoj strani ceste koje su se iskoristile za označavanje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva. Dakle, još $24 - 15 = 9$ ih je u zapisu troznamenkastih neparnih brojeva. Ponovno promatramo znamenke jedinica. Za troznamenkaste brojeve manje od 150 znamenka 5 se na mjestu jedinica pojavljuje u sljedećih pet brojeva:

105, 115, 125, 135, 145.

Ostalo nam je još $9 - 5 = 4$ znamenaka 5. Preostaje nam zapisati dalje neparne brojeve koji imaju ukupno četiri znamenke 5, a to su

151, 153, 155.

Sada možemo zaključiti da ulica ima barem 155 zgrada. Ako bi imala 157 zgrada, na lijevoj strani ulice znamenka 5 bi se u zapisu pojavila 25 puta. Dakle, ulica ne može imati 157 zgrada pa zaključujemo da je u toj ulici ukupno 156 zgrada.

Zadatak K-3.4. [25 bodova]

Za koje će vrijeme tri radnika završiti neki posao radeći zajedno ako bi ga prvi završio sam za 4 sata, drugi za 5 sati, a treći za 20 sati?

Prvo rješenje.

Trećem radniku treba 5 puta više nego prvom radniku da bi završio posao, odnosno sporiji je 5 puta, pa zaključujemo da u nekom vremenu prvi radnik napravi 5 puta više posla od trećeg radnika. Slično, drugi radnik u tom istom vremenu napravi 4 puta više posla od trećeg radnika. Ako bi svi radili 20 sati, treći bi radnik obavio jedan cijeli posao, prvi radnik obavio bi 5 poslova, a drugi radnik 4 cijela posla. Sve skupa, u 20 sati napravili bi 10 puta cijeli posao. Ako im zajedno treba 20 sati za 10 poslova, jedan cijeli posao obavili bi u 10 puta manje vremenu, odnosno u 2 sata.

Drugo rješenje.

Podijelimo posao na 20 jednakih dijelova. Kako trećem radniku treba 20 sati da obavi svih 20 dijelova posla, u jednom satu treći radnik obavi jedan takav dio (na slici dolje označeno crvenom bojom). Trećem radniku treba 5 puta više nego prvom radniku da bi završio posao, odnosno sporiji je 5 puta, pa zaključujemo da u jednom satu prvi radnik napravi 5 puta više posla od trećeg radnika. Prvi radnik tada u jednom satu obavi 5 dijelova posla, označimo to na slici dolje zelenom bojom. Slično, drugi radnik u jednom satu napravi 4 puta više posla od trećeg radnika, tj. 4 dijela posla koje smo na slici dolje označili plavom bojom.

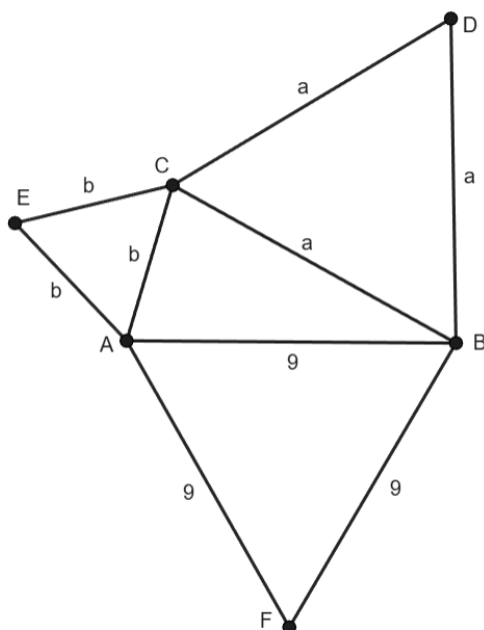
Uočimo da su u jednom satu svi trojica zajedno obavili točno pola cijelog posla pa zaključujemo da im za obavljanje cijelog posla zajedno treba 2 sata.

Zadatak K-3.5. [30 bodova]

S vanjske strane trokuta ABC nacrtani su jednakokranični trokuti CBD , ACE i BAF .

Koliko ima različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC ako se zna da su sve tri duljine prirodni brojevi te da opseg trokuta BAF iznosi 27, a opseg peterokuta $ABDCE$ iznosi 41?

Rješenje.



Opseg trokuta jednak je zbroju duljina svih stranica trokuta, a kako su stranice trokuta BAF sve jednake duljine, njegov opseg jednak je trostrukoj duljini stranice. Dakle, trostruka duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 27 pa je

$$|AB| = |AF| = |BF| = 9.$$

Uvedimo oznake i za duljine preostalih dužina:

$$a = |CB| = |BD| = |DC|$$

$$b = |CA| = |AE| = |EC|$$

Opseg peterokuta $ABDCE$ jednak je zbroju duljina svih njegovih stranica, odnosno imamo

$$9 + a + a + b + b = 41.$$

Zaključujemo da je $2a + 2b = 41 - 9 = 32$, odnosno $a + b = 16$. Sada znamo da je jedna stranica trokuta ABC duljine 9, a zbroj preostale dvije jednak je 16. Kako su sve duljine stranica prirodni brojevi, možemo ispisati mogućnosti za a i b :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Primijetimo da je $b + c > a$ za sve mogućnosti. Međutim, u nekoliko slučajeva ne vrijedi $a + c > b$ ili $b + c > a$ i trokuti s takvim duljinama stranica nisu mogući. Naime, u trokutu uvijek mora vrijediti da je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine preostale stranice. To pravilo nazivamo **nejednakost trokuta**, a ono slijedi iz činjenice da je najkraći put između dvije točke dužina koja ih spaja. U sljedećoj tablici crvenom su bojom označeni zbrojevi koji nisu veći od duljine preostale stranice označene žutom bojom:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$a + c$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$b + c$	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Neoznačeni stupci daju nam 9 mogućnosti za duljine stranica a i b , od kojih su neke međusobno simetrične. Ako zanemarimo oznake, vidimo da imamo 5 različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC :

1. 4, 12, 9
2. 5, 11, 9
3. 6, 10, 9
4. 7, 9, 9
5. 8, 8, 9.

Zadatak K-3.6. [35 bodova]

Prirodan broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, a podijeljen s 15 daje ostatak 7.

Koji su mogući ostatci pri dijeljenju broja n s 30?

Rješenje.

Budući da broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, on se može zapisati u obliku $n = 6k + 4$, gdje je k prirodni broj ili 0. Također, budući da n pri dijeljenju s 15 daje ostatak 7, može se zapisati kao $n = 15\ell + 7$, gdje je ℓ prirodni broj ili 0. Primijetimo da mora vrijediti $k > \ell$.

Tražimo ostatak pri dijeljenju s 30 pa ćemo prvi izraz pomnožiti s 5, a drugi izraz s 2 te tako dobivamo $5n = 30k + 20$ i $2n = 30\ell + 14$.

Oduzmemo od prve jednakosti drugu i redom dobivamo:

$$\begin{aligned} 5n - 2n &= 30k + 20 - (30\ell + 14) \\ 3n &= 30k - 30\ell + 20 - 14 \\ 3n &= 30(k - \ell) + 6 \end{aligned}$$

Podijelimo sve članove ove jednakosti s 3 i dobivamo $n = 10(k - \ell) + 2$.

Budući da je $(k - \ell)$ prirodan broj, slijedi da broj n pri dijeljenju s 10 daje ostatak 2, a to znači da je njegova zadnja znamenka 2.

Zaključujemo da n pri dijeljenju s 30 može dati ostatak 2, 12 ili 22. Provjerimo ove mogućnosti. Zapišimo $n = 30m + r$, gdje je m prirodan broj ili 0.

Ako je $r = 2$, izjednačimo $n = 15\ell + 7$ i $n = 30m + 2$ pa imamo

$$\begin{aligned}15\ell + 7 &= 30m + 2 \\7 &= 30m - 15\ell + 2 \\5 &= 30m - 15\ell\end{aligned}$$

Uočimo da lijeva strana jednakosti nije djeljiva sa 15, a desna jest, stoga ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $r = 12$, tada je $n = 30m + 12$, što je djeljivo s 6. No, iz uvjeta zadatka vrijedi da n pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, tako da ovaj slučaj otpada.

Ostaje slučaj $r = 22$. Treba provjeriti postoji li takav n za koji je $n = 30m + 22$. Ako stavimo $m = 1$, tada je $n = 52$. On pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, a pri dijeljenju s 15 ostatak 7 tako da su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. Dakle, jedini mogući ostatak pri dijeljenju broja n s 30 je 22.

Zadatak K-3.7. [40 bodova]

Ime i prezime svakog učenika jedne škole zapisano je na zasebnoj ceduljici i ubačeno u kutiju. Lovro nasumce izvadi određeni broj ceduljica iz kutije, izbroji ih te bez gledanja imena i prezimena napisanih na njima kaže: „Sa sigurnošću mogu reći da među učenicima čija imena i prezimena su zapisana na izvađenim ceduljicama postoji dvoje koji imaju rođendan istog dana.”

Livia tada prebroji preostale papiriće u kutiji (bez gledanja imena) i kaže: „A ja sa sigurnošću mogu reći da među učenicima čija imena i prezimena su ostala u kutiji sigurno postoji troje učenika koji imaju rođendan istog dana.”

Ako su Lovro i Livia doista u pravu, koliki je najmanji broj učenika te škole?

Ne postoje dva učenika u školi koji imaju isto ime i prezime. Uzimamo u obzir da učenici mogu biti rođeni i 29. veljače, dakle smatramo da godina ima 366 dana.

Rješenje.

Kako godina ima 366 dana, ako Lovro izvuče 366 papirića može se dogoditi da svi učenici čija su imena na izvučenim papirićima imaju rođendan različitog dana, odnosno da ne postoji dvoje učenika koji imaju rođendan istog dana. Ako izvuče još samo jedan papirić, tj. ukupno 367, može biti siguran da barem dvoje učenika ima rođendan istog dana. Dakle, Lovro iz kutije mora izvući barem 367 papirića.

Slično, ako je u kutiji ostalo $366 \cdot 2 = 732$ papirića, može se dogoditi da svakog dana u godini rođendan ima točno dvoje učenika čija imena su na papirićima koji su ostali u kutiji. Međutim, ako je u kutiji još jedan papirić, Livia može biti sigurna da među učenicima čija imena su na papirićima koji su ostali u kutiji postoji barem troje koji imaju rođendan istog dana. Dakle, u kutiji mora ostati barem $366 \cdot 2 + 1 = 733$ papirića.

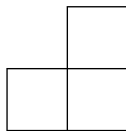
Zaključujemo da je najmanji broj učenika te škole $367 + 733 = 1100$.

Napomena. U ovom zadatku koristili smo jednostavno logičko-matematičko pravilo koje je poznato i pod imenom *Dirichletov princip*. Ono nam ilustrativno kaže da ako imamo $n + 1$ predmet koji želimo smjestiti u n kutija, tada će sigurno u nekoj kutiji biti barem dva predmeta. U našem slučaju, „kutije” su dani u godinu, a „predmeti” su rođendani učenika.

Zadatak K-3.8. [45 bodova]

Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča dimenzija $n \times 9$ može potpuno prekriti *L-triominima* pločicama (kao na slici) tako da se one međusobno ne preklapaju?

Pločice se mogu rotirati.



Rješenje.

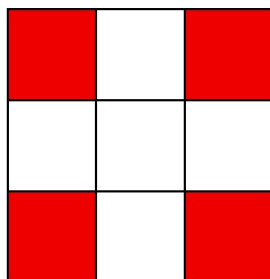
Promatrajmo ploču za male n -ove. Za $n = 1$ očito nema rješenja jer svaka L-triominom pločica pokriva polja u dva reda.

Za $n = 2$, ploča 2×9 se može pokriti na način kao na slici:



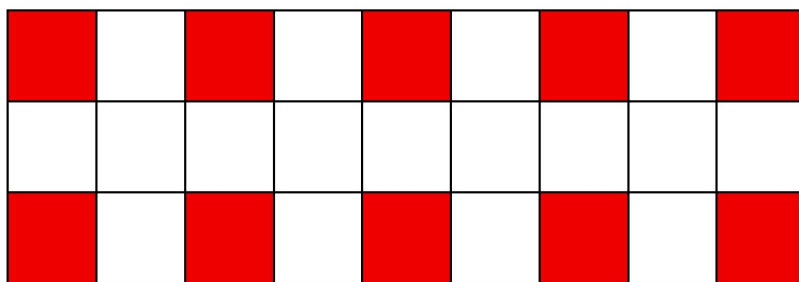
Sada možemo zaključiti i da se ploča $2k \times 9$, za $k \in \mathbb{N}$, može popločati L-triominom pločicama jer možemo spojiti k ploča dimenzija 2×9 , tj. moguće je svako popločavanje kada je n paran broj.

Promatrajmo ploču 3×9 . Da bismo došli do nekog zaključka, promatrimo najprije manju 3×3 ploču.

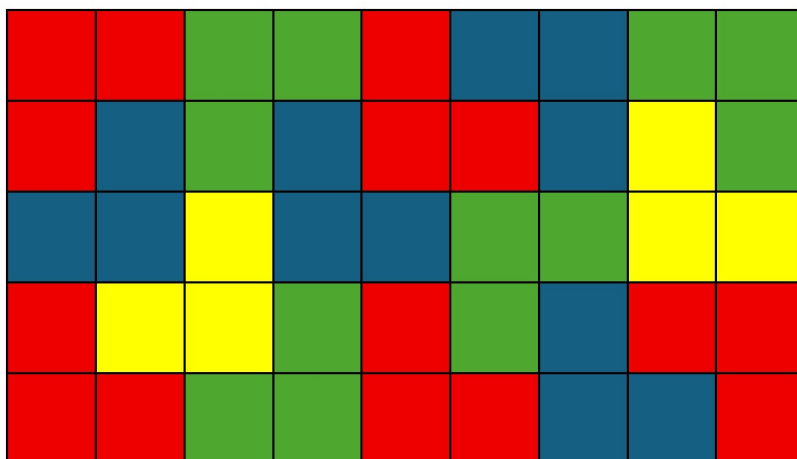


Primijetimo da je za popločavanje svakog označenog polja potrebna zasebna L-triominom pločica, jer jedna L-triominom pločica ne može istovremeno pokriti neka dva od tih polja. Dakle, trebale bi nam najmanje 4 L-triominom pločice, ali one pokrivaju ukupno 12 polja, stoga je popločavanje 3×3 ploče nemoguće.

Analogno tome, za pokrivanje označenih polja na slici unutar 3×9 ploče trebalo bi nam 10 L-triominom pločica koje pokrivaju ukupno 30 polja, ali 3×9 ploča ima samo 27 polja.



Pokušajmo sada popločati ploču 5×9 . To popločavanje je moguće, prikažimo ga:



Budući da je moguće ovo popločavanje, sada je moguće i svako popločavanje ploče dimenzija $(2k+1) \times 9$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, jer možemo spojiti ploču 5×9 i bilo koji broj ploča 2×9 . Drugim riječima, moguće je svako popločavanje kad je n neparan broj veći od 3.

Zaključujemo da se može popločati svaka ploča dimenzija $n \times 9$ za $n \geq 2$, $n \neq 3$.