

MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-3.1. [10 bodova]

Zgrade u gradskim ulicama označene su brojevima. Od početka ulice zgrade s lijeve strane označavaju se neparnim brojevima 1, 3, 5, ..., a s desne strane parnim brojevima 2, 4, 6, ...

U zapisu svih brojeva s lijeve strane jedne ulice nalazi se 26 znamenki 3 i 24 znamenke 5. U zapisu svih brojeva s desne strane iste ulice nalazi se 26 znamenki 2 i 9 znamenki 5. Koliko je ukupno zgrada u toj ulici?

Rješenje.

Promatrajmo najprije desnu stranu ulice na kojoj su zgrade označene parnim brojevima. Budući da se znamenka 5 pojavljuje samo 9 puta, prvo ćemo provjeriti koji je zadnji broj na desnoj strani koji sadrži znamenku 5. Kako je 5 neparna znamenka, za označavanje parnih brojeva trebat će nam samo kao znamenka desetica. Dvoznamenkastih parnih brojeva koji sadrže znamenku 5 ima pet, a to su:

50, 52, 54, 56, 58.

Vidimo da se u takvima znamenka 5 pojavljuje točno pet puta pa su nam ostale četiri znamenke 5 koje su korištene u zapisivanju troznamenkastih brojeva. Ponovno ju pronalazimo samo kao znamenku desetica i najmanja četiri broja koja ju sadrže su

150, 152, 154, 156.

Zaključujemo da ulica ima barem 156 zgrada. Preostaje nam provjeriti ima li ih 156 ili 157. Ako bi ulica imala i zgradu označenu brojem 158, tada bi se na desnoj strani pojavilo 10 znamenki 5. Primijetimo da iz informacije o broju znamenki 2 ne možemo zaključiti ništa o tome je li broj zgrada 156 ili 157.

Promotrimo sada brojeve na lijevoj strani ulice, označene neparnim brojevima, te ponovno prebrojimo znamenke 5. Kako je 5 neparna znamenka, na lijevoj strani potrebna nam je barem za označavanje svih brojeva koji na mjestu jedinica imaju znamenku 5. Takvih brojeva manjih od 100 ima ukupno 10:

5, 15, 25, ..., 95.

Osim toga, potrebna nam je za označavanje neparnih brojeva koji na mjestu desetice imaju znamenku 5:

51, 53, 55, 57, 59.

Za takve brojeve manje od 100 iskorišteno je još pet znamenaka 5 (znamenku jedinica u broju 55 već smo brojali u prvom dijelu). Sveukupno zato imamo $10 + 5 = 15$ znamenaka 5 na lijevoj strani ceste koje su se iskoristile za označavanje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva. Dakle, još $24 - 15 = 9$ ih je u zapisu troznamenkastih neparnih brojeva. Ponovno promatramo znamenke jedinica. Za troznamenkaste brojeve manje od 150 znamenka 5 se na mjestu jedinica pojavljuje u sljedećih pet brojeva:

105, 115, 125, 135, 145.

Ostalo nam je još $9 - 5 = 4$ znamenaka 5. Preostaje nam zapisati dalje neparne brojeve koji imaju ukupno četiri znamenke 5, a to su

151, 153, 155.

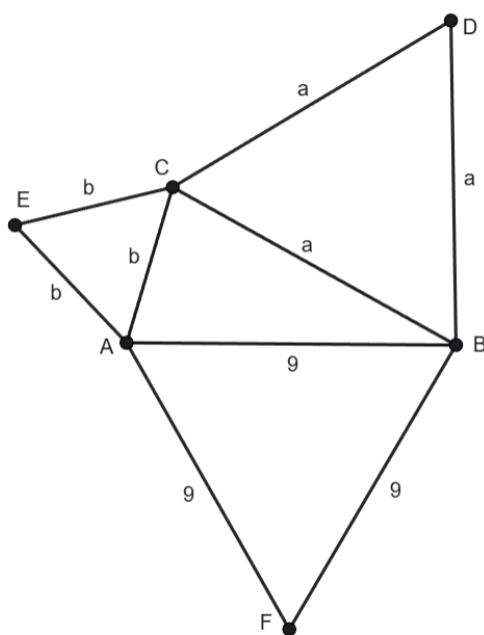
Sada možemo zaključiti da ulica ima barem 155 zgrada. Ako bi imala 157 zgrada, na lijevoj strani ulice znamenka 5 bi se u zapisu pojavila 25 puta. Dakle, ulica ne može imati 157 zgrada pa zaključujemo da je u toj ulici ukupno 156 zgrada.

Zadatak J-3.2. [15 bodova]

S vanjske strane trokuta ABC nacrtani su jednakostranični trokuti CBD , ACE i BAF .

Koliko ima različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC ako se zna da su sve tri duljine prirodni brojevi te da opseg trokuta BAF iznosi 27, a opseg peterokuta $ABDCE$ iznosi 41?

Rješenje.



Opseg trokuta jednak je zbroju duljina svih stranica trokuta, a kako su stranice trokuta BAF sve jednake duljine, njegov opseg jednak je trostrukoj duljini stranice. Dakle, trostruka duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 27 pa je

$$|AB| = |AF| = |BF| = 9.$$

Uvedimo oznake i za duljine preostalih dužina:

$$a = |CB| = |BD| = |DC|$$

$$b = |CA| = |AE| = |EC|$$

Opseg peterokuta $ABDCE$ jednak je zbroju duljina svih njegovih stranica, odnosno imamo

$$9 + a + a + b + b = 41.$$

Zaključujemo da je $2a + 2b = 41 - 9 = 32$, odnosno $a + b = 16$. Sada znamo da je jedna stranica trokuta ABC duljine 9, a zbroj preostale dvije jednak je 16. Kako su sve duljine stranica prirodni brojevi, možemo ispisati mogućnosti za a i b :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Primijetimo da je $b + c > a$ za sve mogućnosti. Međutim, u nekoliko slučajeva ne vrijedi $a + c > b$ ili $b + c > a$ i trokuti s takvim duljinama stranica nisu mogući. Naime, u trokutu uvijek mora vrijediti da je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine preostale stranice. To pravilo nazivamo **nejednakost trokuta**, a ono slijedi iz činjenice da je najkraći put između dvije točke dužina koja ih spaja. U sljedećoj tablici crvenom su bojom označeni zbrojevi koji nisu veći od duljine preostale stranice označene žutom bojom:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$a + c$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$b + c$	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Neoznačeni stupci daju nam 9 mogućnosti za duljine stranica a i b , od kojih su neke međusobno simetrične. Ako zanemarimo oznake, vidimo da imamo 5 različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC :

1. 4, 12, 9
2. 5, 11, 9
3. 6, 10, 9
4. 7, 9, 9
5. 8, 8, 9.

Zadatak J-3.3. [20 bodova]

Na raspolaganju imamo tri sokovnika za cijedenje naranči. Za cijedenje 7 kg naranči prvom je sokovniku potrebno 10 minuta, a drugom 15 minuta. Ako naranče istodobno cijedimo sa sva tri sokovnika, završit ćemo cijedenje za 5 minuta.

Koliko je vremena potrebno za cijedenje 7 kg naranči ako koristimo samo treći sokovnik, a koliko ako istodobno koristimo drugi i treći sokovnik?

Rješenje.

Prvom sokovniku potrebno je 10 minuta za cijedenje 7 kg naranči, pa u jednoj minuti ocijedi desetinu naranči, odnosno $\frac{7}{10}$ kg naranči. Slično, drugi sokovnik u jednoj minuti ocijedi $\frac{7}{15}$ kg naranči. Ako sva tri sokovnika cijede zajedno, potrebno je 5 minuta za 7 kg, pa u jednoj minuti ocijede $\frac{7}{5}$ kg naranči. Od tih $\frac{7}{5}$ kg naranči, prvi sokovnik ocijedio je $\frac{7}{10}$ kg, a drugi sokovnik $\frac{7}{15}$ kg. Dakle, treći sokovnik ocijedio je ostatak:

$$\frac{7}{5} \text{ kg} - \frac{7}{10} \text{ kg} - \frac{7}{15} \text{ kg} = \frac{7}{30} \text{ kg}.$$

Kako treći sokovnik ocijedi $\frac{7}{30}$ kg u jednoj minuti, zaključujemo da mu treba 30 minuta za cijedenje svih 7 kg.

Drugi i treći sokovnik u jednoj minuti ocijede

$$\frac{7}{15} \text{ kg} + \frac{7}{30} \text{ kg} = \frac{7}{10} \text{ kg},$$

pa im za istodobno cijedenje 7 kg treba 10 minuta.

Zadatak J-3.4. [25 bodova]

Prirodan broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, a podijeljen sa 15 daje ostatak 7.

Koji su mogući ostatci pri dijeljenju broja n sa 30?

Rješenje.

Budući da broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, on se može zapisati u obliku $n = 6k + 4$, gdje je k prirodni broj ili 0. Također, budući da n pri dijeljenju sa 15 daje ostatak 7, može se zapisati kao $n = 15\ell + 7$, gdje je ℓ prirodni broj ili 0. Primijetimo da mora vrijediti $k > \ell$.

Tražimo ostatak pri dijeljenju s 30 pa ćemo prvi izraz pomnožiti s 5, a drugi izraz s 2 te tako dobivamo $5n = 30k + 20$ i $2n = 30\ell + 14$.

Oduzmemo od prve jednakosti drugu i redom dobivamo:

$$\begin{aligned} 5n - 2n &= 30k + 20 - (30\ell + 14) \\ 3n &= 30k - 30\ell + 20 - 14 \\ 3n &= 30(k - \ell) + 6 \end{aligned}$$

Podijelimo sve članove ove jednakosti s 3 i dobivamo $n = 10(k - \ell) + 2$.

Budući da je $(k - \ell)$ prirodan broj, slijedi da broj n pri dijeljenju s 10 daje ostatak 2, a to znači da je njegova zadnja znamenka 2.

Zaključujemo da n pri dijeljenju s 30 može dati ostatak 2, 12 ili 22. Provjerimo ove mogućnosti. Zapišimo $n = 30m + r$, gdje je m prirodan broj ili 0.

Ako je $r = 2$, izjednačimo $n = 15\ell + 7$ i $n = 30m + 2$ pa imamo

$$\begin{aligned} 15\ell + 7 &= 30m + 2 \\ 7 &= 30m - 15\ell + 2 \\ 5 &= 30m - 15\ell \end{aligned}$$

Uočimo da lijeva strana jednakosti nije djeljiva sa 15, a desna jest, stoga ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $r = 12$, tada je $n = 30m + 12$, što je djeljivo s 6. No, iz uvjeta zadatka vrijedi da n pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, tako da ovaj slučaj otpada.

Ostaje slučaj $r = 22$. Treba provjeriti postoji li takav n za koji je $n = 30m + 22$. Ako stavimo $m = 1$, tada je $n = 52$. On pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, a pri dijeljenju s 15 ostatak 7 tako da su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. Dakle, jedini mogući ostatak pri dijeljenju broja n s 30 je 22.

Zadatak J-3.5. [30 bodova]

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{3}{3x-y+3} = \frac{7}{10} \\ \frac{3}{x+y} + \frac{1}{y-3x-3} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rješenje.

Uvodimo supstituciju $u = \frac{1}{x+y}$, $v = \frac{1}{3x-y+3}$.

Budući da je

$$\frac{1}{y-3x-3} = \frac{1}{-(3x-y+3)} = -\frac{1}{3x-y+3} = -v,$$

sustav postaje:

$$\begin{cases} 2u + 3v = \frac{7}{10} \\ 3u - v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sada ovaj sustav možemo riješiti bilo kojom metodom, npr. metodom suprotnih koeficijenata: pomnožimo drugu jednadžbu s 3 i zbrojimo je s prvom jednadžbom pa dobivamo: $11u = \frac{22}{10}$, odakle je $u = \frac{1}{5}$.

Uvrštavanjem u u bilo koju od jednažbi dobivamo $v = \frac{1}{10}$.

Budući da je $u = \frac{1}{x+y}$, a $v = \frac{1}{3x-y+3}$, uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za u i v dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3x-y+3} = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Izjednačavanjem nazivnika u razlomcima s istim brojnikom dobivamo sljedeći sustav:

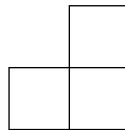
$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-y+3=10. \end{cases}$$

Rješavanjem tog sustava konačno dobivamo jedinstveno rješenje $(x, y) = (3, 2)$.

Zadatak J-3.6. [35 bodova]

Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča dimenzija $n \times 9$ može potpuno prekriti *L-triomino pločicama* (kao na slici) tako da se one međusobno ne preklapaju?

Pločice se mogu rotirati.



Rješenje.

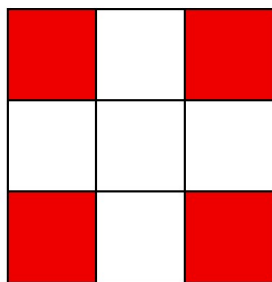
Promatrajmo ploču za male n -ove. Za $n = 1$ očito nema rješenja jer svaka L-triomino pločica pokriva polja u dva reda.

Za $n = 2$, ploča 2×9 se može pokriti na način kao na slici:



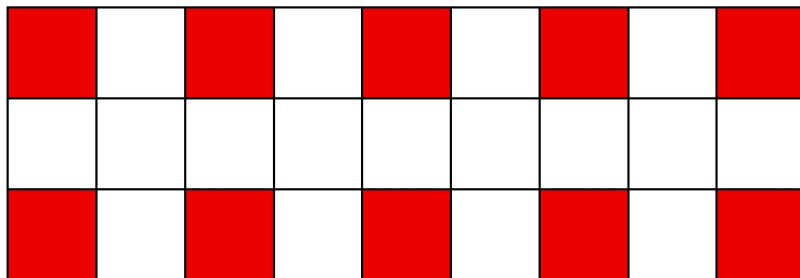
Sada možemo zaključiti i da se ploča $2k \times 9$, za $k \in \mathbb{N}$, može popločati L-triomino pločicama jer možemo spojiti k ploča dimenzija 2×9 , tj. moguće je svako popločavanje kada je n paran broj.

Promatrajmo ploču 3×9 . Da bismo došli do nekog zaključka, promatrimo najprije manju 3×3 ploču.

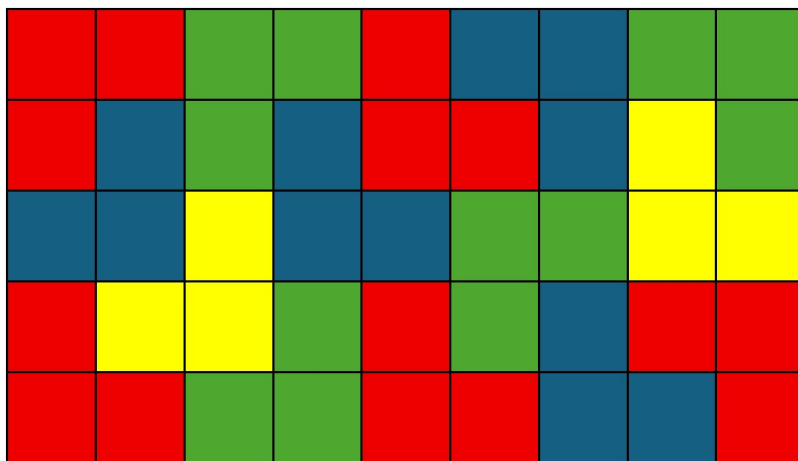


Primijetimo da je za popločavanje svakog označenog polja potrebna zasebna L-triomino pločica, jer jedna L-triomino pločica ne može istovremeno pokriti neka dva od tih polja. Dakle, trebale bi nam najmanje 4 L-triomino pločice, ali one pokrivaju ukupno 12 polja, stoga je popločavanje 3×3 ploče nemoguće.

Analogno tome, za pokrivanje označenih polja na slici unutar 3×9 ploče trebalo bi nam 10 L-triomino pločica koje pokrivaju ukupno 30 polja, ali 3×9 ploča ima samo 27 polja.



Pokušajmo sada popločati ploču 5×9 . To popločavanje je moguće, prikažimo ga:



Budući da je moguće ovo popločavanje, sada je moguće i svako popločavanje ploče dimenzija $(2k+1) \times 9$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, jer možemo spojiti ploču 5×9 i bilo koji broj ploča 2×9 . Drugim riječima, moguće je svako popločavanje kad je n neparan broj veći od 3.

Zaključujemo da se može popločati svaka ploča dimenzija $n \times 9$ za $n \geq 2$, $n \neq 3$.

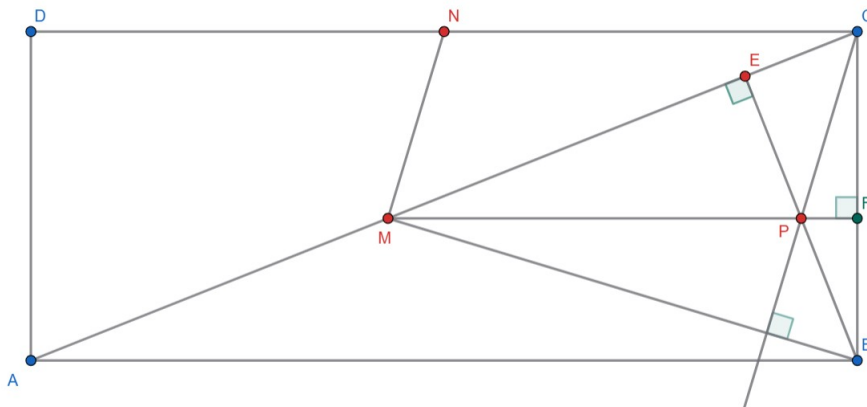
Zadatak J-3.7. [40 bodova]

U pravokutniku $ABCD$ točka E je nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Neka je točka M polovište dužine $\overline{AE}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$.

Dokaži da je $\sphericalangle BMN = 90^\circ$.

Prvo rješenje.

Prvo nacrtajmo skicu i sve zadane elemente na njoj.

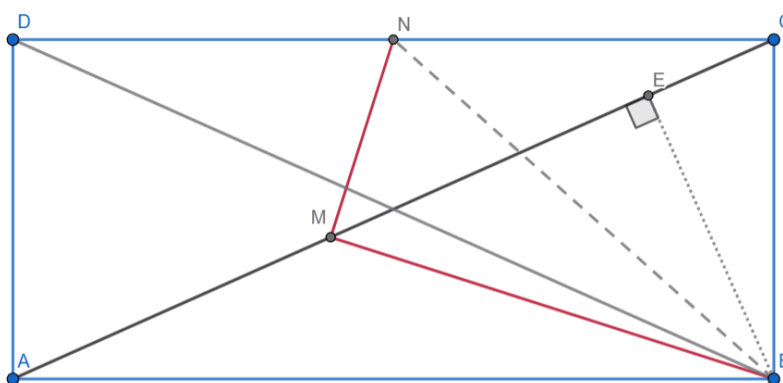


Primijetimo da je dužina $\overline{BE}$ visina trokuta MBC , stoga nacrtajmo visinu iz vrha M te označimo nožište s F . Točka P u kojoj se sijeku te dvije visine je ortocentar trokuta MBC . To znači da je pravac CP okomit na $\overline{MB}$ jer sadrži treću visinu trokuta MBC .

Budući da je točka M polovište od $\overline{AE}$ i zbog $AB \parallel MP$ vrijedi da je $\overline{MP}$ srednjica trokuta ABE što povlači $|MP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD| = |CN|$. Također, zbog $MP \parallel CD$ slijedi da je četverokut $MPCN$ paralelogram.

Sada iz $CP \parallel MN$ i $CP \perp MB$ slijedi $MN \perp MB$, tj. $\sphericalangle BMN = 90^\circ$.

Drugo rješenje.

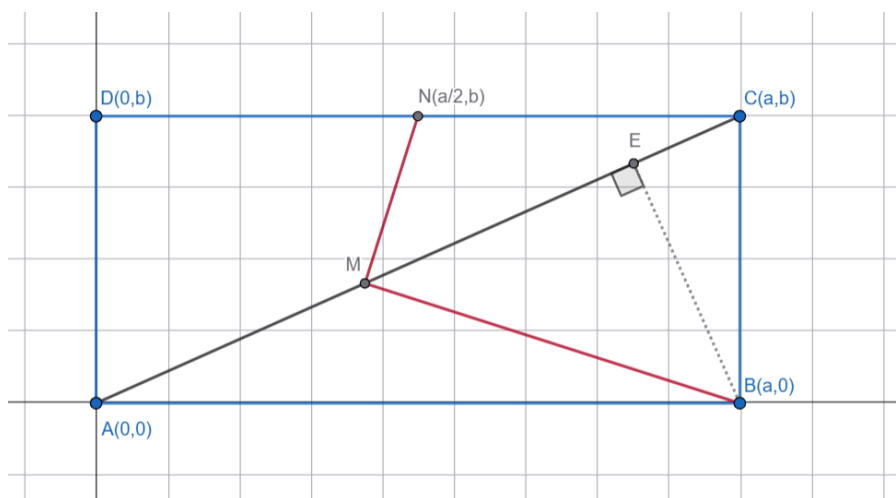


Kako bismo dokazali da je $\sphericalangle BMN = 90^\circ$, dovoljno je dokazati da je četverokut $MBCN$ tetivan. Dokazat ćemo da vrijedi $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BNC$, iz čega će slijediti da su ova dva kuta obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$, što znači da točke M , B , C i N leže na istoj kružnici.

Krenemo od sličnosti trokuta ABC i AEB (podudaraju se u dva kuta). Prebacimo se na trokut DCB , koji je sukladan s ABC , pa vrijedi i $\triangle DCB \sim \triangle AEB$. Sada, kako su u ovim trokutima točke M i N polovišta odgovarajućih stranica, zaključujemo da vrijedi i $\triangle NCB \sim \triangle MEB$ (omjeri stranica se i dalje podudaraju).

Iz posljednje sličnosti upravo dobijemo traženu jednakost veličina kutova $\sphericalangle BNC = \sphericalangle BME = \sphericalangle BMC$.

Treće rješenje.



Postavimo pravokutnik u koordinatni sustav kao na slici, tj. tako da je točka A u ishodištu, točka B ima koordinate $(a, 0)$, gdje je a označena duljina stranice $\overline{AB}$, točka C ima koordinate (a, b) , gdje je b označena duljina stranice $\overline{BC}$, a točka D ima koordinate $(0, b)$. Tada su koordinate točke N jednake $(\frac{a}{2}, b)$.

Koordinate točke E određujemo kao presjek pravaca AC i njemu okomitog pravca iz točke B . Jednadžba pravca AC glasi $y = \frac{b}{a}x$. Svaki njemu okomit pravac ima koeficijent smjera $-\frac{a}{b}$. Želimo da naš pravac prolazi točkom $B(a, 0)$, pa dobijemo da njegova jednadžba glasi $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b}$. Izjednačavanjem ovih jednadžbi i rješavanjem sustava dobijemo da su koordinate točke E jednake $(\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$. Koordinate točke M su polovina odgovarajućih koordinata točke E , jer je M polovište dužine koja spaja ishodište (točku A) i točku E .

Sada preostaje dokazati da su pravci BM i MN okomiti. To znači da za njihove koeficijente smjera k_{BM} i k_{MN} treba vrijediti da im je umnožak jednak -1 . Izračunajmo ove koeficijente smjera:

$$k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)} - 0}{\frac{a^3}{2(a^2+b^2)} - a} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}}{\frac{a^3 - 2a(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}} = \frac{a^2b}{-a^3 - 2ab^2} = -\frac{ab}{a^2 + 2b^2}$$

$$k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)} - b}{\frac{a^3}{2(a^2+b^2)} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a^2b - 2b(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}}{\frac{a^3 - a(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}} = \frac{-a^2b - 2b^3}{-ab^2} = \frac{a^2 + 2b^2}{ab}.$$

Očito vrijedi $k_{BM} \cdot k_{MN} = -1$, čime je tvrdnja dokazana.

Četvrto rješenje.

Posljednje rješenje koje ćemo prezentirati koristi vektore i skalarni umnožak vektora, koji zahtijeva (minimalno) poznavanje trigonometrije. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada vrijedi $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti, pa njihov skalarni umnožak iznosi 0, tj. vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Također, vektori $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{AC}$ su okomiti, pa vrijedi $\overrightarrow{BE} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$.

Želimo pokazati da su vektori $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ okomiti, za što treba pokazati da vrijedi $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$. Izrazimo vektore $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{BE}$. Točka M je polovište dužine AE , pa iz zbrajanja vektora po pravilu paralelograma zaključujemo da vrijedi $\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}}{2} = \frac{-\vec{a} + \overrightarrow{BE}}{2}$.

Vektor $\overrightarrow{NM}$ sada možemo izračunati kao zbroj vektora $\overrightarrow{NB}$ i $\overrightarrow{BM}$, po pravilu trokuta. Stoga vrijedi:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} - \vec{b}.$$

Konačno možemo izračunati vrijednost skalarnog umnoška vektora $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ (pomnožimo odmah sve s 4 da se riješimo nazivnika):

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NM} &= (-\vec{a} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{BE} - 2\vec{b}) = \overrightarrow{BE} \cdot (-\vec{a} - 2\vec{b}) + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BE} + 2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} \\ &= -\underbrace{\overrightarrow{BE} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}_{=0} - \overrightarrow{BE} \cdot \vec{b} + |BE|^2 = -|BE| \cdot \underbrace{|BC| \cdot \cos(\angle CBE)}_{=|BE|} + |BE|^2 \\ &= -|BE|^2 + |BE|^2 = 0. \end{aligned}$$

Ovime je dokaz završen.

Zadatak J-3.8. [45 bodova]

Matematičar Matko želi povući 2023 dijagonale u pravilnom 2026-erokutu S tako da se nikoje dvije od njih ne sijeku. *Raspon* dijagonale d definiramo kao manji broj stranica mnogokuta S između vrhova dijagonale d .

Neka je D najveća razlika raspona dijagonala među svim dijagonalama od S koje je Matko nacrtao. Odredi najmanju vrijednost D koju Matko može postići.

Rješenje.

Označimo s d_{min} raspon najmanje dijagonale i s d_{max} raspon najveće dijagonale. Tada je

$$D = d_{max} - d_{min}.$$

Pokažimo najprije da mora vrijediti $d_{min} = 2$. To će slijediti iz sljedeće leme.

Lema: Najveći broj dijagonala koje se mogu povući bez presijecanja u pravilnom n -terokutu iznosi $n - 3$. Te dijagonale dijele mnogokut na trokute.

Dokaz leme: Ovu tvrdnju možemo dokazati **jakom** (ili **potpunom**) matematičkom indukcijom. Jasno je da za $n = 3$ ne možemo povući ni jednu dijagonalu, a za $n = 4$ možemo jednu, koja raspolažlja četverokut na dva trokuta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 3, 4, \dots, k$. Pokazat ćemo da vrijedi i za $k + 1$. Povucimo bilo koju dijagonalu u konveksnom $(k + 1)$ -terokutu. Ona ga dijeli na n_1 -terokut i n_2 -terokut, gdje je

$$n_1 + n_2 = (k + 1) + 2 = k + 3$$

jer ova dva mnogokuta dijele 2 vrha. Oдавde je $n_2 = k + 3 - n_1$. Sve dijagonale koje dalje povlačimo moraju biti sadržane unutar jednog od dva manja mnogokuta, jer bi inače dijagonala sjekla početnu dijagonalu. U n_1 -terokutu po pretpostavci indukcije možemo povući maksimalno $n_1 - 3$ dijagonale koje se ne sijeku, a u n_2 -terokutu $n_2 - 3 = k - n_1$ dijagonale. Ove dijagonale dijele manje mnogokute na trokute. Uključujući dijagonalu koja dijeli mnogokut na dva, imamo da je ukupan maksimalni broj dijagonala koje se ne sijeku u velikom mnogokutu jednak

$$1 + (n_1 - 3) + (k - n_1) = k - 2 = (k + 1) - 3.$$

Kako su manji mnogokuti podijeljeni na trokute, i veliki mnogokut će biti podijeljen na trokute, jer je dobiven spajanjem dva manja mnogokuta. Stoga tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. $\square$

Pretpostavimo sada da je $d_{min} = k > 2$. Ta dijagonala s $k - 1$ vrhova između njenih krajeva čini $(k + 1)$ -terokut u kojem Matko nije povukao niti jednu dijagonalu. No, to je kontradikcija s lemom, jer $k + 1 > 3$, pa 2026-erokut ne bi bio podijeljen na trokute s povučenih $2023 = 2026 - 3$ dijagonale.

Preostaje sada minimizirati vrijednost d_{max} . U nastavku dokazujemo da najmanji d_{max} koji Matko može postići iznosi $M := \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil = 676$. Za nesusjedne vrhove U i V mnogokuta S označit ćemo s $d(\overline{UV})$ raspon dijagonale $\overline{UV}$ te s $\widehat{UV}$ skup svih vrhova mnogokuta S koji su u rasponu dijagonale $\overline{UV}$ (dakle, svi vrhovi mnogokuta S koji se nalaze između vrhova U i V , uključujući i njih, i to „s kraće strane”).

Pokažimo najprije da se $d_{max} = M$ može postići. Označimo vrhove 2026-erokuta S redom s $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$, počevši od proizvoljnog. Povucimo prvo dijagonale $A_1A_{677}, \overline{A_{677}A_{1352}}$ i $\overline{A_{1352}A_1}$. Time smo S podijelili na 677-erokut $A_1A_2 \dots A_{677}$, dva 676-erokuta $A_{677}A_{678} \dots A_{1352}$ i $A_{1352}A_{1353} \dots A_1$ i jedan trokut $A_1A_{677}A_{1352}$. Veće mnogokokute možemo podijeliti na trokute s ukupno $(677-3) + 2 \cdot (676-3) = 2020$ dijagonala. Zajedno s prve tri dijagonale, ovo čini podjelu mnogokuta S na trokute s ukupno 2023 dijagonale. Jasno je da u ovom slučaju vrijedi $d_{max} = d(A_1A_{677}) = 676$.

Dokažimo sada kontradikcijom da je $d_{max} < M$ nemoguće postići. Pretpostavimo suprotno, tj. da Matko može povući 2023 dijagonale u mnogokutu S tako da je maksimalni raspon dijagonale koji je postigao manji od M . Neka je $\overline{AB}$ neka od dijagonala s najvećim rasponom, tj. vrijedi $d(AB) = d_{max} < M$. Uzmimo točku $C \notin \widehat{AB}$ takvu da je Matko povukao dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ – ova točka sigurno postoji jer je mnogokut S podijeljen na trokute s 2023 dijagonale koje se ne sijeku, pa dijagonala AB mora s obje strane biti dio nekog trokuta. Ako je sada $\widehat{AB} \subset \widehat{AC}$ ili $\widehat{AB} \subset \widehat{BC}$, tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom. Stoga mora biti $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA} = S$, a to znači da je suma raspona stranica trokuta ABC jednaka 2026. Kako je raspon od $\overline{AB}$ manji od $M = \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil$, barem jedna od stranica $\overline{BC}$ ili $\overline{CA}$ ima raspon veći ili jednak M . No tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom – kontradikcija. Zaključujemo da je najbolje što Matko može postići $d_{max} = 676$ i $d_{min} = 2$, odnosno da je $D = 674$.