



MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026.

Loomen

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Pokraj svakog zadatka naznačeno je s koliko bodova se ocjenjuje. Za ukupni rezultat na pojedinom kolu zbrajaju se bodovi s 4 najbolje ocijenjena zadatka.

Osim konačnog rezultata vrednuje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

Zadaci

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

U jednoj džungli živi nekoliko orangutana. Svaka dva orangutana su prijatelji ili su neprijatelji. Svaki orangutan ima točno tri neprijatelja. Orangutani se drže pravila: „Neprijatelj mog prijatelja je i moj neprijatelj“.

Koliko orangutana živi u toj džungli?

Zadatak S-4.2. [15 bodova]

Riješi sustav jednadžbi:

$$\frac{5xy}{x+y} = 12, \quad \frac{5yz}{y+z} = 18, \quad \frac{5zx}{z+x} = 36.$$

Zadatak S-4.3. [20 bodova]

Odredi sve proste brojeve p i q takve da p dijeli $q^2 - 4$ i q dijeli $p^2 - 1$.

Zadatak S-4.4. [25 bodova]

Neka je ABC jednakokračan trokut u kojem je $|AB| = |AC|$. Tangenta na opisanu kružnicu k trokuta ABC , paralelna s $\overline{BC}$, dodiruje kružnicu k u točki E , gdje je $E \neq A$, i siječe pravac AB u točki D .

Neka je F presjek dužine $\overline{CD}$ s kružnicom k . Ako je F središte upisane kružnice trokuta BDE , odredi kutove trokuta ABC .

Zadatak S-4.5. [30 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $n^2 + 2^n$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak S-4.6. [35 bodova]

Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima, stupnja $n \geq 5$ i s pozitivnim vodećim koeficijentom takav da je $P(0) = 0$ te da ima točno n različitih cjelobrojnih nultočaka.

Dokaži da su sve cjelobrojne nultočke polinoma $P(P(x))$ ujedno i nultočke polinoma $P(x)$.

Zadatak S-4.7. [40 bodova]

Medvjedica Lina i medo Lino igraju sljedeću igru na školskoj ploči. Prvo Lina napiše konačno mnogo različitih prirodnih brojeva na ploču. Nakon toga Lino može raditi sljedeće poteze s brojevima koji se trenutno nalaze na ploči:

- (i) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 1$ na ploči brojem $n - 2$
- (ii) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 4$ brojem $n - 1$.

Lino može raditi gornje poteze koliko god puta želi (i može). Tijekom igre na ploči se mogu pojaviti negativni brojevi te se brojevi na ploči mogu ponavljati.

Postoji li najmanji broj koji Lina i Lino mogu dobiti na ploči igranjem ove igre? Ako postoji, odredi ga.

Zadatak S-4.8. [45 bodova]

Četverokutu $ABCD$ upisana je kružnica k . Neka je točka O sjecište pravaca AB i CD . Neka je k_1 kružnica koja dira stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a k_2 kružnica koja dira stranicu $\overline{AD}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka je K točka u kojoj k_1 dira $\overline{BC}$ i L točka u kojoj k_2 dira $\overline{AD}$.

Pretpostavimo da se točke O , K i L nalaze na istom pravcu. Dokaži da se tada polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ te središte kružnice k također nalaze na istom pravcu.