

MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-4.1. [10 bodova]

Najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13 uvećan je za njegovu trinaestinu.

Odredi dobiveni broj.

Rješenje.

Odredimo prvo najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13. Provjerimo koji ostatak pri dijeljenju s 13 daje 1000 (najmanji četveroznamenasti broj):

$$1000 : 13 = 76 \text{ i ostatak } 12.$$

Dakle, $1000 = 13 \cdot 76 + 12$, odnosno

$$1001 = 1000 + 1 = 13 \cdot 76 + 12 + 1 = 13 \cdot 76 + 13 = 13 \cdot 77.$$

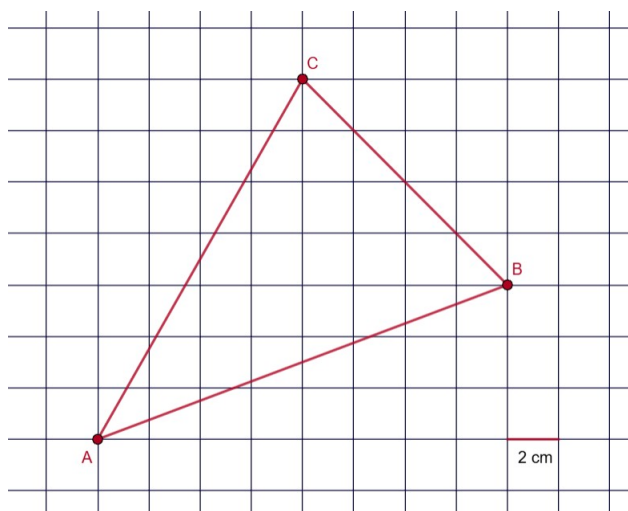
Zaključujemo da je 1001 najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13. Kako je $1001 = 13 \cdot 77$, trinaestina broja 1001 jednaka je $1001 : 13 = 77$. Uvećamo li najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13 njegovom trinaestinom dobivamo

$$1001 + 77 = 1078.$$

Zadatak K-4.2. [15 bodova]

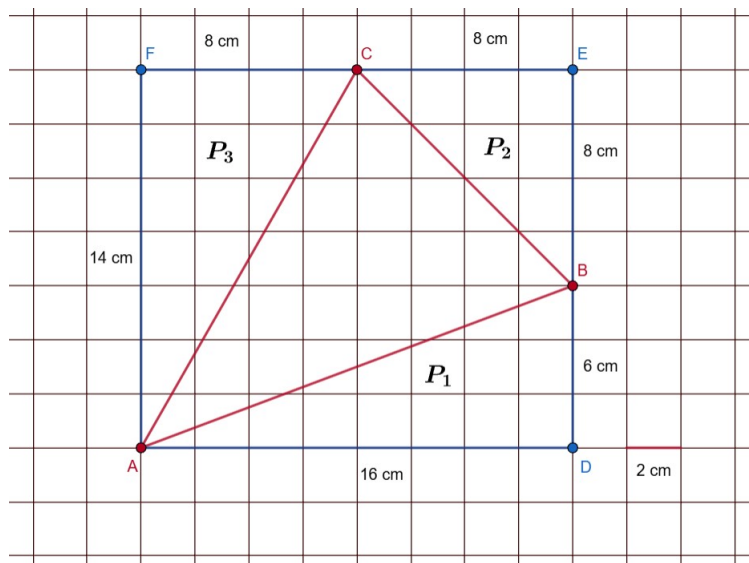
Trokut ABC smješten je u kvadratnu mrežu u kojoj je duljina stranice kvadratića 2 cm.

Izračunaj površinu trokuta ABC .



Rješenje.

„Zapakirajmo” trokut ABC unutar pravokutnika $ADEF$ tako da vrhovi trokuta B i C pripadaju redom stranicama pravokutnika $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$.



Duljine stranica dobivenog pravokutnika su 16 cm i 14 cm pa mu je površina jednaka $16 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} = 224 \text{ cm}^2$.

Označimo s P_1 , P_2 i P_3 površine trokuta ADB , BEC i CFA . Odredimo te površine:

$$P_1 = 16 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} : 2 = 48 \text{ cm}^2.$$

$$P_2 = 8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} : 2 = 32 \text{ cm}^2.$$

$$P_3 = 8 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} : 2 = 56 \text{ cm}^2.$$

Površina P trokuta ABC jednaka je razlici površine pravokutnika i zbroja površina P_1 , P_2 i P_3 pa slijedi:

$$P = 224 - (P_1 + P_2 + P_3) = 224 - (48 + 32 + 56) = 224 - 136 = 88 \text{ cm}^2.$$

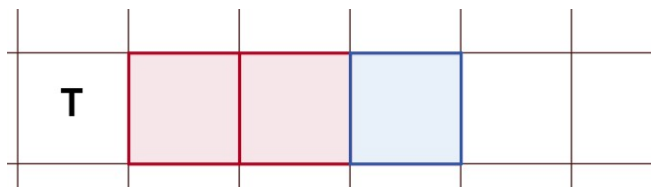
Zadatak K-4.3. [20 bodova]

Toma, Branko i Sven zajedno su skupili 67 bodova na školskom natjecanju iz matematike. Znamo da je Branko osvojio dvostruko više bodova od dvije trećine Tomina broja bodova, a Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova.

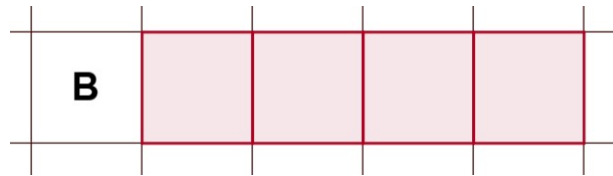
Koliko je bodova osvojio svatko od njih?

Prvo rješenje.

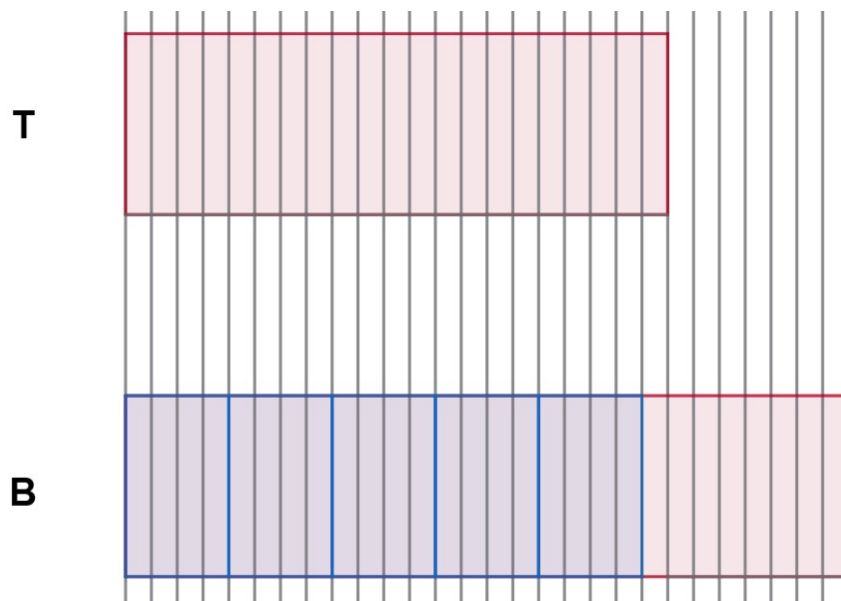
Prikažimo osvojene bodove triju natjecatelja kao pravokutnike. Prvo nacrtajmo pravokutnik koji će predstavljati Tomine bodove i podijelimo ga na tri jednaka dijela pa obojimo dva dijela istom bojom.



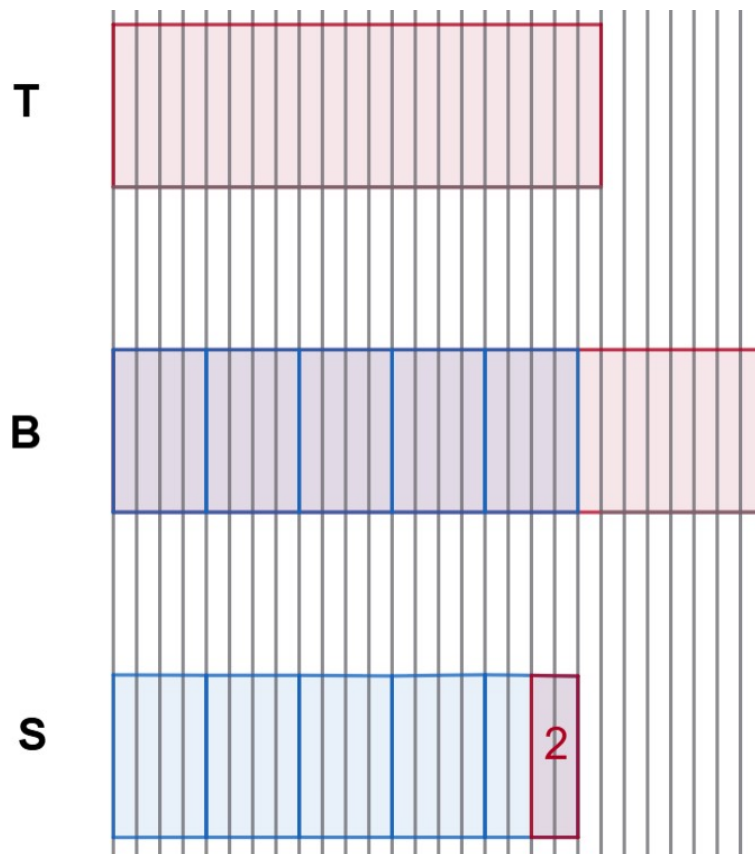
Ta dva dijela predstavljaju dvije trećine Tominih bodova, a Branko je osvojio dva puta više od toga pa ćemo njegove bodove prikazati pomoću 4 takva dijela, tj. Branko je osvojio četiri trećine Tominih bodova.



Budući da je Sven osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova, da bismo prikazali njegove bodove, potrebno je svaki djelić podijeliti na sedmine, a to bi značilo da smo Tomine bodove podijelili na dvadesetjednine. Branko je tada osvojio $\frac{28}{21}$ Tominih bodova.



Budući da je $\frac{5}{7}$ od 28 jednako $28 : 7 \cdot 5 = 20$, Sven je osvojio 2 boda manje od $\frac{20}{21}$ Tominih bodova.



Ako označimo sa x dvadesetjedninu Tominih osvojenih bodova, tada je ukupan broj Tominih bodova $21x$, Brankovih $28x$, a Svenovih $20x - 2$. Budući da je zbroj svih njihovih bodova jednak 67, slijedi jednačba:

$$\begin{aligned} 21x + 28x + 20x - 2 &= 67 \\ 69x - 2 &= 67 \\ 69x &= 69 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dakle, Toma je osvojio $21 \cdot 1 = 21$ bod, Branko $28 \cdot 1 = 28$ bodova, a Sven $20 \cdot 1 - 2 = 18$ bodova.

Drugo rješenje.

Označimo s T broj Tominih bodova, s B broj Brankovih bodova i sa S broj Svenovih bodova.

Branko je osvojio dvostruko više od dvije trećine Tominih bodova pa vrijedi

$$B = 2 \cdot \frac{2}{3}T = \frac{4}{3}T.$$

Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova pa vrijedi

$$S = \frac{5}{7}B - 2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}T - 2 = \frac{20}{21}T - 2.$$

Zajedno su skupili 67 bodova pa imamo.

$$T + \frac{4}{3}T + \frac{20}{21}T - 2 = 67,$$

gdje nakon pojednostavljivanja dobivamo

$$\frac{69}{21}T = 69,$$

odakle je $T = 21$. Dalje uvrštavanjem umjesto T dobivamo $B = 28$ i $S = 18$.

Zadatak K-4.4. [25 bodova]

Organizacijski odbor dječje utrke „Mali brzići” nabavlja pobjedničko postolje za svečanost proglašenja najboljih trkača. Postolje se sastoji od tri platforme, za prvo, drugo i treće mjesto. Kada se postolje gleda sprijeda, vide se tri pravokutnika jednake širine, posložena tako da najviša platforma stoji u sredini, a svaka sljedeća (za drugo i treće mjesto) je 5 cm niža od prethodne. Organizatori žele da sve dimenzije tih pravokutnika budu cjelobrojne (u cm) te da ukupna površina tih triju pravokutnika iznosi 2700 cm^2 . Također, širina pojedine platforme treba biti veća od zbroja visina svih platformi, a najniža platforma treba biti visine barem 5 cm.

Koliko može iznositi visina platforme za 1. mjesto?



Rješenje.

Označimo s x duljinu jedne platforme, a s y visinu platforme za treće mjesto. Tada je $y + 5$ visina platforme za drugo mjesto, a $y + 10$ visina platforme za prvo mjesto.

Budući da je ukupna površina jednaka 2700 cm^2 , vrijedi:

$$x \cdot y + x \cdot (y + 5) + x \cdot (y + 10) = 2700$$

$$x \cdot (y + y + 5 + y + 10) = 2700$$

$$x \cdot (3y + 15) = 2700$$

Nakon rastavljanja broja 2700 na proste faktore dobivamo

$$x \cdot (3y + 15) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Sada množimo proste faktore tako da na kraju dobijemo dva faktora koji predstavljaju x i $3y + 15$ i tražimo rješenja. Pri tome imamo na umu da izraz $3y + 15$ predstavlja zbroj visina svih platformi, a prema uvjetima zadatka mora vrijediti $x > 3y + 15$. Također, najniža platforma visine y mora biti barem 5 cm pa je izraz $3y + 15 \geq 3 \cdot 5 + 15 = 30$.

Taj broj 30 možemo dobiti iz prostih faktora $2 \cdot 3 \cdot 5$ pa za stvaranje drugog faktora ostaje $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

Sljedeći broj po veličini koji možemo dobiti za $3y + 15$ je 36 kao umnožak $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ pa za stvaranje faktora x ostaje $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

Na sličan način tražimo dalje; odredimo vrijednost izraza $3y + 15$ kombinirajući moguće proste faktore, a zatim računamo vrijednost od x . Prikazujemo sve moguće rezultate u tablici:

x	90	75	60	54
$3y + 15$	30	36	45	50

Dakle, $3y + 15$ može poprimiti vrijednosti 30, 36, 45 i 50 prema uvjetima zadatka, ali 50 nije moguće rješenje jer 50 nije djeljiv s 3, odnosno tada y ne bi bio cijeli broj.

Dakle, $y \in \{5, 7, 10\}$, a to znači da visina platforme za prvo mjesto $y + 10$ može biti 15 cm, 17 cm ili 20 cm.

Zadatak K-4.5. [30 bodova]

Odredi sve moguće proste brojeve p i q te prirodan broj n takve da vrijedi $2p + 3q + 4n = 2026$.

Rješenje.

Budući da je 2026 paran broj, izraz na lijevoj strani jednakosti također mora biti paran broj. Budući da su $2p$ i $4n$ sigurno parni kao višekratnici broja 2, također i $3q$ mora biti paran broj. Taj broj će biti djeljiv s 2 ako je q djeljiv s 2, a to je moguće samo ako je $q = 2$ jer q mora biti prost broj.

Uvrstimo u izraz $q = 2$ nakon sređivanja imamo $2p + 4n = 2020$, a nakon dijeljenja s 2 dobivamo $p + 2n = 1010$.

Slično kao i prije, 1010 je paran broj, stoga i izraz na lijevoj strani mora biti paran, a to će biti ako je p paran, a zbog toga što je p prost, mora vrijediti $p = 2$.

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo $2n = 1008$, odnosno $n = 504$.

Zadatak K-4.6. [35 bodova]

Pet pjevačica, Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela, otpjevale su neki broj pjesama na humanitar-nom koncertu. Svaku su pjesmu otpjevale zajedno tri pjevačice. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je pjevačica pjevala samo jednom. Antonija je otpjevala najviše, i to 8, a Ivana najmanje, i to 5 pjesama.

Koliko je ukupno pjesama otpjevano na ovom koncertu?

Napomena: potrebno je pokazati da se dobiveni broj pjesama doista može postići u skladu s uvjetima zadatka.

Rješenje.

Označimo s A , I , K , L i M broj pjesama koje su otpjevale redom Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela. Znamo da vrijedi $A = 8$ i $I = 5$. Također, $5 < K, L, M < 8$ pa K , L i M mogu biti jednaki 6 ili 7.

Neka je n ukupni broj otpjevanih pjesama. Budući da su svaku pjesmu otpjevale 3 pjevačice, vrijedi $A + I + K + L + M = 3n$, odnosno

$$8 + 5 + K + L + M = 3n.$$

Desna strana jednakosti djeljiva je s 3 pa zato i $13 + K + L + M$ mora biti djeljivo s 3. Promatramo mogućnosti za broj pjesama koje su otpjevale Korina, Lucija i Mirela.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 6 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 6 + 6 + 6 = 31$, što nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.
- Ako je jedna od njih otpjevala 7 pjesama, a preostale dvije po 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 6 + 6 = 32$. To ponovno nije djeljivo s 3 pa taj slučaj nije moguć.
- Ako su dvije od njih otpjevale po 7 pjesama, a jedna 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 6 = 33$. Kako je 33 djeljiv s 3, zaključujemo da ukupan broj pjesama može biti $33 : 3 = 11$.
- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 7 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 7 = 34$, što ponovno nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.

Dobili smo jednu mogućnost za ukupan broj otpjevanih pjesama, ali preostaje nam provjeriti je li moguće postići 11 otpjevanih pjesama na način da je Antonija otpjevala 8, Ivana 5, dvije od preostalih djevojaka po 7 i jedna 6 pjesama te tako da su svaku pjesmu otpjevale po 3 djevojke.

Pretpostavimo da su Antonija i Ivana otpjevale 5 pjesama skupa, a Antonija još 3 bez Ivane. Preostale tri pjesme tada su morale otpjevati Korina, Lucija i Mirela:

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	
2	Antonija	Ivana	
3	Antonija	Ivana	
4	Antonija	Ivana	
5	Antonija	Ivana	
6	Antonija		
7	Antonija		
8	Antonija		
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Pretpostavimo da su Korina i Lucija otpjevale po 7 pjesama, a Mirela 6. Ako su pjesme 6, 7 i 8 otpjevale Antonija, Korina i Lucija, tada Korini i Luciji nedostaje po jedna pjesma. Ako su pjesme 1 i 2 otpjevale Antonija, Ivana i Korina ili Lucija, tada je Mirela morala otpjevati pjesme 3, 4 i 5 čime su zadovoljeni svi uvjeti.

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	Korina
2	Antonija	Ivana	Lucija
3	Antonija	Ivana	Mirela
4	Antonija	Ivana	Mirela
5	Antonija	Ivana	Mirela
6	Antonija	Korina	Lucija
7	Antonija	Korina	Lucija
8	Antonija	Korina	Lucija
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Ovo je samo jedan od mogućih rasporeda za koji su zadovoljeni svi uvjeti. Zaključujemo da je na koncertu otpjevano ukupno 11 pjesama.

Zadatak K-4.7. [40 bodova]

Koliko ima brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno 6 djelitelja?

Rješenje.

Svaki prirodni broj veći od 1 može se zapisati kao umnožak prostih brojeva. Na primjer,

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5 \quad 32 = 2^5.$$

Postoji jednostavno pravilo za prebrojavanje djelitelja. Ako je broj zapisan kao umnožak svojih prostih faktora

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k},$$

tada je broj njegovih djelitelja jednak $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$.

Na primjer:

- $12 = 2^2 \cdot 3^1$, eksponenti su 2 i 1, pa je broj djelitelja $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$.
- $15 = 3 \cdot 5^1$, eksponenti su 1 i 1, pa je broj djelitelja $(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$.

- $32 = 2^5$, eksponent je 5, pa je broj djelitelja $5 + 1 = 6$.

Zašto ovo pravilo vrijedi? Pogledajmo opet broj $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Svaki djelitelj broja 12 nastaje tako da za faktor 2 odaberemo eksponent 0, 1 ili 2 (to su 3 mogućnosti), a za faktor 3 odaberemo eksponent 0 ili 1 (to su 2 mogućnosti). Ukupno tako imamo $3 \cdot 2 = 6$ kombinacija, i svaka daje drugi djelitelj:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1, \quad 2^1 \cdot 3^0 = 2, \quad 2^2 \cdot 3^0 = 4, \quad 2^0 \cdot 3^1 = 3, \quad 2^1 \cdot 3^1 = 6, \quad 2^2 \cdot 3^1 = 12.$$

Brojevi koji imaju točno 6 djelitelja su oni za koje vrijedi

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1) = 6.$$

Broj 6 možemo zapisati kao umnožak brojeva većih od 1 na samo dva načina, pa imamo samo dva slučaja:

- 1. slučaj: $6 = 6$, što znači da imamo samo jedan prosti faktor s eksponentom $a_1 = 5$ (jer $a_1 + 1 = 6$). Dakle, broj je oblika $n = p^5$, gdje je p prosti broj.
- 2. slučaj: $6 = 3 \cdot 2$, što znači da imamo dva različita prosta faktora s eksponentima $a_1 = 2$ i $a_2 = 1$ (jer $a_1 + 1 = 3$ i $a_2 + 1 = 2$). Dakle, broj je oblika $n = p^2 \cdot q$, gdje su p i q različiti prosti brojevi.

Prebrojimo sada sve takve brojeve manje od 10 000.

1. $n = p^5$

Trebamo pronaći sve proste brojeve p takve da je $p^5 < 10\,000$:

- $p = 2$: $2^5 = 32 < 10\,000$
- $p = 3$: $3^5 = 243 < 10\,000$
- $p = 5$: $5^5 = 3125 < 10\,000$
- $p = 7$: $7^5 = 16\,807 > 10\,000$

Za sve proste brojeve veće od 5 peta potencija prelazi 10 000, pa ih ne računamo.

U ovom slučaju dobivamo 3 broja: 32, 243 i 3125.

2. $n = p^2 \cdot q$

Ovdje su p i q različiti prosti brojevi, a uvjet je $p^2 \cdot q < 10\,000$.

Iz toga slijedi da q mora zadovoljavati:

$$q < 10\,000 : p^2.$$

Za svaki prosti broj p trebamo prebrojiti koliko ima prostih brojeva q (različitih od p) koji su manji od $10\,000 : p^2$.

Rezultati su prikazani u sljedećoj tablici. Za svaki p , gornja granica za q dobije se tako da izračunamo $9999 : p^2$ i uzmemo cijeli dio tog broja (jer $p^2 \cdot q$ mora biti manji od 10 000, tj. najviše 9999). Stupac *najveći mogući q* sadrži najveći prosti broj koji zadovoljava oba uvjeta ($q \leq$ granica i $q \neq p$), a stupac *broj rješenja* daje ukupan broj takvih prostih brojeva q .

p	p^2	gornja granica za q	najveći mogući q	broj rješenja
2	4	2499	2477	366
3	9	1111	1109	185
5	25	399	397	77
7	49	204	199	45
11	121	82	79	21
13	169	59	59	16
17	289	34	31	10
19	361	27	23	8
23	529	18	17	7
29	841	11	11	5
31	961	10	7	4
37	1369	7	7	4
41	1681	5	5	3
43	1849	5	5	3
47	2209	4	3	2
53	2809	3	3	2
59	3481	2	2	1
61	3721	2	2	1
67	4489	2	2	1
Ukupno:				761

Za $p = 71$ imamo $p^2 = 5041$, pa čak ni uz najmanji mogući $q = 2$ ne dobivamo broj manji od 10 000 (jer je $5041 \cdot 2 = 10\,082 > 10\,000$). Zato se u tablici ne pojavljuju prosti brojevi $p \geq 71$.

Objasnimo na primjeru kako čitati tablicu. Pogledajmo redak s $p = 7$:

- $p^2 = 49$
- Gornja granica: $9999 : 49 = 204,06 \dots$, cijeli dio je 204. Dakle, q može biti najviše 204.
- Prostih brojeva manjih ili jednakih 204 ima ih ukupno 46 (to su 2, 3, 5, 7, 11, $\dots$, 197, 199).
- Iz tog popisa moramo izbaciti $q = 7$ jer mora biti $q \neq p$. Ostaje $46 - 1 = 45$ prostih brojeva.
- Najveći među njima je 199.

Zbrojimo rezultate iz oba slučaja:

$$\underbrace{3}_{\text{slučaj } p^5} + \underbrace{761}_{\text{slučaj } p^2 \cdot q} = \boxed{764}.$$

Dakle, postoji točno 764 prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno 6 djelitelja.

Napomena: Umjesto da raspisujemo redom po prostim brojevima p mogli smo raspisivati redom po prostim brojevima q , ali u tom slučaju dobili bismo vrlo veliki broj slučajeva.

Zadatak K-4.8. [45 bodova]

Uoči Valentinova, cvjećar Vlatko ima pune ruke posla i treba brzo sastavljati bukete. Na raspolaganju ima 4 vrste cvijeća: ruže, tulipane, karanfile i ljiljane. Planira sastaviti bukete od po 11 cvjetova.

Koliko različitih vrsta buketa Vlatko može sastaviti ako

- a) nije nužno staviti svaku vrstu cvijeća u buket,
- b) barem 1 cvijet svake vrste mora biti u buketu?

Vrste buketa se međusobno razlikuju po broju cvjetova pojedine vrste. Primjerice, jedna vrsta buketa sadrži 2 ruže, 5 tulipana i 4 ljiljana (bez karanfila), a druga vrsta sadrži 1 ružu, 5 tulipana, 2 ljiljana i 3 karanfila.

Pretpostavljamo da Vlatko ima dovoljno cvijeća svake vrste za sve bukete koje će napraviti.

Rješenje.

Ovaj zadatak je primjena **metode štapića i kuglica** te možemo izraziti ekvivalentni zadatak: Na koliko načina možemo 11 različitih kuglica podijeliti u 4 skupine tako da:

- a) nije nužno da se u svakoj skupini nalazi kuglica,
- b) barem 1 kuglica mora biti u svakoj skupini?

Zamislamo da kuglice dijelimo u skupine tako da ih razdvojimo štapićima. Za stvoriti četiri skupine nam trebaju tri štapića. Slijedi jedan primjer kako to možemo napraviti:

• • | • • • | • • • • | • •

Za naš zadatak bi to značilo da se u buketu nalaze 2 ruže, 3 tulipana, 4 karanfila i 2 ljiljana.

Promatrajmo sada posebno svaki podzadatak.

a) U ovom dijelu zadatka moguća je sljedeća situacija:

• • • • • || • • • • | • •

Ovo konkretno znači da je moguće da imamo 5 ruža, nijedan tulipan, 4 karanfila i 2 ljiljana. S obzirom da tako možemo postaviti kuglice i štapiće na bilo koja mjesta, zaključujemo da imamo 14 pozicija za 14 predmeta pa prvi štapić možemo postaviti 14 načina, drugi štapić na 13 načina, a treći na 12 načina. Ukupno je to $14 \cdot 13 \cdot 12$ načina.

Ipak, budući da štapiće ne razlikujemo, taj umnožak treba podijeliti sa brojem mogućih međusobnih razmjesta tih štapića, a budući da imamo 3 štapića, njih možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina. Dakle, broj mogućih buketa u **a)** zadatku je

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364.$$

b) Budući da u svakoj skupini mora biti barem jedna kuglica, ne smijemo postavljati štapiće jedan za drugim, kao ni na početak ili kraj niza. To znači da ih možemo smještati između 11 kuglica za što imamo 10 mogućnosti. Dakle, prvi štapić možemo postaviti na 10 načina, drugi na 9, a treći na 8, no opet, budući da štapiće ne razlikujemo, trebamo podijeliti umnožak $10 \cdot 9 \cdot 8$ sa brojem međusobnih razmjesta tih štapića, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Dakle, broj mogućih buketa u **b)** zadatku je

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Napomena: Ekvivalentan zadatak bi bio odrediti broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

gdje su:

- a) x_1, x_2, x_3 i x_4 nenegativni cijeli brojevi,
- b) x_1, x_2, x_3 i x_4 prirodni brojevi.