

MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-4.1. [10 bodova]

Toma, Branko i Sven zajedno su skupili 67 bodova na školskom natjecanju iz matematike. Znamo da je Branko osvojio dvostruko više bodova od dvije trećine Tomina broja bodova, a Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova.

Koliko je bodova osvojio svatko od njih?

Rješenje.

Označimo s T broj Tominih bodova, s B broj Brankovih bodova i sa S broj Svenovih bodova.

Branko je osvojio dvostruko više od dvije trećine Tominih bodova pa vrijedi

$$B = 2 \cdot \frac{2}{3}T = \frac{4}{3}T.$$

Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova pa vrijedi

$$S = \frac{5}{7}B - 2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}T - 2 = \frac{20}{21}T - 2.$$

Zajedno su skupili 67 bodova pa imamo.

$$T + \frac{4}{3}T + \frac{20}{21}T - 2 = 67,$$

gdje nakon pojednostavljivanja dobivamo

$$\frac{69}{21}T = 69,$$

odakle je $T = 21$. Dalje uvrštavanjem umjesto T dobivamo $B = 28$ i $S = 18$.

Zadatak J-4.2. [15 bodova]

Ako brojeve 1995 i 2026 podijelimo istim brojem, dobit ćemo redom ostatke 52 i 16.

S kojim brojem smo podijelili dane brojeve?

Rješenje.

Označimo s n traženi broj. Tada vrijedi $1995 = nk + 52$ i $2026 = nl + 16$ gdje su k i l prirodni brojevi.

Oduzimanjem 52 iz prve te 16 iz druge jednakosti dobivamo $1943 = nk$ i $2010 = nl$. Ovo znači da je n zajednički djeljitelj brojeva 1943 i 2010.

Rastavom tih brojeva na proste faktore dobivamo $1943 = 67 \cdot 29$ i $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

Broj 67 je jedini zajednički djelitelj (osim 1) ovih brojeva, tako da je $n = 67$.

Zadatak J-4.3. [20 bodova]

U dvije posude spremljene su dvije nijanse tempere ljubičaste boje, dobivene miješanjem crvene i plave tempere. U prvoj posudi je pomiješano 8 litara crvene i 7 litara plave tempere, a u drugoj posudi 11 litara crvene i 9 litara plave tempere. Iz obje posude izvađeno je istovremeno po 7 litara tempere te je zatim izvađeni dio iz prve posude uliven u drugu i obratno.

Od koliko se litara crvene, a od koliko plave tempere sastoji ljubičasta tempera u svakoj od posuda nakon prelijevanja?

Rješenje.

Analizirajmo sastav smjese u svakoj od posuda. U prvoj posudi pomiješano je 8 litara crvene i 7 litara plave boje pa crvena boja čini $\frac{8}{8+7}$ te smjese, a plava boja $\frac{7}{8+7}$ smjese. U drugoj posudi pomiješano je 11 litara crvene i 9 litara plave boje pa crvena boja čini $\frac{11}{11+9}$ te smjese, a plava boja $\frac{9}{11+9}$ smjese. Udjeli se proporcionalno prenose u bilo koju količinu pojedine smjese:

posuda	prva posuda		druga posuda	
boja	crvena	plava	crvena	plava
u 1 litri smjese	$\frac{8}{15}$ litre	$\frac{7}{15}$ litre	$\frac{11}{20}$ litre	$\frac{9}{20}$ litre
u 7 litara smjese	$7 \cdot \frac{8}{15} = \frac{56}{15}$ litre	$7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15}$ litre	$7 \cdot \frac{11}{20} = \frac{77}{20}$ litre	$7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20}$ litre
u ostatku smjese	$8 \cdot \frac{8}{15} = \frac{64}{15}$ litre	$8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15}$ litre	$13 \cdot \frac{11}{20} = \frac{143}{20}$ litre	$13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20}$ litre

U četvrtom retku tablice sada imamo količine crvene i plave boje koje smo odlili iz pojedine posude, a u petom retku količine boje koje su ostale u odgovarajućoj posudi. Nakon ulijevanja po 7 litara u suprotne posude imamo sljedeće količine boja po posudama:

posuda	prva posuda		druga posuda	
boja	crvena	plava	crvena	plava
bilo u posudi (litara)	$\frac{64}{15}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{143}{20}$	$\frac{117}{20}$
doliveno (litara)	$\frac{77}{20}$	$\frac{63}{20}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{49}{15}$
ukupno (litara)	$\frac{64}{15} + \frac{77}{20} = 8\frac{7}{60}$	$\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = 6\frac{53}{60}$	$\frac{143}{20} + \frac{56}{15} = 10\frac{53}{60}$	$\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = 9\frac{7}{60}$

Nakon prelijevanja u prvoj posudi nalazi se $8\frac{7}{60}$ litara crvene i $6\frac{53}{60}$ litara plave tempere, a u drugoj posudi nalazi se $10\frac{53}{60}$ litara crvene i $9\frac{7}{60}$ litara plave tempere.

Zadatak J-4.4. [25 bodova]

Pet pjevačica, Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela, otpjevale su neki broj pjesama na humanitar-nom koncertu. Svaku su pjesmu otpjevale zajedno tri pjevačice. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je pjevačica pjevala samo jednom. Antonija je otpjevala najviše, i to 8, a Ivana najmanje, i to 5 pjesama.

Koliko je ukupno pjesama otpjevano na ovom koncertu?

Napomena: potrebno je dokazati da se dobiveni broj pjesama doista može postići u skladu s uvjetima zadatka.

Rješenje.

Označimo s A , I , K , L i M broj pjesama koje su otpjevale redom Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela. Znamo da vrijedi $A = 8$ i $I = 5$. Također, $5 < K, L, M < 8$ pa K , L i M mogu biti jednaki 6 ili 7.

Neka je n ukupni broj otpjevanih pjesama. Budući da su svaku pjesmu otpjevale 3 pjevačice, vrijedi $A + I + K + L + M = 3n$, odnosno

$$8 + 5 + K + L + M = 3n.$$

Desna strana jednakosti djeljiva je s 3 pa zato i $13 + K + L + M$ mora biti djeljivo s 3. Promatramo mogućnosti za broj pjesama koje su otpjevale Korina, Lucija i Mirela.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 6 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 6 + 6 + 6 = 31$, što nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.
- Ako je jedna od njih otpjevala 7 pjesama, a preostale dvije po 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 6 + 6 = 32$. To ponovno nije djeljivo s 3 pa taj slučaj nije moguć.
- Ako su dvije od njih otpjevale po 7 pjesama, a jedna 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 6 = 33$. Kako je 33 djeljiv s 3, zaključujemo da ukupan broj pjesama može biti $33 : 3 = 11$.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 7 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 7 = 34$, što ponovno nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.

Dobili smo jednu mogućnost za ukupan broj otpjevanih pjesama, ali preostaje nam provjeriti je li moguće postići 11 otpjevanih pjesama na način da je Antonija otpjevala 8, Ivana 5, dvije od preostalih djevojaka po 7 i jedna 6 pjesama te tako da su svaku pjesmu otpjevale po 3 djevojke.

Pretpostavimo da su Antonija i Ivana otpjevale 5 pjesama skupa, a Antonija još 3 bez Ivane. Preostale tri pjesme tada su morale otpjevati Korina, Lucija i Mirela:

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	
2	Antonija	Ivana	
3	Antonija	Ivana	
4	Antonija	Ivana	
5	Antonija	Ivana	
6	Antonija		
7	Antonija		
8	Antonija		
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Pretpostavimo da su Korina i Lucija otpjevale po 7 pjesama, a Mirela 6. Ako su pjesme 6, 7 i 8 otpjevale Antonija, Korina i Lucija, tada Korini i Luciji nedostaje po jedna pjesma. Ako su pjesme 1 i 2 otpjevale Antonija, Ivana i Korina ili Lucija, tada je Mirela morala otpjevati pjesme 3, 4 i 5 čime su zadovoljeni svi uvjeti.

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	Korina
2	Antonija	Ivana	Lucija
3	Antonija	Ivana	Mirela
4	Antonija	Ivana	Mirela
5	Antonija	Ivana	Mirela
6	Antonija	Korina	Lucija
7	Antonija	Korina	Lucija
8	Antonija	Korina	Lucija
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Ovo je samo jedan od mogućih rasporeda za koji su zadovoljeni svi uvjeti. Zaključujemo da je na koncertu otpjevano ukupno 11 pjesama.

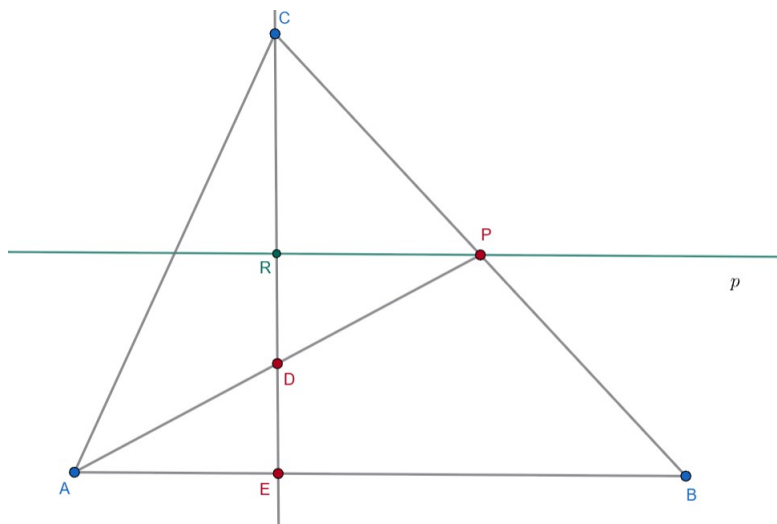
Zadatak J-4.5. [30 bodova]

U trokutu ABC točka P je polovište stranice $\overline{BC}$, a točka D je polovište težišnice $\overline{AP}$. Pravac CD siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E .

U kojem omjeru točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$?

Rješenje.

Nacrtajmo skicu te na njoj nacrtamo pravac p , takav da je $P \in p$ i $p \parallel AB$.



Pravac p siječe dužinu $\overline{CE}$ u točki R , a to znači da je $\overline{PR}$ srednjica trokuta BCE . Slijedi da je $|BE| = 2|PR|$.

Nadalje, $|AD| = |PD|$ jer je D polovište od $\overline{AP}$. Također, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle PDR$ jer su to vršni kutovi i $\sphericalangle EAD = \sphericalangle RPD$ jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu AP .

Zaključujemo da je trokut AED sukladan trokutu DPR pa posebno slijedi $|AE| = |PR|$. Od ranije imamo da je $|BE| = 2|PR|$ pa sada slijedi $|BE| = 2|AE|$, odnosno točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $1 : 2$.

Zadatak J-4.6. [35 bodova]

Uoči Valentinova, cvjećar Vlatko ima pune ruke posla i treba brzo sastavljati bukete. Na raspolaganju ima 4 vrste cvijeća: ruže, tulipane, karanfile i ljiljane. Planira sastaviti bukete od po 11 cvjetova.

Koliko različitih vrsta buketa Vlatko može sastaviti ako

- nije nužno staviti svaku vrstu cvijeća u buket,
- barem 1 cvijet svake vrste mora biti u buketu?

Vrste buketa se međusobno razlikuju po broju cvjetova pojedine vrste. Primjerice, jedna vrsta buketa sadrži 2 ruže, 5 tulipana i 4 ljiljana (bez karanfila), a druga vrsta sadrži 1 ružu, 5 tulipana, 2 ljiljana i 3 karanfila.

Pretpostavljamo da Vlatko ima dovoljno cvijeća svake vrste za sve bukete koje će napraviti.

Rješenje.

Ovaj zadatak je primjena **metode štapića i kuglica** te možemo izraziti ekvivalentni zadatak: Na koliko načina možemo 11 različitih kuglica podijeliti u 4 skupine tako da:

- nije nužno da se u svakoj skupini nalazi kuglica,
- barem 1 kuglica mora biti u svakoj skupini?

Zamislamo da kuglice dijelimo u skupine tako da ih razdvojimo štapićima. Za stvoriti četiri skupine nam trebaju tri štapića. Slijedi jedan primjer kako to možemo napraviti:

• • | • • • | • • • • | • •

Za naš zadatak bi to značilo da se u buketu nalaze 2 ruže, 3 tulipana, 4 karanfila i 2 ljiljana.

Promatramo sada posebno svaki podzadatak.

a) U ovom dijelu zadatka moguća je sljedeća situacija:



Ovo konkretno znači da je moguće da imamo 5 ruža, nijedan tulipan, 4 karanfila i 2 ljiljana. S obzirom da tako možemo postaviti kuglice i štapiće na bilo koja mjesta, zaključujemo da imamo 14 pozicija za 14 predmeta pa prvi štapić možemo postaviti 14 načina, drugi štapić na 13 načina, a treći na 12 načina. Ukupno je to $14 \cdot 13 \cdot 12$ načina.

Ipak, budući da štapiće ne razlikujemo, taj umnožak treba podijeliti sa brojem mogućih međusobnih razmještaja tih štapića, a budući da imamo 3 štapića, njih možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina. Dakle, broj mogućih buketa u a) zadatku je

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364.$$

b) Budući da u svakoj skupini mora biti barem jedna kuglica, ne smijemo postavljati štapiće jedan za drugim, kao ni na početak ili kraj niza. To znači da ih možemo smještati između 11 kuglica za što imamo 10 mogućnosti. Dakle, prvi štapić možemo postaviti na 10 načina, drugi na 9, a treći na 8, no opet, budući da štapiće ne razlikujemo, trebamo podijeliti umnožak $10 \cdot 9 \cdot 8$ sa brojem međusobnih razmještaja tih štapića, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Dakle, broj mogućih buketa u b) zadatku je

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Napomena: Ekvivalentan zadatak bi bio odrediti broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

gdje su:

- a) x_1, x_2, x_3 i x_4 nenegativni cijeli brojevi,
- b) x_1, x_2, x_3 i x_4 prirodni brojevi.

Zadatak J-4.7. [40 bodova]

Koliko prirodnih brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60} , 20^{50} i 30^{40} ?

Rješenje.

Neka je A skup svih djelitelja broja 10^{60} , B skup svih djelitelja broja 20^{50} i C skup svih djelitelja broja 30^{40} .

Promatrajmo elemente iz skupa A . Budući da je $10^{60} = 2^{60} \cdot 5^{60}$, svi elementi skupa A su oblika $2^k \cdot 5^l$, gdje su k i l nenegativni cijeli brojevi manji ili jednaki od 60. Te k i l možemo odabrati svaki na 61 način (jer k i l mogu biti i 0) pa je ukupan broj djelitelja broja 10^{60} jednak 61^2 . Pišemo: $|A| = 61^2$.

Sada promatrajmo skup B . Broj 20^{50} rastavljamo na proste faktore tako da je $20^{50} = (2^2)^{50} \cdot 5^{50} = 2^{100} \cdot 5^{50}$. Elementi skupa B su oblika $2^k \cdot 5^l$, gdje je k nenegativni cijeli broj manji ili jednak od 100, a l nenegativni cijeli broj manji ili jednak od 50. Broj k možemo odabrati na 101 način, a l na 51 način pa je $|B| = 101 \cdot 51$.

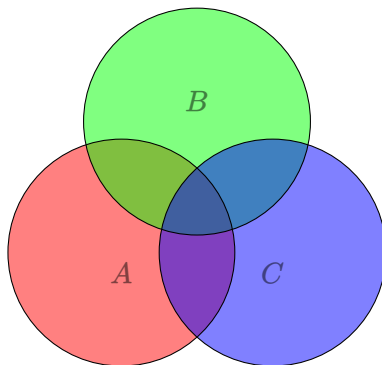
Zbog $30^{40} = 2^{40} \cdot 3^{40} \cdot 5^{40}$, elementi skupa C su oblika $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, gdje su k, l i m nenegativni cijeli brojevi manji ili jednaki od 40 pa je $|C| = 41^3$.

Nas zanima koliko prirodnih brojeva dijeli barem jedan od zadanih brojeva, dakle tražimo broj elemenata skupa $A \cup B \cup C$. To ćemo naći tako da iskoristimo **formulu uključivanja i isključivanja**.

Formula uključivanja i isključivanja za tri skupa:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ona intuitivno proizlazi iz Vennovih dijagrama koji prikazuju tri skupa. Kada zbrojimo broj elemenata iz A , B i C , time smo elemente presjeka $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap C$ prebrojili dva puta pa ih jednom oduzmemo, a kako broj elemenata presjeka $A \cap B \cap C$ najprije tri puta zbrojili, a zatim tri puta oduzeli, potrebno je još jednom dodati $|A \cap B \cap C|$.



Odredimo prvo $|A \cap B|$. Elementi skupa $A \cap B$ u svom rastavu na proste faktore smiju imati samo 2 i 5 pri čemu faktora 2 smije biti najviše 60 (zbog oblika brojeva iz A), faktora 5 najviše 50 (zbog oblika brojeva iz B). Zbog toga je $|A \cap B| = 61 \cdot 51$.

Slično zaključujemo za $|B \cap C|$. Smijemo imati najviše 40 faktora 2 i 40 faktora 5 pa je $|B \cap C| = 41^2$.

Također je na sličan način $|A \cap C| = 41^2$ i $|A \cap B \cap C| = 41^2$.

Prema formuli uključivanja i isključivanja konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 61^2 + 101 \cdot 51 + 41^3 - 61 \cdot 51 - 41^2 - 41^2 + 41^2 \\ &= \boxed{73\,001} \end{aligned}$$

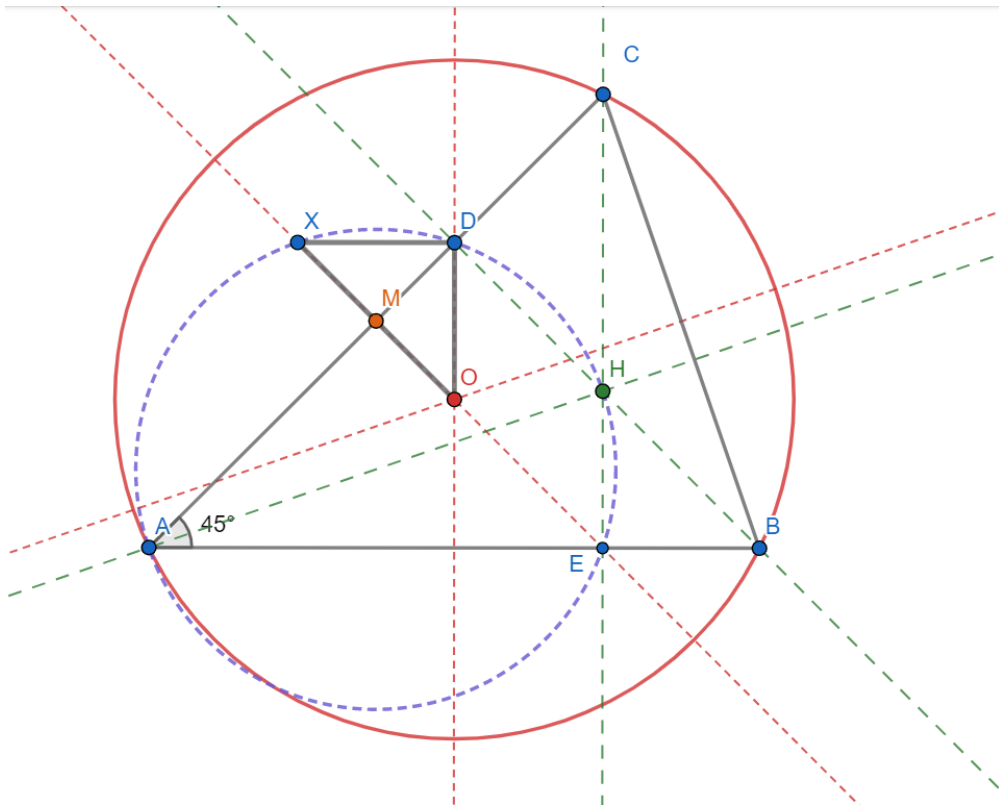
Zadatak J-4.8. [45 bodova]

U šiljastokutnom trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle BAC$ iznosi 45° . Neka je O središte opisane kružnice trokutu ABC , a H njegov ortocentar. Neka je točka D nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$. Neka je X polovište luka $\widehat{AH}$ kružnice opisane trokutu AHD koji sadrži D .

Dokaži da je $|DX| = |DO|$.

Rješenje.

Skica:



Neka je E nožište visine iz C na AB . Kako je $\angle AEH = 90^\circ$, znamo da E leži na opisanoj kružnici trokuta AHD .

Kako je to onda ujedno i opisana kružnica trokuta AHE , znamo da X leži na polovištu luka nasuprotnog točki E , tj. da X leži na simetrali kuta AEH . Zato je $\angle XEA = 45^\circ$.

Označimo $M = XE \cap AC$. Sada iz trokuta AEM zaključujemo $\angle AME = 90^\circ$. Također imamo da je $\angle MCE = 45^\circ$, a kako $\triangle AEM$ i $\triangle ECM$ dijele stranicu $\overline{EM}$, zaključujemo da je $\triangle AEM \cong \triangle ECM$. Posebno, vrijedi $|AM| = |MC|$.

Međutim, onda je EM simetrala stranice $\overline{AC}$ pa znamo da je $O \in \overline{EM}$ (jer je $\triangle ABC$ šiljastokutan). Kako je $\angle ADB = 90^\circ$, iz trokuta ABD slijedi $\angle ABD = 45^\circ$. Dakle, $\triangle ADB$ je jednakokrakan.

Neka je N polovište stranice $\overline{AB}$. S jedne strane, znamo da je $DN \perp AB$, a s druge da je $ON \perp AB$. Zaključujemo da je $O \in DN$. Posebno, $DO \perp AB$ pa je $DO \parallel CE$.

Kako trokuti MDO i MEC imaju dvije zajedničke stranice na dva ista pravca, a treće strane su im paralelne, zaključujemo da je $\triangle MDO \sim \triangle MEC$. Slijedi da je $\angle MOD = \angle MDO = 45^\circ$.

Ranije smo ustanovili da su točke A, E, H, D, X koncikličke. Sada iz teorema o tetivnom četverokutu primjenjenom na $AEDX$ slijedi $\angle XDM = \angle XDA = \angle XEA = 45^\circ$ i $\angle DXM = \angle DXE = \angle DAE = 45^\circ$. Sada vidimo da se $\triangle XMD$ i $\triangle ODM$ podudaraju u svim kutovima.

Kako oni također dijele stranicu $\overline{MD}$, slijedi $\triangle XMD \cong \triangle ODM$, a posebno $|DX| = |DO|$.