



MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Loomen

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Pokraj svakog zadatka naznačeno je s koliko bodova se ocjenjuje. Za ukupni rezultat na pojedinom kolu zbrajaju se bodovi s 4 najbolje ocijenjena zadatka.

Osim konačnog rezultata vrednuje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

Zadaci

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Izračunaj

$$\frac{1}{\frac{1^2}{2026^2} + 1} + \frac{1}{\frac{2^2}{2025^2} + 1} + \frac{1}{\frac{3^2}{2024^2} + 1} + \cdots + \frac{1}{\frac{2026^2}{1^2} + 1}.$$

Zadatak S-3.2. [15 bodova]

Neka je $p \neq 3$ prost broj i neka su a i b cijeli brojevi takvi da

$$p \mid a + b \quad \text{i} \quad p^2 \mid a^3 + b^3.$$

Dokaži da vrijedi $p^2 \mid a + b$ ili $p^3 \mid a^3 + b^3$.

Zadatak S-3.3. [20 bodova]

Zadan je trokut ABC sa stranicama duljina $|BC| = 2025$, $|AC| = 2026$ i $|AB| = 2027$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da upisane kružnice trokuta ABD i ADC dodiruju dužinu $\overline{AD}$ u istoj točki.

Odredi duljinu dužine $\overline{BD}$.

Zadatak S-3.4. [25 bodova]

Matematičar Matko želi povući 2023 dijagonale u pravilnom 2026-erokutu S tako da se nikoje dvije od njih ne sijeku. *Raspon* dijagonale d definiramo kao manji broj stranica mnogokuta S između vrhova dijagonale d .

Neka je D najveća razlika raspona dijagonala među svim dijagonalama od S koje je Matko nacrtao. Odredi najmanju vrijednost D koju Matko može postići.

Zadatak S-3.5. [30 bodova]

Medvjedi Branko, Bruna i Brundo žive u različitim kućama (točkama u ravnini). Medvjedi su odlučili spremati zalihe hrane na jedno mjesto (točku u ravnini) tako da zbroj vremena koja su im potrebna da dođu od svojih kuća do spremišta bude najmanji mogući.

Svi medvjedi hodaju od svoje kuće do spremišta po pravcu i svi prave korake iste duljine, ali dok Branko napravi jedan korak, Bruna napravi dva koraka, a Brundo tri koraka.

Odredi gdje medvjedi trebaju napraviti spremište hrane.

Zadatak S-3.6. [35 bodova]

Na konferenciji je 25 diplomata. Prije konferencije, svaka dva diplomata su se dogovorila na kojem jeziku će razgovarati. Poznato je da među bilo koja tri diplomata postoji diplomat koji će koristiti isti jezik za razgovor s preostala dva diplomata.

Dokaži da postoji diplomat koji na istom jeziku razgovara s najmanje devet drugih diplomata.

Zadatak S-3.7. [40 bodova]

Neka je O središte opisane kružnice te I središte upisane kružnice trokuta ABC . Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D , E i F .

Neka je G težište trokuta DEF . Dokaži da se točke I , O i G nalaze na istom pravcu.

Zadatak S-3.8. [45 bodova]

Neka je a cijeli broj i n prirodan broj. Dokaži da je zbroj

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$$

djeljiv s n .

$D(x, y)$ označava najveći zajednički djeliteľ prirodnih brojeva x i y .