

MEDO 2025./2026.

Drugo kolo

6.12.2025.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

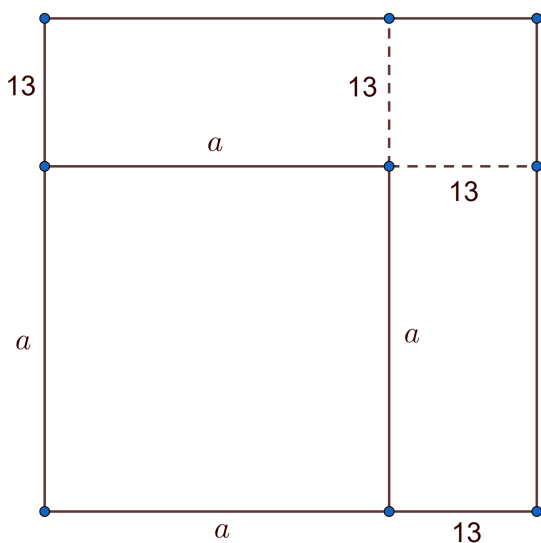
Zadaci i rješenja

Zadatak S-2.1. [10 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je 1053 cm^2 . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

Rješenje.

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s a . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu $a + 13$. Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Razlika površina jednaka je $(a + 13)^2 - a^2$.

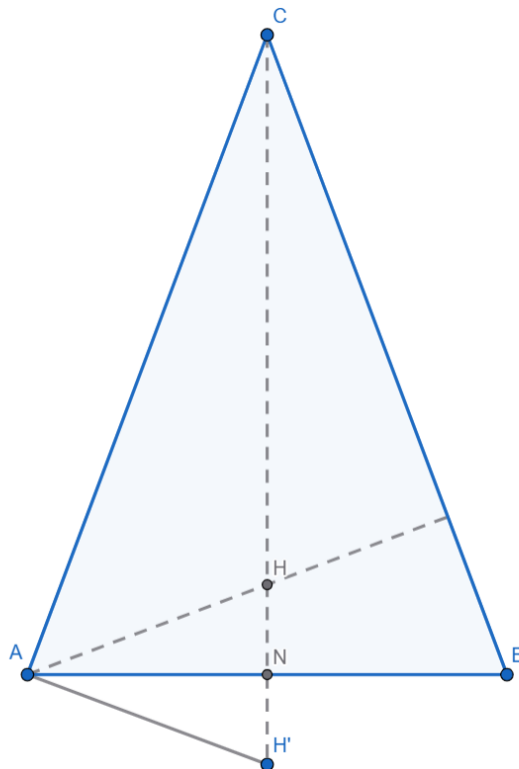
$$\begin{aligned}(a + 13)^2 - a^2 &= 1053 \\ a^2 + 26a + 169 - a^2 &= 1053 \\ 26a &= 884 \\ a &= 34\end{aligned}$$

Zbroj opsega ovih kvadrata jednak je $4a + 4(a + 13) = 8a + 52$, tj. $8 \cdot 34 + 52 = 324 \text{ cm}$.

Zadatak S-2.2. [15 bodova]

Neka je ABC šiljastokutni jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{AB}$ i neka je H ortocentar tog trokuta. Neka je H' točka simetrična točki H u odnosu na pravac AB . Odredi mjeru kuta $\angle H'AC$.

Prvo rješenje.



Zapišimo $\angle H'AC$ kao zbroj tri kuta:

$$\angle H'AC = \angle H'AB + \angle BAH + \angle HAC$$

Pritom znamo da je $\angle H'AB = \angle BAH$ zbog simetrije, te je jasno da $\angle BAH = 90^\circ - \angle CBA$ (promotrimo zbroj kuteva u trokutu s vrhovima A , B i nožištem visine iz A), što je pak $90^\circ - \angle BAC$ jer je ABC jednakokratan.

Sada smo gotovi jer je:

$$\angle H'AC = \angle H'AB + (\angle BAH + \angle HAC) = 90^\circ - \angle BAC + \angle BAC = 90^\circ.$$

Drugo rješenje.

Budući da se radi o jednakokrakom trokutu, ukoliko produžimo pravac CH , znamo da će se H' nalaziti na njemu te da je nožište visine iz C (označimo ga s N) ujedno polovište $\overline{AB}$ (može se lagano pokazati preko sukladnosti trokuta $\triangle ANC$ i $\triangle BNC$).

Budući da je N polovište $\overline{AB}$, te je po definiciji osne simetrije polovište $\overline{HH'}$, onda je $AH'BH$ četverokut kojem se dijagonale raspolavljaju, što znamo da je paralelogram (ostavljamo formalni dokaz kao vježbu čitatelju; preko sukladnosti).

Kako je onda AH' paralelan s BH koji je visina na $\overline{AC}$, onda je traženi kut također pravi kao kut uz presječnicu paralelnih pravaca.

Treće rješenje.

Ukoliko znamo lemu o refleksijama ortocentra (možete ju naći recimo na MNM predavanjima ili u Evan Chen: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads - lemma 1.17), ona nam po tvrdnji a) govori da H' leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Dapače, budući da je nožište visine ujedno i polovište stranice $\overline{AB}$, ona nam po tvrdnji b) iste leme kaže da je $\overline{CH'}$ baš i promjer opisane kružnice trokutu ABC .

Dakle, tražimo kut nad promjerom kružnice, pa je po Talesovom poučku traženi kut pravi.

Zadatak S-2.3. [20 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih apsolutnom vrijednošću razlike ta dva broja. Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

a) Može li taj preostali broj biti 20?

b) Može li taj preostali broj biti 25?

Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo $2026 : 2 = 1013$ neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

b) U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\dots$, $(23, 24)$, $(26, 27)$, $(28, 29)$, $\dots$, $(2024, 2025)$ i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.

Zadatak S-2.4. [25 bodova]

Neka su $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $z \neq 0$ međusobno različiti realni brojevi takvi da je $x + y + z = 0$. Dokaži

$$\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} \right) = 9.$$

Rješenje.

Označimo $A = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}$ i $B = \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}$. Raspišimo:

$$A = \frac{x(z-x)(x-y) + y(y-z)(x-y) + z(y-z)(z-x)}{(y-z)(z-x)(x-y)}$$

i

$$B = \frac{yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)}{xyz}.$$

Nadalje, raspišimo nazivnik od A . Imamo:

$$\begin{aligned}(y-z)(z-x)(x-y) &= (yz - z^2 - xy + xz)(x-y) = \\ &= \cancel{xyz} - xz^2 - x^2y + x^2z - y^2z + yz^2 + \cancel{xy^2} - \cancel{xyz} = \\ &= yz(z-y) + xz(x-z) + xy(y-x) = \\ &= -(yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)).\end{aligned}$$

Stoga je

$$A \cdot B = \frac{x(z-x)(x-y) + y(y-z)(x-y) + z(y-z)(z-x)}{-xyz}.$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}x(z-x)(x-y) &= x(zx - x^2 - yz + xy) = \\ &= x(x(z+y) - x^2 - yz) = \\ &= x(x(-x) - x^2 - yz) = \\ &= -2x^3 - xyz.\end{aligned}$$

Analogno zaključujemo da je

$$\begin{aligned}y(y-z)(x-y) &= -2y^3 - xyz, \\ z(y-z)(z-x) &= -2z^3 - xyz.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$A \cdot B = \frac{-2x^3 - 2y^3 - 2z^3 - 3xyz}{-xyz} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 3xyz}{xyz}.$$

Kako želimo pokazati da je $A \cdot B = 9$, ostalo je pokazati da je $2x^3 + 2y^3 + 2z^3 = 6xyz$, odnosno $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Jer je $x + y + z = 0$, vrijedi

$$0 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Dakle,

$$A \cdot B = \frac{6xyz + 3xyz}{xyz} = \frac{9xyz}{xyz} = 9.$$

Napomena. Jednakost $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ možemo dokazati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 = -z(x^2 - xy + y^2) + z^3 = z(-x^2 + xy - y^2 + z^2) \\ &= z((z-x)(z+x) + xy - y^2) = z((z-x) \cdot (-y) + xy - y^2) = yz(x - z + x - y) = 3xyz.\end{aligned}$$

Zadatak S-2.5. [30 bodova]

Katarina peče božićni kolač u posudi dimenzija $n \times n$. Odredi sve prirodne brojeve n takve da Katarina može izrezati kolač na dijelove tako da najviše jedan izrezani dio bude u obliku 1×1 kvadrata, a svi ostali izrezani dijelovi budu u obliku L-triromina.

Napomena. L-triromino je oblik koja se dobije uklanjanjem jednog 1×1 kvadrata iz 2×2 kvadrata.

Rješenje.

Katarina može izrezati kolač na željeni način za sve prirodne brojeve $n \neq 3$.

Dokažimo najprije da Katarina ne može izrezati 3×3 kolač na željeni način. Pretpostavimo da je moguće izrezati 3×3 kolač. Budući da je ukupan broj polja u 3×3 posudi djeljiv s 3 da bi kolač

izrezali na željeni način moramo za to koristiti točno tri L-triomina. Međutim, posuda ima 4 kutna polja, a svaka L-triomina može pokriti najviše jedno od tih kutnih polja. To dovodi do kontradikcije. Dakle, ne možemo izrezati 3×3 kolač na željeni način.

Preostaje još dokazati da za sve $n \neq 3$ Katarina može izrezati $n \times n$ kolač na željeni način. U tu svrhu ćemo najprije dokazati sljedeću pomoćnu tvrdnju.

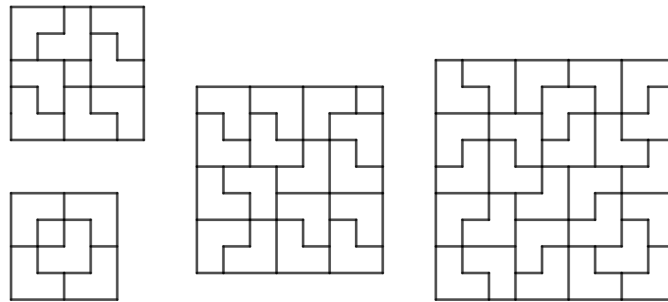
Lema: Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ pravokutnu ploču $6 \times n$ možemo izrezati na L-triomine.

Dokaz leme: Dvije L-triomine možemo zajedno spojiti u ploču oblika 2×3 . Pomoću ploča 2×3 možemo napraviti ploče 6×2 i 6×3 . Za dokaz pomoćne tvrdnje nam je sada dovoljno dokazati da se svaki prirodan broj $n \geq 2$ može zapisati u obliku $n = 3a + 2b$ za neke nenegativne cijele brojeve a i b jer tada našu ploču možemo izrezati na a ploča dimenzije 6×3 i b ploča dimenzije 6×2 .

Promotrimo sve moguće ostatke koje n daje pri dijeljenju s 3. Ako je n djeljiv s 3 tada direktno možemo zapisati $n = 3a$ za neki nenegativni cijeli broj a . Ako n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 tada možemo zapisati $n = 3a + 2 \cdot 2$ te budući da je u tom slučaju $n \geq 4$ slijedi da je a nenegativan cijeli broj. Konačno ako n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 tada možemo zapisati $n = 3a + 2$.

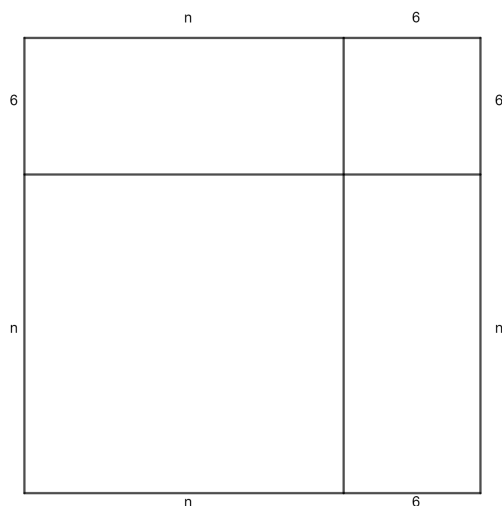
Dokazat ćemo matematičkom indukcijom s korakom 6 da za sve $n \neq 3$ Katarina može izrezati $n \times n$ kolač na željeni način.

Kolači dimenzija 1×1 i 2×2 se očito mogu izrezati na željeni način. Iz gornje Leme slijedi da i kolač dimenzija 6×6 možemo izrezati na željeni način. Rezanje kolača oblika 4×4 , 5×5 , 7×7 i 9×9 je prikazano na slici.



Pretpostavimo da smo za neki $n \geq 2$ uspjeli izrezati kolač dimenzija $n \times n$ na željeni način. Dokažimo da tada možemo izrezati i kolač dimenzija $(n + 6) \times (n + 6)$.

Kolač dimenzija $(n + 6) \times (n + 6)$ možemo podijeliti na jedan $n \times n$ kvadrat, dva pravokutnika dimenzije $6 \times n$ te jedan kvadrat dimenzije 6×6 kao na slici. Iz pretpostavke znamo da $n \times n$ kvadrat možemo izrezati na željeni način, a prema Lemi pravokutnike dimenzija $6 \times n$ i kvadrata 6×6 možemo izrezati u samo L-triomine. Prema tome, posudu $(n + 6) \times (n + 6)$ također možemo izrezati na željeni način.

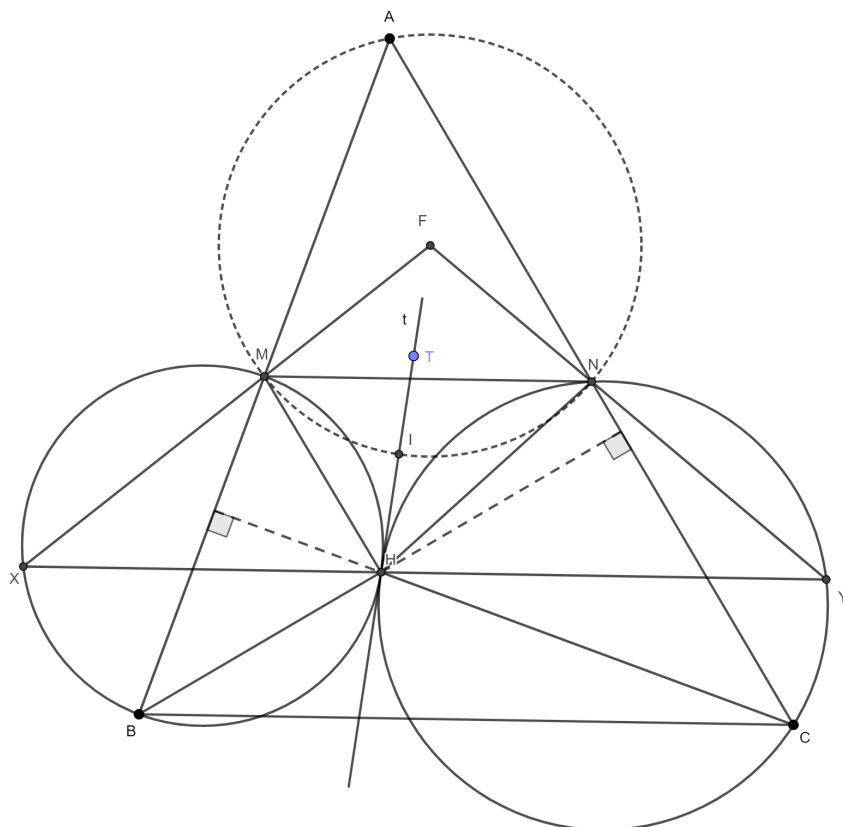


Zadatak S-2.6. [35 bodova]

Neka je H ortocentar trokuta ABC te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Pretpostavimo da se točka H nalazi unutar četverokuta $BCNM$ te da se opisane kružnice trokuta BHM i CNH međusobno dodiruju. Pravac kroz H paralelan s BC siječe opisane kružnice trokuta BHM i CNH redom u točkama X i Y . Neka je F sjecište pravaca MX i NY te neka je I središte upisane kružnice trokuta MHN . Dokaži da je $|FI| = |FA|$.

Rješenje.

Neka je $\angle BAC = \alpha$, pravac t zajednička tangenta opisanih kružnica trokuta BHM i CNH te točka T proizvoljna točka na pravcu t kao na slici.



Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ABC pa je zato i pravac MN paralelan s pravcima BC i XY .

Budući da je H ortocentar trokuta ABC slijedi da je

$$\sphericalangle HBM = \sphericalangle HBA = 90^\circ - \alpha.$$

Četverokut $BHMX$ je tetivan pa je zato

$$\sphericalangle HXM = \sphericalangle HBM = 90^\circ - \alpha.$$

Konačno kako su pravci XY i MN paralelni imamo da je

$$\sphericalangle NMF = \sphericalangle HXM = 90^\circ - \alpha.$$

Analogno se dobije da je i $\sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$.

Iz gornjeg imamo da je $\sphericalangle NMF = \sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$ pa je zato $|FM| = |FN|$. Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle MFN = 180^\circ - \sphericalangle NMF - \sphericalangle FNM = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$$

iz čega slijedi da je kut $\sphericalangle MFN$ središnji kut obodnog kuta MAN na opisanoj kružnici trokuta AMN . Posebno, imamo da je F središte opisane kružnice trokuta AMN .

Dokažimo da se točka I nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle THM &= \sphericalangle MHX = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle NHT &= \sphericalangle NCH = 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi da je

$$\sphericalangle NHM = \sphericalangle NHT + \sphericalangle THM = 180^\circ - 2\alpha.$$

Konačno, kako je I središte upisane kružnice trokuta MHN možemo izračunati

$$\sphericalangle NIM = 180^\circ - \sphericalangle MNI - \sphericalangle IMN = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle MNH + \sphericalangle HMN) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle NHM = 180^\circ - \alpha.$$

Iz gornjeg slijedi da je četverokut $MINA$ tetivan, tj. točka I se nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Budući da je F središte opisane kružnice trokuta AMN i točka I se također nalazi na opisanoj kružnici slijedi da je $|FI| = |FA|$ što je i trebalo dokazati.

Zadatak S-2.7. [40 bodova]

Za racionalan broj r kažemo da je *poseban* ako se može zapisati u obliku $r = \frac{p^k}{q}$ pri čemu su p i q relativno prosti prirodni brojevi i $k > 1$ prirodan broj.

Neka su a , b i c pozitivni racionalni brojevi takvi da je $abc = 1$. Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi k , l i m takvi da je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj. Dokaži da su brojevi a , b i c posebni.

Rješenje.

Neka je p prosti broj takav da je $v_p(a) > 0$, ako takav ne postoji onda je a recipročan prirodnom broju te očito poseban (specijalno ako za nijedan od a, b, c ne postoji takav p nužno je $a = b = c = 1$ koji su očito posebni). Dalje pretpostavljamo da postoji takav p .

Tvrdimo da je a poseban. Iz uvjeta zadatka imamo $v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 0$ te onda znamo da je $\min(v_p(b), v_p(c)) < 0$. Tvrdimo da su oba negativna, zaista kada bismo imali $v_p(b) > 0, v_p(c) < 0$ tada bismo imali $v_p(a^k + b^l + c^m) = v_p(c^m) < 0$ što je nemoguće jer je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj.

Nadalje, neka je $v_p(b^l) \neq v_p(c^m)$ tada je $v_p(a^k + b^l + c^m) = \min(v_p(b^l), v_p(c^m)) < 0$ što je opet nemoguće jer je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj. Dakle, $v_p(b^l) = v_p(c^m) \iff lv_p(b) = mv_p(c)$, odnosno vidimo da postoji prirodan broj t takav da je

$$v_p(b) = -t \frac{m}{\gcd(m, l)}, \quad v_p(c) = -t \frac{l}{\gcd(m, l)}$$

Konačno, kako je $v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 0$ imamo

$$v_p(a) = -v_p(b) - v_p(c) = t \frac{m + l}{\gcd(m + l)}$$

Stoga ako je $v_p(a) > 0$ imamo $\frac{m+l}{\gcd(m+l)} \mid v_p(a)$. Kako to vrijedi za proizvoljan p takav da je $v_p(a) > 0$ brojnik od a je $\frac{m+l}{\gcd(m+l)}$ -ta potencija prirodnog broja pa je a poseban. Analogno se dobije da su b, c posebni.

Zadatak S-2.8. [45 bodova]

Za strogo rastući niz pozitivnih realnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kažemo da je *vilenjački* ako za svaki realan broj $c > 0$ postoji prirodan broj N takav da je $a_n < cn$ za svaki prirodan broj $n \geq N$. Nadalje, kažemo da je član vilenjačkog niza a_n *božićna kapica* ako je $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ za sve $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Postoji li u svakom vilenjačkom nizu beskonačno mnogo božićnih kapica?

Rješenje.

Odgovor: Svaki vilenjački niz ima beskonačno mnogo božićnih kapica.

Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vilenjački niz te stavimo da je $a_0 = 0$. Promotrimo točke (n, a_n) za sve nenegativne cijele brojeve n u koordinatnom sustavu kao na slici.

Za svaki prirodan broj n označimo s k_n koeficijent smjera pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka $(0, a_0)$ i (n, a_n) .

Korištenjem svojstva vilenjačkog niza za $c = k_1$ slijedi da postoji prirodan broj N takav da je $a_n < cn$ za svaki $n \geq N$. Posebno, to znači da je

$$k_n = \frac{a_n - a_0}{n - 0} = \frac{a_n}{n} < k_1$$

za svaki $n \geq N$.

Promotrimo koeficijente smjera $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. Neka je n_1 najveći indeks $i = 1, 2, \dots, N-1$ za koji je koeficijent smjera k_i maksimalan. Iz prethodne nejednakosti također imamo da je $k_{n_1} > k_n$ za sve $n \geq N$, tj. k_{n_1} je je maksimalan mogući koeficijent smjera pravca. Zbog maksimalnosti koeficijenta smjera k_{n_1} se zato sve promatrane točke nalaze na ili ispod pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka $(0, a_0)$ i (n_1, a_{n_1}) .

Obojimo točku (n_1, a_{n_1}) crveno bojom, a sve prethodne točke $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n_1 - 1, a_{n_1-1})$ obojimo plavom bojom.

Stavimo točku (n_1, a_{n_1}) u ishodište koordinatnog sustava te promotrimo ostatka niza (a_n) za $n > n_1$ u tom novom koordinatnom sustavu. Koordinate novih točaka će biti oblika $(n, a_n - a_{n_1})$ za sve $n > n_1$.

Direktnim računom se lagano provjeri da se svojstva vilenjačkog niza očuvaju kada svakom članu niza oduzmemo isti realan broj x . Posebno, slijedi da je niz $(a_n - a_{n_1})_{n > n_1}$ dalje vilenjački niz. Zbog

toga analognim postupkom kao i prije možemo definirati indeks n_2 te točku (n_2, a_{n_2}) obojati crvenom bojom, a sve prijašnje točke plavom.

Ponavljanjem gornjeg postupka redom dobijemo niz crvenih točaka $A_1 = (n_1, a_{n_1})$, $A_2 = (n_2, a_{n_2})$, $\dots$, $A_k = (n_k, a_{n_k})$, $\dots$

Pokažimo da je za svaku crvenu točku $A_j = (n_j, a_{n_j})$ broj a_{n_j} božićna kapica.

Neka je $i < n_j$ i promotrimo točke $X_1 = (n_j - i, a_{n_j - i})$, $A_j = (n_j, a_{n_j})$ i $X_2 = (n_j + i, a_{n_j + i})$. Iz definicije crvenih točaka i svojstva maksimalnosti koeficijenata smjerova znamo da se točke X_1 i X_2 nalaze na ili ispod pravca koje dobijemo spajanjem točaka A_{j-1} i A_j i pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka A_j i A_{j+1} . Posebno, to znači da je

$$\sphericalangle X_1 A_j X_2 \leq \sphericalangle A_{j-1} A_j A_{j+1} < 180^\circ.$$

Iz $\sphericalangle X_1 A_j X_2 < 180^\circ$ slijedi da pravac $X_1 A$ zatvara veći kut s x -osi, nego pravac $X_2 A$, tj. koeficijent smjera pravca $X_1 A$ je veći od koeficijenta smjera pravca $X_2 A$. Prema tome imamo da je

$$k_{X_1 A} = \frac{a_{n_j} - a_{n_j - i}}{i} > k_{X_2 A} = \frac{a_{n_j + i} - a_{n_j}}{i}$$

iz čega konačno slijedi da je $a_{n_j - i} + a_{n_j + i} < 2a_{n_j}$ za svaki $i < n_j$. Dakle, a_{n_j} je zaista božićna kapica za svaki prirodan broj j .

