

**MEDO 2025./2026.**

**Drugo kolo**

6.12.2025.

**Kadeti (5. i 6. r. OŠ)**

**Loomen**

## **Zadaci i rješenja**

**Zadatak K-2.1.** [10 bodova]

Izračunaj:

$$21 \cdot 25 + 71 \cdot 21 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 \cdot 21 - 21 - 75.$$

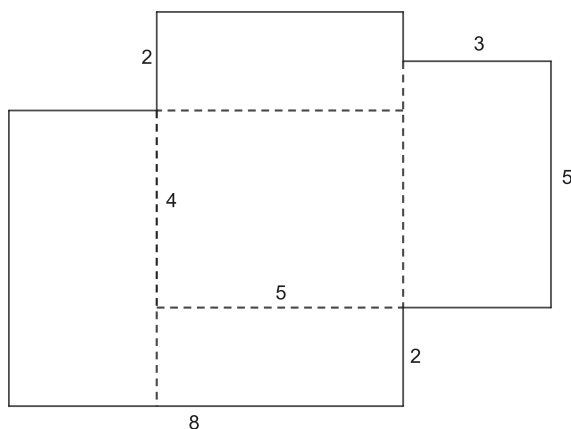
**Rješenje.**

Primijetimo da možemo iskoristiti distributivnost množenja prema zbrajanju i oduzimanju budući da na više mjesta imamo višekratnike broja 21:

$$\begin{aligned} & 21 \cdot 25 + 71 \cdot 21 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 \cdot 21 - 21 - 75 \\ &= 21 \cdot 25 + 21 \cdot 71 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 21 \cdot 5 \cdot 9 - 21 \cdot 1 - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 71 - 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 - 1) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 71 - 40 + 45 - 1) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + (71 - 1) - 40 + 45) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 70 - 40 + 45) - 75 \\ &= 21 \cdot 100 - 75 \\ &= 2100 - 75 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

**Zadatak K-2.2.** [15 bodova]

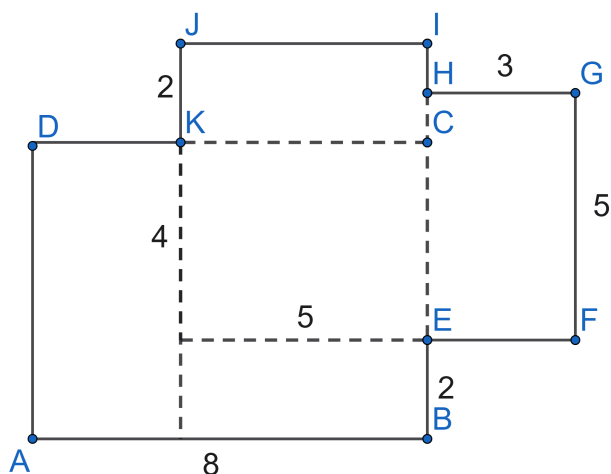
Marko je s obitelji preselio u novi stan čiji je tlocrt dan na slici, a na njemu su istaknute neke mjere u metrima. Sve istaknute sobe su pravokutnog oblika.



Odredi površinu Markovog stana.

### Prvo rješenje.

Dopunimo sliku tako da istaknemo nekoliko točaka:



Uočimo na slici tri pravokutnika koji se ne preklapaju:  $ABCD$ ,  $EFGH$  i  $IJKC$ . Da bismo odredili ukupnu površinu stana, potrebno je zbrojiti površinu ovih triju pravokutnika. Duljina stranice  $\overline{AB}$  je 8 cm, a duljina stranice  $\overline{BC}$  je 6 cm (zato što je  $|BC| = |BE| + |EC|$ ). Površina pravokutnika  $ABCD$  je stoga jednaka  $8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$ .

Duljina stranice  $\overline{EF}$  je 3 cm, a duljina stranice  $\overline{GF}$  je 5 cm. Površina pravokutnika  $EFGH$  stoga iznosi  $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$ .

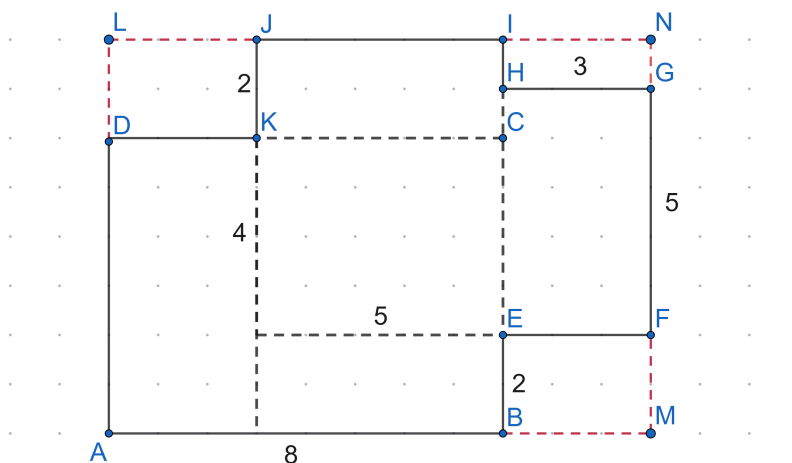
Duljina stranice  $\overline{KC}$  je 5 cm, a duljina stranice  $\overline{JK}$  je 2 cm. Površina pravokutnika  $IJKC$  iznosi  $5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2$ .

Ukupna površina stana je:

$$48 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2 + 10 \text{ cm}^2 = 73 \text{ cm}^2.$$

### Drugo rješenje.

Dopunimo sliku tako da stvorimo pravokutnik oko cijelog stana (crveno istaknute stranice):



Da bismo dobili površinu stana, potrebno je od površine pravokutnika  $AMNL$  oduzeti površine pravokutnika  $BMFE$ ,  $HGNI$  i  $DKJL$ .

Duljina stranice  $\overline{AM}$  je 11 cm (zato što je  $|AM| = |AB| + |BM|$ ), a duljina stranice  $\overline{MN}$  je 8 cm (zato što je  $|MN| = |MF| + |FG| + |GN|$ , a  $|GN| = 1$  cm zato što je  $|NG| = |HI| = |EH| - |EC| = 5 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$ ). Površina pravokutnika  $AMNL$  stoga iznosi  $11 \cdot 8 = 88 \text{ cm}^2$ .

Duljina stranice  $\overline{BM}$  je 3 cm, a duljina stranice  $\overline{EB}$  je 2 cm. Površina pravokutnika  $BMFE$  iznosi  $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2$ .

Duljina stranice  $\overline{GH}$  je 3 cm, a duljina stranice  $\overline{HI}$  je 1 cm. Površina pravokutnika  $HGNI$  iznosi  $3 \cdot 1 = 3 \text{ cm}^2$ .

Duljina stranice  $\overline{DK}$  je 3 cm (zato što je  $|DK| = |DC| - |KC|$ ), a duljina stranice  $\overline{KJ}$  je 2 cm. Površina pravokutnika  $DKJL$  iznosi  $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2$ .

Ukupna površina stana je:

$$88 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 73 \text{ cm}^2.$$

### **Zadatak K-2.3.** [20 bodova]

Mirela i Paula zajedno su za Božić dobile 50 bombona, Paula i Izabela su zajedno dobile 38 bombona, a Mirela i Izabela su zajedno dobile 56 bombona. Koliko bombona je dobila svaka od djevojaka?

#### **Prvo rješenje.**

Pozbrajamo li sve navedene iznose, dobivamo  $50 + 38 + 56 = 144$  bombona. S druge strane, to je točno dvostruki broj bombona koji imaju sve tri djevojke zajedno jer smo svačije bombone pribrojili dva puta. Stoga znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona.

Sada znamo da Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ono što nedostaje od 50 do 72, odnosno  $72 - 50 = 22$  bombona.

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela, pa zato Paula ima  $38 - 22 = 16$  bombona.

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa zato Mirela ima  $56 - 22 = 34$  bombona.

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

#### **Drugo rješenje.**

Označimo sa  $M$ ,  $P$  i  $I$  količinu bombona koje imaju redom Mirela, Paula i Izabela. Znamo da su te veličine u sljedećim odnosima:

$$M + P = 50$$

$$P + I = 38$$

$$M + I = 56$$

Pozbrajamo li sve tri dobivene jednadžbe dobivamo  $2M + 2P + 2I = 144$ , odnosno

$$M + P + I = 72.$$

Sada znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona, a Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ostatak od 50 do 72 bombona, odnosno

$$I = 72 - M - P = 72 - (M + P) = 72 - 50 = 22.$$

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$P = 38 - I = 38 - 22 = 16.$$

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$M = 56 - I = 56 - 22 = 34.$$

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

#### **Zadatak K-2.4.** [25 bodova]

Izračunaj:

$$2025 + 2024 + 2023 - 2022 - 2021 - 2020 + 2019 + 2018 + 2017 - 2016 - 2015 - 2014 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

#### **Rješenje.**

Primijetimo kako se računske operacije pravilno ponavljaju: tri zbrajanja pa tri oduzimanja i tako do kraja. Također, uočimo da je

$$2025 - 2022 = 2024 - 2021 = 2023 - 2020 = 3.$$

Slično je i

$$2019 - 2016 = 2018 - 2015 = 2017 - 2014 = 3.$$

Budući da je svaka takva razlika jednaka 3, u svakoj grupi od 6 uzastopnih brojeva rezultat nakon provedbe svih računskih operacija će biti  $3 + 3 + 3 = 9$ . Prikažimo zornije:

$$\underbrace{2025 + 2024 + 2023 - 2022 - 2021 - 2020}_9 + \underbrace{2019 + 2018 + 2017 - 2016 - 2015 - 2014}_9 + \dots + 1.$$

Budući da imamo 2025 brojeva, podijelimo 2025 sa 6, što je broj brojeva u svakoj grupi. Dobit ćemo količnik koji predstavlja koliko grupa imamo i ostatak koji govori koliko brojeva nije upalo u grupe od 6 brojeva.

Dobivamo da je  $2025 : 6 = 337$  i ostatak 3. Dakle, imamo 337 grupa koje daju rezultat 9 i još na kraju zbroj 3 broja  $3 + 2 + 1$ . Konačni rezultat je:

$$337 \cdot 9 + 3 + 2 + 1 = 3039.$$

#### **Zadatak K-2.5.** [30 bodova]

Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 9 puta veći od dvoznamenkastog broja koji nastane ispuštanjem njihove znamenke desetica.

#### **Rješenje.**

Kako tražimo troznamenkaste prirodne brojeve koji imaju svojstvo da se umanje 9 puta ako im se ispusti znamenka desetica, možemo preformulirati problem u traženje troznamenkastog prirodnog broja koji je jednak deveterostrukom broju koji dobivamo ispuštanjem njegove znamenke desetica. Označimo s  $\overline{abc}$  traženi troznamenkasti broj, pri čemu su  $a$ ,  $b$  i  $c$  njegove znamenke stotica, desetica i jedinica. Dvoznamenkasti broj koji dobivamo ispuštanjem znamenke desetica tada možemo zapisati kao  $\overline{ac}$ . Uvjet zadatka sada glasi

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}.$$

Sada možemo nastaviti na dva načina: ili raspisati jednadžbu koristeći raspis  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ , ili analizirati jednakost znamenku po znamenku. Odlučujemo se za drugu opciju. Krenimo od posljednje znamenke. Zadnja znamenka umnoška  $9 \cdot \overline{ac}$  bit će zadnja znamenka broja  $9 \cdot c$ . No, znamo da ta znamenka mora biti upravo  $c$ . Isprobavanjem svih 10 mogućnosti za znamenku  $c$ , vidimo da su jedine mogućnosti  $c = 0$  i  $c = 5$ .

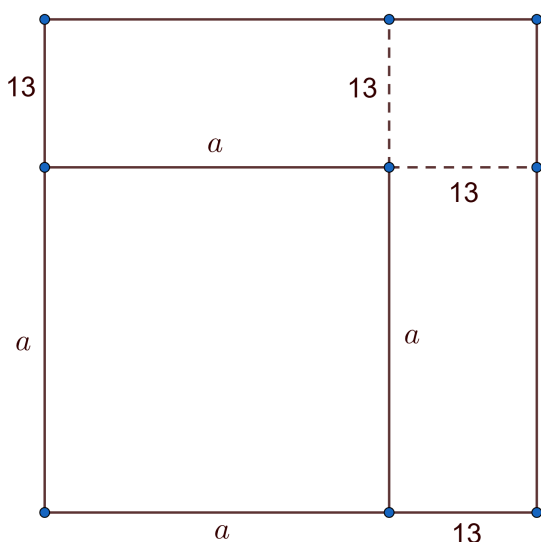
Ako je  $c = 0$ , isprobavanjem svih mogućnosti za znamenku  $a$ , dobijemo da jednadžba nema rješenja u ovom slučaju. Ako je pak  $c = 5$ , ponovno isprobavanjem svih mogućnosti za znamenku  $a$  dobijemo rješenja 135, 225, 315 i 405.

#### **Zadatak K-2.6.** [35 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je  $1053 \text{ cm}^2$ . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

#### **Prvo rješenje.**

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s  $a$ . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu  $a + 13$ . Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Uočimo kako je veći kvadrat podijeljen na četiri dijela i to na manji kvadrat, dva sukladna pravokutnika s duljinama stranica  $a$  i 13 cm te kvadrat s duljinom stranice 13 cm.

Razliku površina dvaju zadanih kvadrata čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice 13 cm. Površina tog kvadrata je  $13 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$ .

Dakle, površina dvaju pravokutnika je jednaka  $1053 \text{ cm}^2 - 169 \text{ cm}^2 = 884 \text{ cm}^2$ , a površina jednog pravokutnika je jednaka  $884 \text{ cm}^2 : 2 = 442 \text{ cm}^2$ .

Budući da pravokutnik ima duljine stranica  $a$  i 13 cm, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} 13 \cdot a &= 442 \\ a &= 442 : 13 \\ a &= 34 \text{ cm} \end{aligned}$$

Duljina stranice manjeg kvadrata je 34 cm pa je njegov opseg jednak  $4 \cdot 34 \text{ cm} = 136 \text{ cm}$ .

Duljina stranice većeg kvadrata je  $34 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 47 \text{ cm}$  pa je njegov opseg jednak  $4 \cdot 47 \text{ cm} = 188 \text{ cm}$ .

Zbroj njihovih opsega je jednak  $136 \text{ cm} + 188 \text{ cm} = 324 \text{ cm}$ .

### Drugo rješenje.

Uz sliku i oznake kao i u prvom rješenju, zaključujemo da razliku površina čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice  $13 \text{ cm}$ . Zapisujemo jednadžbu i određujemo  $a$ :

$$2 \cdot 13a + 13 \cdot 13 = 1053$$

$$26a + 169 = 1053$$

$$26a = 884$$

$$a = 884 : 26$$

$$a = 34$$

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

### Zadatak K-2.7. [40 bodova]

Na svakoj stranici trokuta  $ABC$  označeno je po pet točaka različitih od  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Koliko ukupno postoji trokuta čiji vrhovi su istaknute točke? Među istaknute točke ubrajamo vrhove trokuta  $ABC$  i točke označene na stranicama trokuta  $ABC$ .

### Prvo rješenje.

Prebrojimo najprije broj traženih trokuta koji imaju kao vrh neku od točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Očito, trokut  $ABC$  je jedini koji sadrži istodobno sve tri ove točke. Prebrojimo koliko trokuta sadrži kao vrhove točno dvije od ovih točaka. Među tri točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  imamo 3 mogućnosti za izbor dvije točke (jer nam poredak nije bitan). U svakom ovom izboru, treću točku trokuta možemo izabrati na  $2 \cdot 5 = 10$  načina, jer ne smijemo izabrati nijednu točku na dužini koju određuju dva odabrana vrha, kao ni treću točku. Sve skupa dakle imamo  $3 \cdot 10 = 30$  različitih trokuta koji kao vrhove sadrže točno dvije točke među točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Dalje, prebrojimo koliko trokuta ima točno jedan vrh među točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Neka je taj vrh točka  $A$  (u ostalim slučajevima prebrojavanje je potpuno analogno). Ako su sada oba preostala vrha na stranici  $\overline{BC}$ , tada imamo  $(5 \cdot 4) : 2 = 10$  mogućih trokuta. Naime, na stranici  $\overline{BC}$  označeno je 5 novih točaka. Od njih trebamo izabrati dvije različite točke koje će tvoriti trokut zajedno s točkom  $A$ . Prvu točku možemo izabrati na 5 načina, a drugu na 4 (ne smije biti ista kao prva), stoga množimo 5 i 4. Međutim, primijetimo da ćemo ovim postupkom dva puta prebrojati svaki dobiveni trokut, zato što nije važno kojim redoslijedom odaberemo točke. Stoga je stvarni broj trokuta upola manji i stoga dijelimo s 2.

Ako je samo jedan od preostalih vrhova na stranici  $\overline{BC}$  (neka od 5 označenih točaka), treći vrh može biti bilo koji od  $5 + 5 = 10$  označenih točaka na stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ . To daje ukupno  $5 \cdot 10 = 50$  trokuta u ovom slučaju.

Konačno, ako je jedan preostali vrh trokuta na stranici  $\overline{AB}$ , a drugi na stranici  $\overline{AC}$ , tada imamo  $5 \cdot 5 = 25$  mogućih trokuta (sa svake od ovih stranica odabiremo jednu od pet mogućih točaka). Sve zajedno imamo  $10 + 50 + 25 = 85$  trokuta koji imaju točku  $A$  kao vrh i nemaju točke  $B$  ni  $C$  kao vrhove. Očito je da će biti jednako toliko trokuta koji sadrže točno jedan od vrhova  $B$  i  $C$ . Također, među ovim trokutima niti jedan se nije ponovio, jer bi u suprotnom taj trokut sadržavao barem dva vrha među točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Dakle, ukupni broj trokuta ove vrste je  $3 \cdot 85 = 255$ .

Sada nam ostaje prebrojati koliko trokuta postoji čiji vrhovi nisu nijedna od točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Dvije su mogućnosti:

- (i) svaki vrh je na svojoj stranici trokuta  $ABC$
- (ii) dva vrha trokuta su na istoj stranici trokuta  $ABC$ .

U slučaju (i) biramo po jedan vrh među 5 točaka sa svake stranice trokuta  $ABC$ , pa imamo  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

različitih trokuta. U slučaju (ii) najprije biramo stranicu trokuta  $ABC$  na kojoj se nalaze dva vrha trokuta na 3 načina, potom ta dva vrha biramo na  $(5 \cdot 4) : 2 = 10$  načina (poredak nam ponovno nije bitan), a zadnji vrh biramo među preostalih 10 označenih točaka na druge dvije stranice trokuta  $ABC$ . Dakle, imamo  $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$  različitih trokuta u ovom slučaju.

Ukupni broj traženih trokuta konačno iznosi:

$$1 + 30 + 255 + 125 + 300 = 711.$$

### Drugo rješenje.

Zajedno sa vrhovima trokuta  $ABC$ , ukupno je istaknuto 18 točaka. Pronađimo broj načina kako odabrati 3 točke među njima. Za odabir „prve” točke imamo 18 izbora, za odabir „druge” 17 izbora, a za odabir „treće” 16 izbora. Prema principu uzastopnog prebrojavanja, ukupno je to  $18 \cdot 17 \cdot 16$  načina.

Pri tome je nebitno koja je točka „prva”, koja „druga”, a koja „treća” pa taj ukupan broj treba podijeliti sa brojem poredaka tri točke. Npr. ako promatramo trokut od točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$ , imamo 6 različitih poredaka:  $ABC$ ,  $ACB$ ,  $BAC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$  i  $CBA$ . Ili principom uzastopnog prebrojavanja, imamo  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  različitih poredaka.

Dakle, ukupan broj različitih odabira 3 točke je jednak

$$(18 \cdot 17 \cdot 16) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 816.$$

To ipak nije rješenje zato što smo ovime brojili „trokute” od točaka na istoj stranici, a znamo da tri točke na istoj dužini ne čine trokut.

Na jednoj stranici imamo  $7 \cdot 6 \cdot 5$  mogućih odabira tri točke, podijeljen sa  $3 \cdot 2 \cdot 1$  (slično kao i prije, poredak tri točke je nebitan) pa dobivamo:

$$(7 \cdot 6 \cdot 5) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 35,$$

što znači da na sve tri stranice zajedno imamo  $35 \cdot 3 = 105$  različitih odabira tri točke.

Konačno, traženi broj trokuta je:

$$816 - 105 = 711.$$

### Zadatak K-2.8. [45 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih razlikom ta dva broja (uvijek oduzima manji broj od većeg, a ako su jednaki zamjenjuje ih nulom). Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

a) Može li taj preostali broj biti 20?

b) Može li taj preostali broj biti 25?

### Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se

ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo  $2026 : 2 = 1013$  neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

**b)** U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$ ,  $\dots$ ,  $(23, 24)$ ,  $(26, 27)$ ,  $(28, 29)$ ,  $\dots$ ,  $(2024, 2025)$  i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.