

MEDO 2025./2026.

Drugo kolo

6.12.2025.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-2.1. [10 bodova]

Mirela i Paula zajedno su za Božić dobile 50 bombona, Paula i Izabela su zajedno dobile 38 bombona, a Mirela i Izabela su zajedno dobile 56 bombona. Koliko bombona je dobila svaka od djevojaka?

Rješenje.

Označimo sa M , P i I količinu bombona koje imaju redom Mirela, Paula i Izabela. Znamo da su te veličine u sljedećim odnosima:

$$M + P = 50$$

$$P + I = 38$$

$$M + I = 56$$

Pozbrajamo li sve tri dobivene jednadžbe dobivamo $2M + 2P + 2I = 144$, odnosno

$$M + P + I = 72.$$

Sada znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona, a Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ostatak od 50 do 72 bombona, odnosno

$$I = 72 - M - P = 72 - (M + P) = 72 - 50 = 22.$$

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$P = 38 - I = 38 - 22 = 16.$$

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$M = 56 - I = 56 - 22 = 34.$$

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

Zadatak J-2.2. [15 bodova]

Izračunaj:

$$20.25 + 20.24 + 20.23 - 20.22 - 20.21 - 20.20 + 20.19 + 20.18 + 20.17 - 20.16 - 20.15 - 20.14 + \dots + 0.03 + 0.02 + 0.01.$$

Rješenje.

Primijetimo kako se pravilno ponavljaju tri pozitivna broja pa tri negativna broja i tako do kraja. Također, uočimo da je

$$20.25 - 20.22 = 20.24 - 20.21 = 20.23 - 20.20 = 0.03.$$

Slično je i

$$20.19 - 20.16 = 20.18 - 20.15 = 20.17 - 20.14 = 0.03.$$

Budući da je svaka takva razlika jednaka 0.03, u svakoj grupi od 6 brojeva, rezultat će biti $0.03 + 0.03 + 0.03 = 0.09$. Prikažimo zornije:

$$\underbrace{20.25 + 20.24 + 20.23 - 20.22 - 20.21 - 20.20}_{0.09} + \underbrace{20.19 + 20.18 + 20.17 - 20.16 - 20.15 - 20.14}_{0.09} + \dots + 0.01.$$

Budući da imamo 2025 brojeva, podijelimo 2025 sa 6, što je broj brojeva u svakoj grupi. Dobit ćemo količnik koji predstavlja koliko grupa imamo i ostatak koji govori koliko brojeva nije upalo u grupe od 6 brojeva.

Dobivamo da je $2025 : 6 = 337$ i ostatak 3. Dakle, imamo 337 grupa koje daju rezultat 0.09 i još na kraju zbroj 3 broja $0.03 + 0.02 + 0.01$. Konačni rezultat je:

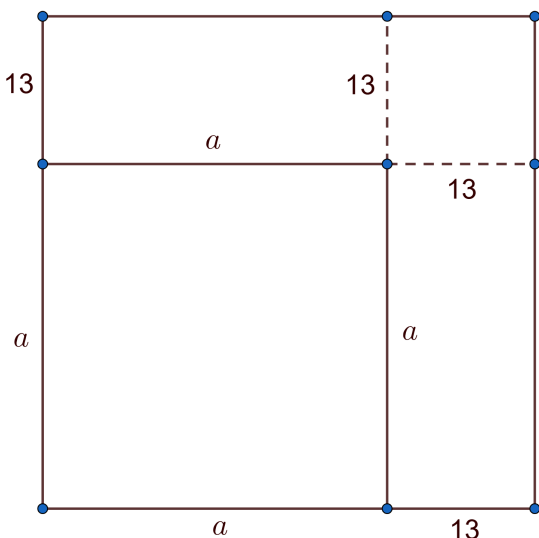
$$337 \cdot 0.09 + 0.03 + 0.02 + 0.01 = 30.39.$$

Zadatak J-2.3. [20 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je 1053 cm^2 . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

Prvo rješenje.

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s a . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu $a + 13$. Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Uočimo kako je veći kvadrat podijeljen na četiri dijela i to na manji kvadrat, dva sukladna pravokutnika s duljinama stranica a i 13 cm te kvadrat s duljinom stranice 13 cm.

Razliku površina dvaju zadanih kvadrata čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice 13 cm. Površina tog kvadrata je $13 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$.

Zapisujemo jednađbu i određujemo a :

$$2 \cdot 13a + 169 = 1053$$

$$26a + 169 = 1053$$

$$26a = 884$$

$$a = 884 : 26$$

$$a = 34$$

Duljina stranice manjeg kvadrata je 34 cm pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 34 \text{ cm} = 136 \text{ cm}$.

Duljina stranice većeg kvadrata je $34 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 47 \text{ cm}$ pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 47 \text{ cm} = 188 \text{ cm}$.

Zbroj njihovih opsega je jednak $136 \text{ cm} + 188 \text{ cm} = 324 \text{ cm}$.

Drugo rješenje.

Uz sliku i oznake na slici u prvom rješenju, razlika površina jednaka je $(a + 13)^2 - a^2$.

$$(a + 13)^2 - a^2 = 1053$$

$$a^2 + 26a + 169 - a^2 = 1053$$

$$26a = 884$$

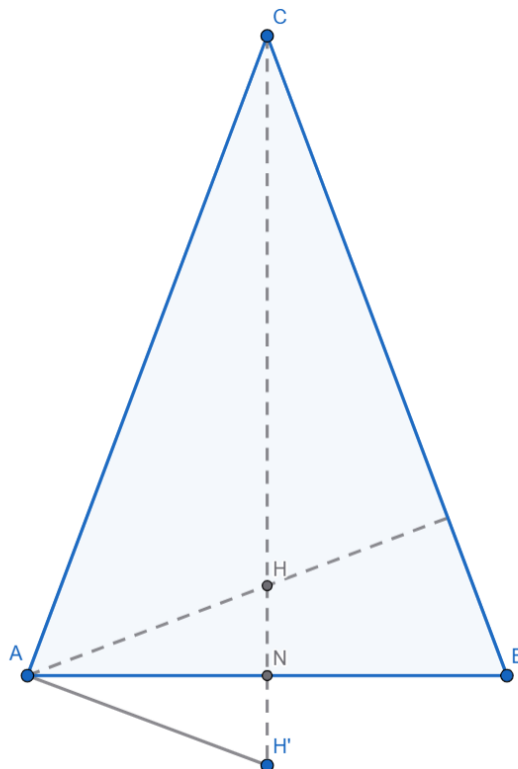
$$a = 34$$

Dalje zaključujemo isto kao i u prvom rješenju.

Zadatak J-2.4. [25 bodova]

Neka je ABC šiljastokutni jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{AB}$ i neka je H ortocentar tog trokuta. Neka je H' točka simetrična točki H u odnosu na pravac AB . Odredi mjeru kuta $\angle H'AC$.

Prvo rješenje.



Zapišimo $\sphericalangle H'AC$ kao zbroj tri kuta:

$$\sphericalangle H'AC = \sphericalangle H'AB + \sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC$$

Pritom znamo da je $\sphericalangle H'AB = \sphericalangle BAH$ zbog simetrije, te je jasno da $\sphericalangle BAH = 90^\circ - \sphericalangle CBA$ (promotrimo zbroj kuteva u trokutu s vrhovima A , B i nožištem visine iz A), što je pak $90^\circ - \sphericalangle BAC$ jer je ABC jednakokračan.

Sada smo gotovi jer je:

$$\sphericalangle H'AC = \sphericalangle H'AB + (\sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC) = 90^\circ - \sphericalangle BAC + \sphericalangle BAC = 90^\circ.$$

Drugo rješenje.

Budući da se radi o jednakokračnom trokutu, ukoliko produžimo pravac CH , znamo da će se H' nalaziti na njemu te da je nožište visine iz C (označimo ga s N) ujedno polovište $\overline{AB}$ (može se lagano pokazati preko sukladnosti trokuta $\triangle ANC$ i $\triangle BNC$).

Budući da je N polovište $\overline{AB}$, te je po definiciji osne simetrije polovište $\overline{HH'}$, onda je $AH'BH$ četverokut kojem se dijagonale raspolavljaju, što znamo da je paralelogram (ostavljamo formalni dokaz kao vježbu čitatelju; preko sukladnosti).

Kako je onda AH' paralelan s BH koji je visina na $\overline{AC}$, onda je traženi kut također pravi kao kut uz presječnicu paralelnih pravaca.

Treće rješenje.

Ukoliko znamo lemu o refleksijama ortocentra (možete ju naći recimo na MNM predavanjima ili u Evan Chen: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads - lemma 1.17), ona nam po tvrdnji a) govori da H' leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Dapače, budući da je nožište visine ujedno i polovište stranice $\overline{AB}$, ona nam po tvrdnji b) iste leme kaže da je $\overline{CH'}$ baš i promjer opisane kružnice trokutu ABC .

Dakle, tražimo kut nad promjerom kružnice, pa je po Talesovom poučku traženi kut pravi.

Zadatak J-2.5. [30 bodova]

Odredi znamenke a , b i c tako da razlomak $\frac{a}{b+c}$ ima decimalni zapis $\overline{0.ab}$.

Rješenje.

Jednadžba glasi:

$$\frac{a}{b+c} = \overline{0.ab}.$$

Odmah vidimo da mora vrijediti $b+c > a$ zato što je vrijednost razlomka $\frac{a}{b+c}$ manja od 1. Riješimo odmah i „rubni” slučaj $a = 0$. Tada je $\frac{a}{b+c} = 0 = \overline{0.ab}$, pa mora biti $b = 0$. Broj c u ovom slučaju može biti bilo koja znamenka različita od 0, jer bismo u slučaju da je i $c = 0$ dobili neodređeni razlomak $\frac{0}{0}$. Zaključujemo da su sve trojke $(0, 0, c)$, gdje je $c \neq 0$, rješenje jednadžbe, tj. tražene znamenke.

Prisjetimo se da decimalni broj $\overline{0.ab}$ pišemo u obliku razlomka na sljedeći način: $\overline{0.ab} = \frac{\overline{ab}}{100}$. Uvrstimo to u početnu jednadžbu te se riješimo nazivnikā:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} &= \frac{\overline{ab}}{100} \quad / \cdot 100(b+c) \\ 100a &= \overline{ab} \cdot (b+c). \end{aligned}$$

Sada je jedan mogući način rješavanja ove jednadžbe ispitivanje svih mogućnosti za znamenku a i određivanje odgovarajućih znamenki b i c . No, možemo i skratiti posao, razmatranjem faktora lijeve i desne strane jednakosti.

Znamo da je $100 = 2^2 \cdot 5^2$, dakle faktori 2 i 5 će se pojaviti najmanje dva puta u rastavu na proste faktore lijeve strane jednakosti, što znači da se nalaze i u rastavu na proste faktore desne strane. Promotrimo faktor 5. Broj $b + c$ pripada skupu $\{1, 2, 3, \dots, 17, 18\}$ pa može imati najviše jedan faktor 5, što znači da broj $\overline{ab}$ mora imati barem jedan faktor 5 u sebi. Iz toga slijedi da je $b \in \{0, 5\}$. Međutim, ako je $b = 0$, jednadžba postaje $100a = \overline{a0} \cdot c$, iz čega bi slijedilo $c = 10$, što nije moguće jer c mora biti znamenka.

Zaključujemo da mora biti $b = 5$. Jednadžba sada postaje $100a = \overline{a5} \cdot (5 + c)$. Broj $\overline{a5}$ sadrži dva faktora 5 jedino ako je $a = 2$ ili $a = 7$. U slučaju $a = 2$ dobijemo rješenje $(a, b, c) = (2, 5, 3)$. Ako je $a = 7$, broj 75 sadrži faktor 3, koji nije sadržan u broju $7 \cdot 100$, pa jednadžba nema rješenja u tom slučaju.

U svim ostalim slučajevima, broj $\overline{a5}$ sadrži samo jedan faktor 5, pa broj $5 + c$ mora također sadržavati faktor 5. To je moguće jedino za $5 + c = 5$ i $5 + c = 10$. Međutim, vrijedi $\overline{a5} \cdot 5 < 100a$ i $\overline{a5} \cdot 10 > 100a$, pa jednadžba nema rješenja u ovim slučajevima. Time smo ispitali sve mogućnosti.

Napomena. Kada dođemo do jednadžbe $100a = \overline{a5} \cdot (5 + c)$, možemo razmotriti i faktor 2. Broj $\overline{a5}$ ne sadrži faktor 2, pa slijedi da broj $5 + c$ mora sadržavati faktor $2^2 = 4$. Iz toga slijedi $5 + c = 8$ ili $5 + c = 12$. Sada nastavljamo slično kao u rješenju.

Zadatak J-2.6. [35 bodova]

Odredi sve četvorke realnih brojeva (x, y, z, w) koje zadovoljavaju sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} xy + z + w = 6 \\ yz + w + x = 2 \\ zw + x + y = 5 \\ wx + y + z = 3. \end{cases}$$

Rješenje.

Tražimo način na koji možemo kombinirati dane jednadžbe kako bismo pojednostavili sustav. Zbrajanje svih jednadžbi ne daje povoljan rezultat. Oduzmimo stoga drugu jednakost od prve:

$$\begin{aligned} (xy + z + w) - (yz + w + x) &= 6 - 2 \\ xy + z + w - yz - w - x &= 4 \\ xy - yz + z - x &= 4 \\ y(x - z) - (x - z) &= 4 \\ (x - z)(y - 1) &= 4. \end{aligned}$$

Slično, oduzimanjem treće jednadžbe od druge, četvrte od treće i prve od četvrte, dobijemo redom sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} (y - w)(z - 1) &= -3 \\ (z - x)(w - 1) &= 2 \\ (w - y)(x - 1) &= -3. \end{aligned}$$

Uspoređivanjem (tj. dijeljenjem) parova dobivenih jednadžbi s istim prvim faktorom zaključujemo da vrijedi $y - 1 = -2(w - 1)$ i $z - 1 = -(x - 1)$, iz čega slijedi $y = -2w + 3$ i $z = -x + 2$. Uvrštavanjem u posljednju jednadžbu početnog sustava i sređivanjem dobivamo $(x - 2)(w - 1) = 0$. Iz toga slijedi da je $x = 2$ ili $w = 1$. Ako je $x = 2$, dobijemo redom $z = 0$, $w = 0$ i $y = 3$. Ako je $w = 1$, dobijemo $y = 1$,

no tada uvrštavanjem u prvu jednadžbu polaznog sustava dobijemo $x + z = 5$, što je u kontradikciji s jednakosti $z = -x + 2$, stoga jednadžba nema rješenja u ovom slučaju. Zaključujemo da je jedino rješenje sustava četvorka $(x, y, z, w) = (2, 3, 0, 0)$.

Zadatak J-2.7. [40 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih apsolutnom vrijednošću razlike ta dva broja. Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

- a) Može li taj preostali broj biti 20?
- b) Može li taj preostali broj biti 25?

Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo $2026 : 2 = 1013$ neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

b) U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva $(1, 2), (3, 4), \dots, (23, 24), (26, 27), (28, 29), \dots, (2024, 2025)$ i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.

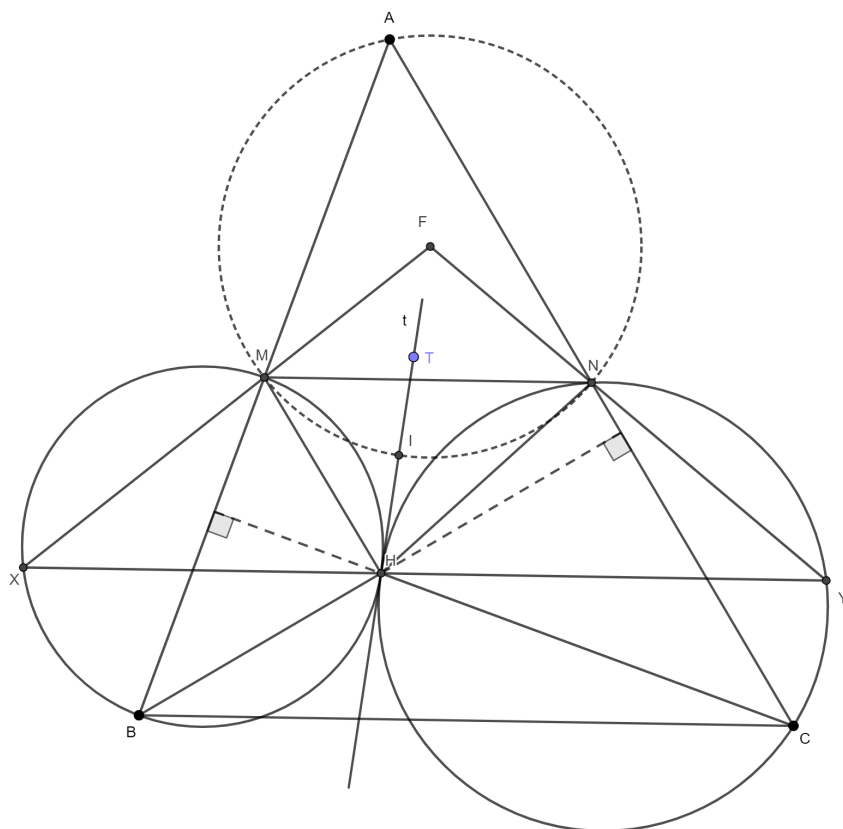
Zadatak J-2.8. [45 bodova]

Neka je H ortocentar trokuta ABC te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Pretpostavimo da se točka H nalazi unutar četverokuta $BCNM$ te da se opisane kružnice trokuta BHM i CNH međusobno dodiruju. Pravac kroz H paralelan s BC siječe opisane kružnice trokuta BHM i CNH redom u točkama X i Y . Neka je F sjecište pravaca MX i NY te neka je I središte upisane kružnice trokuta MHN .

Dokaži da je $|FI| = |FA|$.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, pravac t zajednička tangetna opisanih kružnica trokuta BHM i CNH te točka T proizvoljna točka na pravcu t kao na slici.



Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ABC pa je zato i pravac MN paralelan s pravcima BC i XY .
Budući da je H ortocentar trokuta ABC slijedi da je

$$\sphericalangle HBM = \sphericalangle HBA = 90^\circ - \alpha.$$

Četverokut $BHMX$ je tetivan pa je zato

$$\sphericalangle HXM = \sphericalangle HBM = 90^\circ - \alpha.$$

Konačno kako su pravci XY i MN paralelni imamo da je

$$\sphericalangle NMF = \sphericalangle HXM = 90^\circ - \alpha.$$

Analogno se dobije da je i $\sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$.

Iz gornjeg imamo da je $\sphericalangle NMF = \sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$ pa je zato $|FM| = |FN|$. Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle MFN = 180^\circ - \sphericalangle NMF - \sphericalangle FNM = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$$

iz čega slijedi da je kut $\sphericalangle MFN$ središnji kut obodnog kuta MAN na opisanoj kružnici trokuta AMN . Posebno, imamo da je F središte opisane kružnice trokuta AMN .

Dokažimo da se točka I nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle THM &= \sphericalangle MHX = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle NHT &= \sphericalangle NCH = 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi da je

$$\sphericalangle NHM = \sphericalangle NHT + \sphericalangle THM = 180^\circ - 2\alpha.$$

Konačno, kako je I središte upisane kružnice trokuta MHN možemo izračunati

$$\sphericalangle NIM = 180^\circ - \sphericalangle MNI - \sphericalangle IMN = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle MNH + \sphericalangle HMN) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle NHM = 180^\circ - \alpha.$$

Iz gornjeg slijedi da je četverokut $MINA$ tetivan, tj. točka I se nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Budući da je F središte opisane kružnice trokuta AMN i točka I se također nalazi na opisanoj kružnici slijedi da je $|FI| = |FA|$ što je i trebalo dokazati.