

MEDO 2025./2026.

Prvo kolo

8.11.2025.

Loomen

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak S-1.1. [10 bodova]

Jakov je prvog dana u mjesecu dobio mjesečni džeparac. Na početku mjeseca, Jakov je kupio tri bilježnice na kvadratiće za ukupno 6 eura. Sredinom mjeseca Jakov je kupio novu loptu za polovinu preostalog iznosa koji mu je ostao od džeparca. Na kraju mjeseca kupio je i četiri bilježnice na linije, koje koštaju (svaka pojedinačno) upola manje od bilježnica na kvadratiće, nakon čega mu je preostalo točno 40% početnog iznosa džeparca.

Koliki džeparac je dobio Jakov?

Rješenje.

Postavimo pažljivo jednadžbu. Na početku mjeseca je Jakov imao neki iznos X . Zatim je potrošio 6 eura, pa je nakon prve kupovine imao $X - 6$ preostalo.

Zatim je potrošio polovinu od iznosa koji mu je ostao na loptu, što znači da mu je ostala druga polovica, tj. $(X - 6)/2$.

Konačno, u zadnjoj kupnji je kupio 4 bilježnice na linije. Budući da su tri bilježnice na kvadratiće bile 6 eura, onda je svaka bilježnica na kvadratiće 2 eura. Budući da su bilježnice na linije upola jeftinije, onda je svaka koštala po 1 euro, odnosno ukupno je potrošio 4 eura.

Dakle, ostalo mu je $(X - 6)/2 - 4$, što nam zadatak kaže da je baš $0.4X$ (40% početnog iznosa, kojeg smo označili s X).

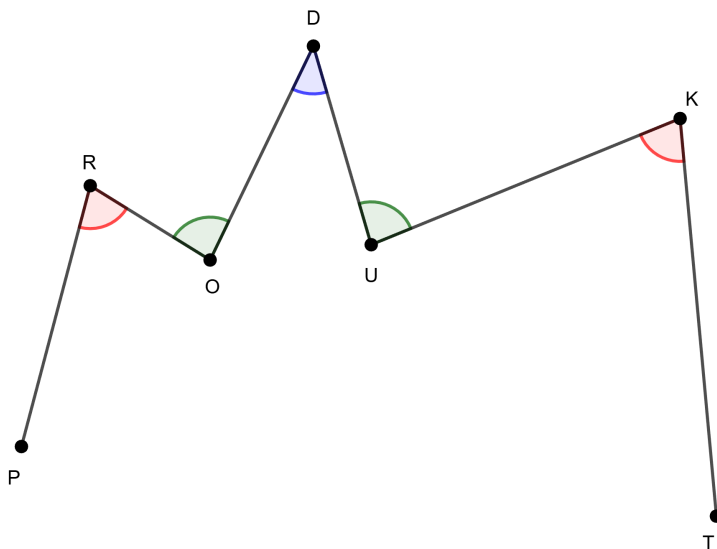
Rješavamo:

$$\begin{aligned}(X - 6)/2 - 4 &= 0.4X \\(X - 6)/2 &= 0.4X + 4 && / \cdot 2 \\X - 6 &= 0.8X + 8 \\X &= 0.8X + 8 + 6 \\0.2X &= 14 && / \cdot 5 \\X &= 70\end{aligned}$$

Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 70 eura.

Zadatak S-1.2. [15 bodova]

Mjera kutova označenih crvenom bojom na slici iznosi 73° (kutovi $\angle PRO$ i $\angle UKT$), plavom bojom 42° (kut $\angle ODU$), a zelenom bojom 84° (kutovi $\angle DOR$ i $\angle KUD$). Odredi mjeru kuta koji zatvaraju pravci PR i TK .

**Prvo rješenje.**

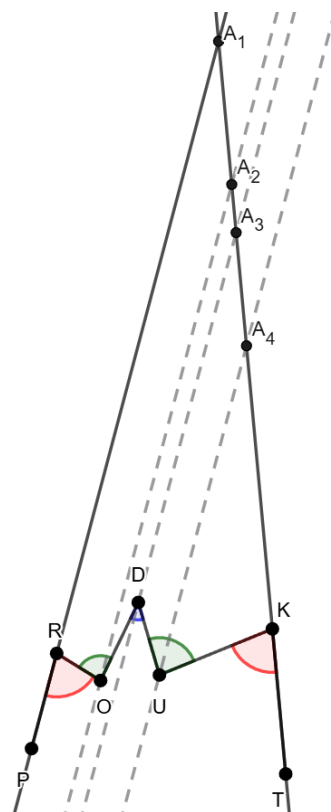
Docrtajmo pravce paralelne s PR kroz svaku od točaka O , D i U . Označimo s A_1 presjek pravca PR s pravcem TK , te s A_2 , A_3 i A_4 redom presjeke novopovučениh pravaca kroz točke O , D i U s pravcem TK , kao što je označeno na slici.

Pravac OA_2 dijeli kut $\angle DOR$ na kutove $\angle DOA_2$ i $\angle A_2OR$. Kut $\angle A_2OR$ je jednak 73° jer je jednak kutu $\angle PRO$ budući da su pravci PR i OA_2 paralelni, a RO njihova presječna. Dakle, budući da se radi o kutevima uz presječnicu paralelnih pravaca, $\angle DOA_2$ mora biti jednak 11° .

Nadalje, pravac DA_3 dijeli kut $\angle ODU$ na dva kuta sličnih svojstava. Lijevi kut je jednak 11° jer je jednak kutu $\angle DOA_2$ budući da su pravci OA_2 i DA_3 paralelni, pa desni kut mora biti jednak 31° .

Konačno, pravac UA_4 dijeli kut $\angle KUD$ na kutove $\angle KUA_4$ i $\angle A_4UD$. Kut $\angle A_4UD$ je jednak 31° . Dakle, $\angle KUA_4$ mora biti jednak 53° .

Promotrimo za kraj trokut UKA_4 . Jasno, $\angle A_4KU = 107^\circ$, pa dobivamo da je $\angle UA_4K = 20^\circ$, a budući da je UA_4 paralelan s PR , onda je i traženi kut $\angle RA_1K$ jednak 20° .



Drugo rješenje.

Docrtajmo točku I kao presjek pravaca PR i TK .

Tada možemo prepoznati da je $RODUKI$ šesterokut, pa zbroj njegovih kuteva mora biti $180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$.

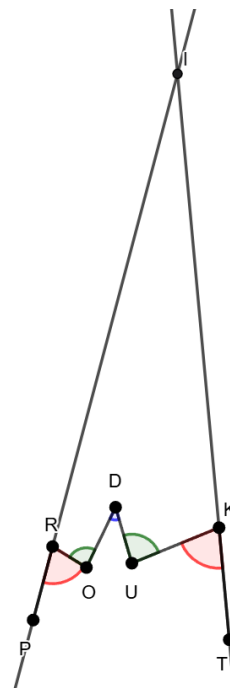
Kutove $\angle ORI$ i $\angle IKU$ možemo prepoznati kao suplementarne kuteve crvenim kutevima, pa je njihova mjera $180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$.

Kut $\angle UDO$ prepoznavamo kao vanjski kut plavom kutu, pa je njegova mjera $360^\circ - 42^\circ = 318^\circ$.

Dakle, prema zbroju kuteva u šesterokutu vrijedi:

$$\begin{aligned}720^\circ &= \angle RIK + \angle IKU + \angle KUD + \angle UDO + \angle DOR + \angle ORI \\720^\circ &= \angle RIK + \angle 107^\circ + 84^\circ + 318^\circ + 84^\circ + 107^\circ \\ \angle RIK &= 720^\circ - 700^\circ\end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi 20° .



Treće rješenje.

Zadatak možemo interpretirati na sljedeći način. Neka se osoba nalazi u gradu P i treba doći do grada T , prolazeći kroz gradove R, O, D, U, K . Osoba inicijalno gleda u smjeru grada R . Pitanje je za koliko će se promijeniti smjer gledanja u odnosu na inicijalni smjer kada osoba stigne u grad T iz grada K .

Skretanje u desno (0° do 180° u smjeru kazaljke na sat) ćemo interpretirati kao pozitivnu promjenu smjera, a skretanje u lijevo (0° do 180° u smjeru obrnutom od kazaljke na satu) ćemo interpretirati kao negativnu promjenu. Osoba se kreće na sljedeći način: najprije od P do R pa desno za 73° do O , lijevo za 84° do D , desno za 42° do U , lijevo za 84° do K i na koncu desno za 73° do T .

Stoga se ukupno smjer promijenio za $+73^\circ - 84^\circ + 42^\circ - 84^\circ + 73^\circ = 20^\circ$ pa je kut koji zatvaraju pravci PR i TK jednak 20° .

Zadatak S-1.3. [20 bodova]

Svakom vrhu pravilnog 2025-kuta pridružen je po jedan prirodan broj. Zbroj svih tih brojeva iznosi 7092. Par susjednih vrhova u ovom 2025-kutu nazivamo *prijateljskim* ako je zbroj njima pridruženih brojeva veći ili jednak 8.

Dokaži da postoje barem dva prijateljska para.

Prvo rješenje.

Označimo brojeve koji su pridruženi vrhovima s $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$. Označimo dodatno i $a_1 = b_1 + b_2$, $a_2 = b_2 + b_3$, $\dots$, $a_{2025} = b_{2025} + b_1$.

Budući da znamo da je $b_1 + b_2 + \dots + b_{2025} = 7092$, vrijedi da je $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{2025}) = 14184$. Primijetimo kako je $14184 = 2025 \cdot 7 + 9$.

Dakle, prema Dirichletovom principu, vrijedi da među brojevima $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ postoji barem jedan koji iznosi barem 8. Neka je to a_i . Naš posao sada je pronaći još barem jedan takav broj.

Imamo dvije mogućnosti: ili je a_i „relativno mal” (što bi nam omogućilo da pokažemo da postoji još barem jedan $a_j \geq 8$) ili je „relativno velik” (što bi nam pak omogućilo da nađemo još jedan $a_j \geq 8$ u okolini budući da su svi brojevi u vrhovima mnogokuta prirodni brojevi).

Ako je a_i relativno mali, provjerimo koliko mali mora biti da bismo među ostalih 2024 broja mogli naći neki veći ili jednak 8. Ako bi zbroj preostalih brojeva bio barem $2024 \cdot 7 + 1 = 14169$, onda bi ponovnom primjenom Dirichletovog principa mogli naći novi broj koji je dovoljno velik među preostalima, što završava zadatak. Dakle, ukoliko je $a_i \leq 14184 - 14169 = 15$, onda se među ostalim brojevima a sigurno može naći još jedan koji je veći ili jednak 8.

Ako je pak a_i relativno velik, tj. $a_i \geq 16$, kako je $a_i = b_i + b_{i+1}$, onda je barem jedan od brojeva b_i i b_{i+1} veći ili jednak 8. Taj broj će sa oba svoja susjeda činiti po jedan prijateljski par, tj. postoje barem dva prijateljska para, što je trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Koristit ćemo iste oznake kao u prvom rješenju. Neka je dodatno $S = b_1 + \dots + b_{2025}$. Tada je $a_1 + \dots + a_{2025} = 2S$.

Pretpostavimo da je suma svaka dva susjedna broja manja od 8. Tada je

$$2S = a_1 + \dots + a_{2025} \leq 2025 \cdot 7 = 14175.$$

No $2S = 14184$ pa to nije moguće. Stoga postoji barem jedan prijateljski par, označimo ga s a_i .

Pretpostavimo sada da ne postoji drugi prijateljski par, tj. da ne postoji j , $j \neq i$ takav da je $a_j \geq 8$. Kako je $a_i = b_i + b_{i+1}$, ukoliko je $b_i \geq 7$, tada je $a_{i-1} = b_{i-1} + b_i \geq 1 + 7 = 8$. Analogno ako je $b_{i+1} \geq 7$ je $a_{i+1} \geq 8$. Stoga je $b_i \leq 6$ i $b_{i+1} \leq 6$ pa je $a_i \leq 12$. No tada imamo

$$2S = a_1 + \dots + a_{2025} \leq 2024 \cdot 7 + a_i \leq 2024 \cdot 7 + 12 = 14180,$$

ali $2S = 14184$ što je kontradikcija. Zaključujemo da moraju postojati barem dva prijateljska para.

Zadatak S-1.4. [25 bodova]

Odredi najveći prirodan broj n za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

postoji prirodan broj A takav da za svaki $2 \leq k \leq n$ postoji k uzastopnih prirodnih brojeva čiji je umnožak A .

Rješenje.

Rješenja zadataka ovog tipa, u kojem se traži najveći prirodan broj za koji vrijedi neka tvrdnja, uvijek se sastoje od dva dijela. Naime, treba dokazati

- a) da za broj za koji tvrdimo da je tražena najveća vrijednost navedena tvrdnja doista vrijedi
- b) da za sve brojeve veće od njega tvrdnja više ne vrijedi.

Kako pristupiti nalaženju n i A ? Jasno, kada bi n bio jednak 2, nije teško pronaći puno načina da se odabere dobar A za njega; točnije, bilo koji A oblika $m(m+1)$ za prirodan broj m zadovoljava taj uvjet.

Možemo li povećati n na 3, 4, ...? Jedan način za pronaći broj koji se prirodno faktorizira na n uzastopnih prirodnih brojeva je promatrati $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Takav broj će uvijek biti moguće raspisati i kao umnožak $n-1$ uzastopnih brojeva: $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Tako recimo za $n = 3$ možemo uzeti $A = 6$ što zaista radi. (Pokazuje se da smo za $n = 3$ mogli uzeti i recimo $A = 210$, koji je moguće zapisati kao $14 \cdot 15$ i kao $5 \cdot 6 \cdot 7$. Možeš li naći još koji dobar A za $n = 3$?)

Ipak, kada uzmemo $n = 4$ i $A = 24$, iako je $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, pokazuje se da 24 ne možemo zapisati kao umnožak dva uzastopna broja. Nakon još malo isprobavanja (recimo možemo probati popraviti konstrukciju tako da gledamo višekratnike od $n!$ ili isprobamo neku potpuno novu konstrukciju), zaista se čini da nećemo uspjeti. Dakle, u ovom trenutku imamo dvije opcije: ili smisliti

novi način za konstruirati neki A za $n = 4$ (i onda se fokusirati na traženje konstrukcije za $n = 5$ ili pokazati da ne može više) ili pokazati da takav A ne postoji već za $n = 4$.

Mi ćemo pokazati da za $n = 4$ takav A ne postoji. Pretpostavimo suprotno, tj. da za $n = 4$ možemo pronaći takav A . Neka je $A = x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, tj. A smo prikazali kao umnožak dva uzastopna prirodna broja x i $x+1$ te kao umnožak četiri uzastopna prirodna broja $y-1$, y , $y+1$, $y+2$.

Raspišimo izraz malo:

$$x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2) = [(y-1)(y+2)][y(y+1)] = [y^2 + y - 2][y^2 + y]$$

Intuitivno, $x \approx y^2 + y - 1$ (ali ne baš), pa ćemo pokazati da x ne može biti prirodan broj ako je y prirodan broj.

Ako bi x bio jednak baš $y^2 + y - 2$, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ (\cancel{y^2 + y - 2})(y^2 + y - 1) &= (\cancel{y^2 + y - 2})(y^2 + y) \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 < y^2 + y$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 2$, lijeva strana je premala da bi bila jednaka desnoj.

Ako bi x bio jednak $y^2 + y - 1$, što je sljedeći prirodni broj, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ (y^2 + y - 1)(\cancel{y^2 + y}) &= (y^2 + y - 2)(\cancel{y^2 + y}) \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 > y^2 + y - 2$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 1$, lijeva strana je prevelika da bi bila jednaka desnoj.

Dakle, zaključujemo da ako vrijedi $x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, onda vrijedi $y^2 + y - 2 < x < y^2 + y - 1$. Kako smo x smjestili strogo između dva prirodna broja, onda x ne može biti prirodan broj! Znači da je naša početna pretpostavka da postoji A koji se tako može zapisati bila kriva; odnosno ne postoji A takav da vrijedi svojstvo iz zadatka za $n = 4$.

Dakle, pokazali smo da za $n = 3$ imamo rješenje ($A = 6$) te da za $n = 4$ nema rješenja. Onda je posve jasno da ni za $n > 4$ nema rješenja, budući da kad bi imali koje rješenje, ono bi automatski bilo rješenje i za $n = 4$. Dakle, najveći prirodan broj n za koji vrijedi tvrdnja iz zadatka je $n = 3$.

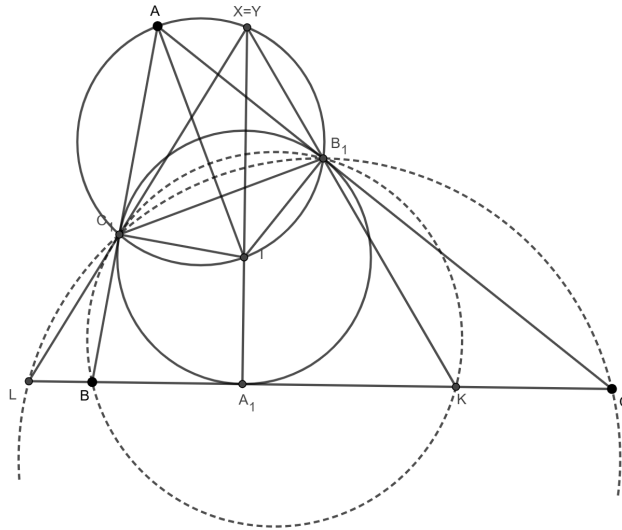
Zadatak S-1.5. [30 bodova]

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su A_1 , B_1 i C_1 redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Opisana kružnica trokuta BC_1B_1 siječe pravac BC u točkama B i K , a opisana kružnica trokuta CB_1C_1 siječe pravac BC u točkama C i L . Dokaži da se pravci LC_1 , KB_1 i IA_1 sijeku u jednoj točki.

Prvo rješenje.

Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC .

Neka je točka X sjecište pravaca KB_1 i IA_1 , a točka Y sjecište pravaca LC_1 i IA_1 . Dokazat ćemo da je $X = Y$ iz čega će slijediti tvrdnja zadatka.



AC_1 i AB_1 su tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC pa je zato $|AC_1| = |AB_1|$, tj. trokut AC_1B_1 je jednakokračan. Kako je $\sphericalangle C_1AB_1 = \alpha$ slijedi da je

$$\sphericalangle B_1C_1A = \sphericalangle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Iz tetivnog četverokuta BKB_1C_1 imamo da je

$$\sphericalangle B_1KB = \sphericalangle B_1C_1A = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Kako je IA_1 okomito na BC slijedi da je

$$\sphericalangle IXB_1 = \sphericalangle A_1XK = 90^\circ - \sphericalangle B_1KB = \frac{\alpha}{2}.$$

Nadalje, AI je simetrala kuta u vrhu A pa je zato

$$\sphericalangle IAB_1 = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle IXB_1,$$

iz čega slijedi da je četverokut IB_1XA tetivan.

Uočimo da je i četverokut IB_1AC_1 također tetivan jer je

$$\sphericalangle IC_1A = \sphericalangle AB_1I = 90^\circ.$$

Spajanjem zajedno te dvije tetivnosti slijedi da se točka X nalazi na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 .

Sasvim analogno se dokaže da se i točka Y nalazi na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 .

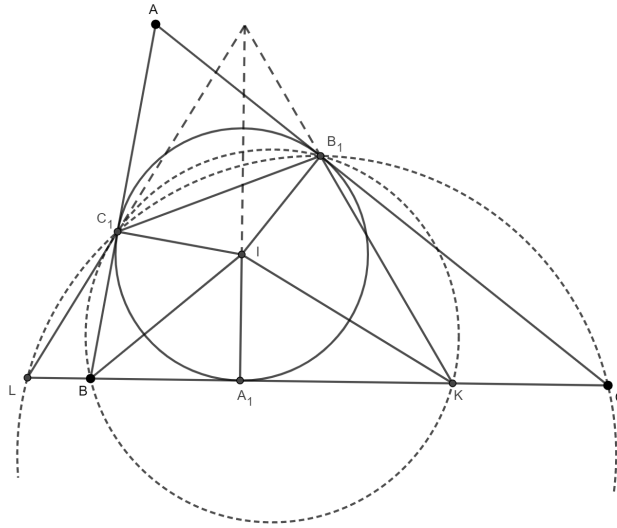
Konačno, kako se točke X i Y obje nalaze na pravcu IA_1 i na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 te ta kružnica već siječe pravac IA_1 u točki I slijedi da mora biti $X = Y$ što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC i neka je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC .

AC_1 i AB_1 su tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC pa je zato $|AC_1| = |AB_1|$, tj. trokut AC_1B_1 je jednakokračan. Kako je $\sphericalangle C_1AB_1 = \alpha$ slijedi da je

$$\sphericalangle B_1C_1A = \sphericalangle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$



Iz tetivnog četverokuta BKB_1C_1 imamo da je

$$\sphericalangle B_1KB = \sphericalangle B_1C_1A = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Analogno iz tetivnog četverokuta LCB_1C_1 slijedi

$$\sphericalangle CLC_1 = \sphericalangle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Budući da je $\sphericalangle B_1KL = \sphericalangle KLC_1$ te je pravac A_1I okomit na pravac KL , da bi dokazali da se pravci B_1K , A_1I i C_1L sijeku u istoj točki dovoljno je dokazati da je A_1 polovište dužine $\overline{KL}$.

Izrazit ćemo duljine dužina $\overline{KA_1}$ i $\overline{LA_1}$ preko r i kutova trokuta ABC .

Iz pravokutnog trokuta IA_1C imamo

$$|CA_1| = |IA_1| \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Analogno je i $|CB_1| = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

Trokutu KCB_1 možemo odrediti sve kutove

$$\begin{aligned} \sphericalangle CKB_1 &= 180^\circ - \sphericalangle B_1KB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \\ \sphericalangle KB_1C &= 180^\circ - \sphericalangle CKB_1 - \sphericalangle B_1CK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma. \end{aligned}$$

Primjenom sinusovog poučka u tom trokutu možemo izračunati duljinu dužine $\overline{CK}$

$$|CK| = |CB_1| \cdot \frac{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma \right)}{\sin \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \left(r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Konačno možemo izračunati duljinu dužine $\overline{KA_1}$

$$\begin{aligned} |KA_1| &= |CA_1| - |CK| = \left(r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= 2r \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili formulu pretvorbe za razliku kosinusa

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Na isti način se dobije da je i $|LA_1| = 2r \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

Dakle, $|KA_1| = |LA_1|$ što smo i htjeli pokazati.

Zadatak S-1.6. [35 bodova]

Dan je neparan prost broj p . Za prirodan broj k takav da je $1 \leq k \leq p-1$ označimo s d_k broj djelitelja broja $kp+1$ koji su veći od k i manji od p . Odredi $d_1 + d_2 + \dots + d_{p-1}$.

Rješenje.

Označimo s D_k skup djelitelja broja $kp+1$ koji su veći od k i manji od p . Tada je $d_k = |D_k|$. Dokazat ćemo da svaki prirodan broj m veći od 1 i manji od p pripada točno jednom skupu D_k . Iz toga će slijediti da je vrijednost tražene sume jednaka $p-2$.

Uzmimo dakle proizvoljan prirodan broj m takav da $1 < m < p$ te promotrimo brojeve $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$. Uočimo najprije da ti brojevi daju različite ostatke pri dijeljenju s m . Naime, ako $ap+1$ i $bp+1$ daju iste ostatke pri dijeljenju s m za neke $1 \leq a < b \leq m-1$ tada vrijedi

$$m \mid (bp+1) - (ap+1) = (b-a)p$$

što je nemoguće jer su m i p relativno prosti ($m < p$) i $b-a < m$.

Nadalje, niti jedan od promatranih brojeva ne daje ostatak 1 pri dijeljenju s m . Ako bi $ap+1$ dao ostatak 1 pri dijeljenju s m za neki $1 \leq a \leq m-1$ tada bi vrijedilo $m \mid ap$ što je nemoguće.

Kako je mogućih ostataka pri dijeljenju s m upravo m , a promatranih $m-1$ brojeva $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$ svi daju različite ostatke pri dijeljenju s m te nikoji od njih ne daje ostatak 1 zaključujemo da je točno jedan od brojeva $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$ djeljiv s m .

Zadatak S-1.7. [40 bodova]

Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$yf(x) + f(y) \geq f(xy)$$

za sve realne brojeve x i y .

Rješenje.

Odgovor: Sva rješenja su oblika $f(x) = c(1-x)$ pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Označimo s $P(x, y)$ uvrštavanje vrijednosti x i y u početnu nejednakost. Neka je $c = \frac{f(-1)}{2}$.

$P(-1, x)$ daje $f(x) - f(-x) \geq -2cx$.

$P(-1, -x)$ nam daje $-2cx \geq f(x) - f(-x)$.

Spajanjem gornjih nejednakosti slijedi da mora biti $f(x) - f(-x) = -2cx$.

Iz $P(x, -y)$ slijedi $f(y) + 2cy - f(xy) - 2cxy \geq yf(x)$.

Iz početne nejednakosti imamo da je $yf(x) \geq f(xy) - f(y)$ pa spajanjem s gornjom nejednakosti slijedi da je $f(y) + cy \geq f(xy) + cxy$ za sve realne brojeve x i y .

Neka je $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija zadana s $g(x) = f(x) + cx$. Iz prethodnog imamo da je $g(y) \geq g(xy)$ za sve realne brojeve x i y .

Za $y \neq 0$, uvrštavanjem $x = -\frac{1}{y}$ i y u gornju nejednakost slijedi da je $g(y) \geq g(-1)$ za sve realne brojeve $y \neq 0$.

Nadalje, uvrštavanjem $-x$ i $y = -1$ dobivamo da je $g(x) \leq g(-1)$ za sve realne brojeve x .

Spajanjem s prethodnom nejednakosti slijedi da je $g(x) = g(-1) = c$, tj. $f(x) = c(1 - x)$ za sve realne brojeve $x \neq 0$.

Za $y \neq 0$ iz $P(0, y)$ sada slijedi da je $(y - 1)f(0) \geq c(y - 1)$ za sve realne brojeve $y \neq 0$ iz čega konačno slijedi da mora biti $f(0) = c$. Dakle, $f(x) = c(1 - x)$ za sve realne brojeve x pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ konstanta.

Direktnim uvrštavanjem u početnu nejednakost zaista vidimo da gornja funkcija zadovoljava početnu nejednakost.

Zadatak S-1.8. [45 bodova]

Arhipelag se sastoji od 2025 otoka, a jedini način prijevoza su brodske linije između nekih otoka (ako linija između dva otoka postoji, onda se može putovati u oba smjera).

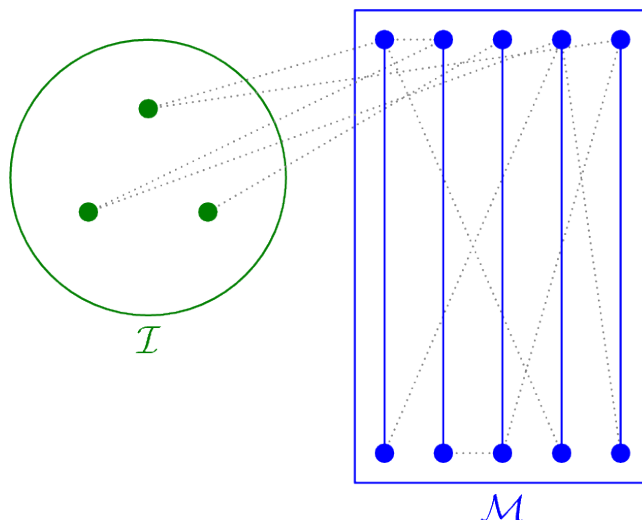
Mirko i Slavko pretvorili su zajednički obilazak arhipelaga u igru. Mirko bira polazni otok, a zatim naizmjenice biraju sljedeći otok na koji će otputovati (prvi bira Slavko). Ne smiju odabrati otok koji su već posjetili. Igru gubi onaj tko ne može izabrati iduće odredište. Odredi tko ima pobjedničku strategiju.

Rješenje.

Odgovor: Mirko ima pobjedničku strategiju.

Promotrimo neusmjereni graf $\mathcal{G}$ kojem su vrhovi otoci, a bridovi su brodske linije između otoka (dakle, dva vrha u grafu su povezana bridom ako i samo ako su otoci koje predstavljaju ta dva vrha povezani brodskom linijom).

Neka je $\mathcal{M}$ maksimalno sparivanje u grafu $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{M} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ je najveći skup vrhova grafa $\mathcal{G}$ takav da je v_i povezan s w_i za svaki $i = 1, 2, \dots, k$. Neka je $\mathcal{I}$ skup preostalih vrhova grafa $\mathcal{G}$ koji nisu u $\mathcal{M}$. Kako je ukupan broj otoka (tj. vrhova grafa $\mathcal{G}$) neparan, a broj vrhova u $\mathcal{M}$ paran, slijedi da je broj vrhova u $\mathcal{I}$ neparan. Posebno, u skupu $\mathcal{I}$ postoji barem jedan vrh. Nadalje, zbog maksimalnosti skupa $\mathcal{M}$ slijedi da nikoja dva vrha u skupu $\mathcal{I}$ nisu povezana.



Mirko će koristiti sljedeću strategiju kako bi osigurao pobjedu:

Na početku odabire bilo koji vrh v_0 iz skupa $\mathcal{I}$. Nakon toga, kada Slavko odabere neki vrh v iz skupa $\mathcal{M}$ Mirko bira vrh w u $\mathcal{M}$ koji je sparen s vrhom v .

Uočimo da Slavko u svom prvom potezu (ako ga uopće može napraviti) mora odabrati vrh iz $\mathcal{M}$ jer vrhovi u $\mathcal{I}$ nisu povezani.

Nadalje, tvrdimo da ako Mirko igra opisanom strategijom, Slavko nikada ne može odabrati vrh iz skupa $\mathcal{I}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da Slavko u nekom potezu odabire vrh v_{2k+1} iz skupa $\mathcal{I}$ te neka je to prvi potez u kojem Slavko bira vrh iz tog skupa. Kako su Mirko i Slavko uvijek birali povezane vrhove, slijedi da postoji put

$$v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_{2k+1}$$

takav da su $v_0, v_{2k+1} \in \mathcal{I}$. Budući da je to bio Slavkov prvi potez u kojem je odabrao vrh iz skupa $\mathcal{I}$, iz Mirkove strategije slijedi da su $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2k-1}v_{2k}$ odgovarajuća sparivanja vrhova u $\mathcal{M}$. Uočimo da gornje sparivanje možemo povećati tako da ga zamijenimo sa sparivanjem $v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2k}v_{2k+1}$. Time smo povećali skup $\mathcal{M}$ dodavanjem vrhova v_0 i v_{2k+1} što dovodi do kontradikcije s maksimalnošću skupa $\mathcal{M}$. Dakle, Slavko nikada ne može odabrati vrh iz skupa $\mathcal{I}$ na svom potezu.

Iz prethodnog slijedi da Mirkom svojom strategijom uvijek može odabrati sljedeći vrh na svom potezu. Kako opisana igra u zadatku završava nakon konačno mnogo poteza i Mirko svojom strategijom nikako ne može izgubiti slijedi da će Mirko ovom strategijom u konačnici osigurati pobjedu.