

MEDO 2025./2026.

Prvo kolo

8.11.2025.

Loomen

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak K-1.1. [10 bodova]

Izračunaj

$$99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 2 \cdot 11)]\}.$$

Rješenje.

Prisjetimo se pravilnog redoslijeda izvođenja računskih operacija:

1. najprije rješavamo zagrade, i to od **unutrašnjih prema vanjskima**
2. zatim provodimo množenje i dijeljenje, redom **sljeva nadesno**
3. na kraju zbrajamo i oduzimamo, također redom **sljeva nadesno**.

Primijenimo li to na izraz u zadatku, dobijemo:

$$\begin{aligned} 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 2 \cdot 11)]\} &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 22)]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot 11]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 44]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot 11\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 66\} \\ &= 99 - 8 \cdot 11 \\ &= 99 - 88 = 11. \end{aligned}$$

Zadatak K-1.2. [15 bodova]

Jakov je prvog dana u mjesecu dobio mjesečni džeparac. Na početku mjeseca, Jakov je kupio tri bilježnice na kvadratiće za ukupno 6 eura. Sredinom mjeseca Jakov je kupio novu loptu za polovinu preostalog iznosa koji mu je ostao od džeparca. Na kraju mjeseca kupio je četiri bilježnice na linije, koje koštaju (svaka pojedinačno) upola manje od bilježnica na kvadratiće. Za preostalih 18 eura džeparca Jakov je kupio ulaznice za kazališnu predstavu za svoju sestru i sebe.

Koliki džeparac je dobio Jakov?

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti „od kraja prema početku”. Naime, znamo da je tijekom mjeseca Jakov potrošio cijeli džeparac, tj. na kraju mu je ostalo 0 eura. To nam služi kao početna točka od koje se vraćamo unatrag da bismo odredili koliki džeparac je Jakov dobio na početku mjeseca.

Prije nego što je kupio karte za predstavu, Jakov je imao 18 eura.

Prije toga kupio je 4 bilježnice na linije. Odredimo koliko su one koštale. Svaka bilježnica na linije košta upola manje od jedne bilježnice na kvadratiće. Na početku saznamo da je Jakov tri bilježnice na

kvadratiće platio ukupno 6 eura. Iz toga zaključujemo da jedna bilježnica na kvadratiće košta $6 : 3 = 2$ eura. Tada vrijedi da jedna bilježnica na linije košta $2 : 2 = 1$ euro. Četiri takve bilježnice onda koštaju $4 \cdot 1 = 4$ eura. Dakle, Jakov je prije kupovine bilježnica na linije imao $18 + 4 = 22$ eura.

Jakov je dao pola iznosa koji mu je u tom trenutku ostao od džeparca da kupi loptu. Nakon toga mu je preostala druga polovina, dakle jednako koliko je i potrošio na loptu. Odredili smo da mu je ostalo 22 eura. Dakle, Jakov je loptu platio 22 eura, što znači da je prije kupovine lopte imao $22 \cdot 2 = 44$ eura.

Konačno, Jakov je na početku mjeseca kupio bilježnice na kvadratiće za 6 eura, što znači da je prije toga imao $44 + 6 = 50$ eura. Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 50 eura.

Zadatak K-1.3. [20 bodova]

Za tablicu koja se sastoji od tri retka i tri stupca kažemo da je *magični kvadrat* ako je u svako njeno polje upisan po jedan prirodan broj te vrijedi da su svi zbrojevi triju brojeva iz istog retka, stupca i glavne dijagonale međusobno jednaki. Dodatno, svi brojevi u poljima magičnog kvadrata moraju biti međusobno različiti. Glavne dijagonale tablice čine središnje polje i dva nasuprotna kutna polja.

Ivan i Lucija zapisali su na ploču svoje omiljene magične kvadrate. Zatim je Matej „zbrojio” Ivanov i Lucijin magični kvadrat, tj. zapisao je na ploču novi magični kvadrat u čijem je svakom polju zbroj brojeva koji su u odgovarajućim poljima u Ivanovom i Lucijinom magičnom kvadratu. No, kada je došla učiteljica, obrisala je neke od brojeva iz magičnih kvadrata. Na ploči je ostalo zapisano sljedeće:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">2</td><td style="width: 40px;"></td><td style="width: 40px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2			9						+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">20</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">12</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>				20	12					=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">17</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">26</td></tr> </table>					17	5			26
2																															
9																															
20	12																														
	17	5																													
		26																													
Ivanova tablica		Lucijina tablica		Matejeva tablica																											

Odredi koji brojevi su bili upisani u preostalim poljima.

Rješenje.

Prema pravilu „zbroja tablica”, odmah možemo ispuniti središnje polje prve tablice brojem $17 - 12 = 5$ i prvo polje u drugom retku zadnje tablice brojem $9 + 20 = 29$. Polja koja ispunjavamo u ovom koraku označena su zelenom bojom:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">2</td><td style="width: 40px;"></td><td style="width: 40px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">9</td><td style="background-color: #90EE90; text-align: center; padding: 5px;">5</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2			9	5					+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">20</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">12</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>				20	12					=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="background-color: #90EE90; text-align: center; padding: 5px;">29</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">17</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">26</td></tr> </table>				29	17	5			26
2																															
9	5																														
20	12																														
29	17	5																													
		26																													
Ivanova tablica		Lucijina tablica		Matejeva tablica																											

U zadnjoj (Matejevoj) tablici imamo ispunjen cijeli drugi redak pa možemo izračunati da je u njoj zbroj u svakom retku, stupcu i po dijagonali jednak $29 + 17 + 5 = 51$. To nam može pomoći da popunimo još neka polja zadnje tablice. Znamo da je

$$(\text{gornje lijevo polje}) + 17 + 26 = 51$$

pa u gornjem lijevom polju moramo imati broj 8. Slično, u drugom plavom polju (gornjem desnom) moramo imati $51 - (5 + 26) = 51 - 31 = 20$.

2		
9	5	

+

20	12	

=

8		20
29	17	5
		26

zbroy 51

Zadnju tablicu možemo u potpunosti popuniti na isti način, koristeći informaciju da je zbroj u svakom retku, stupcu i glavnoj dijagonali jednak 51. Za plava polja redom (odozgo prema dolje, slijeva nadesno) računamo:

$$\begin{aligned}
 51 - (8 + 20) &= 23 && \text{(prvi redak)} \\
 51 - (8 + 29) &= 14 && \text{(prvi stupac)} \\
 51 - (14 + 26) &= 11 && \text{(zadnji redak)}
 \end{aligned}$$

Još vidimo da znamo izračunati gornje lijevo (zeleno) polje druge tablice prema pravilu „zbroja tablica”. Kada broju 2 pribrojimo broj u tom polju dobivamo 8, pa u njemu mora biti 6.

2		
9	5	

+

6		
20	12	

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroy 51

Sada imamo potpuno popunjenu zadnju tablicu i po tri polja u prve dvije tablice. Za prve dvije tablice ne znamo koliki je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama. Promotrimo desna polja u drugom retku. Znamo da zbroj žuto označenih polja mora biti jednak 5 te da svi brojevi u tablicama moraju biti prirodni. To znači da imamo samo četiri mogućnosti za popunjavanje žutih polja:

$$5 = 1 + 4, \quad 5 = 2 + 3, \quad 5 = 3 + 2, \quad 5 = 4 + 1$$

2		
9	5	

+

6		
20	12	

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroy 51

Provjerimo sve četiri mogućnosti. Prvo pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 1, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 4. Na potpuno isti način na koji smo popunili treću tablicu sada možemo popuniti prvu i drugu. Naime, zbroj polja u drugom retku u prvoj je tablici jednak 15, a u drugoj 36. Koristeći te zbrojeve popunjavamo tablice po retcima i stupcima te dobivamo sljedeće rješenje:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

+

6	16	14
20	12	4
10	8	18

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 15
zbroj 36
zbroj 51

Provjerom možemo ustanoviti da su svi uvjeti u zadatku zadovoljeni (pravilo „zbroja tablica”, pravilo magičnog kvadrata, svi brojevi su prirodni i unutar svake tablice međusobno različiti) pa zaključujemo da je to zaista jedno rješenje.

Pretpostavimo sada da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 2, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 3. Odmah vidimo da ovaj slučaj zapravo nije dozvoljen budući da u prvoj tablici nisu svi brojevi međusobno različiti (pojavljuju se dvije dvojke).

2		
9	5	2

+

6		
20	12	3

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 51

Dalje pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 3, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 2. Ponovno koristimo zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama da izračunamo preostale brojeve u tablicama (zbroj u prvoj tablici jednak je 17, a u drugoj 34). Međutim, u drugoj tablici ne možemo dobiti zadovoljeno svojstvo magičnog kvadrata — ako koristimo jednak zbroj po retcima i stupcima, na dijagonali označenoj crvenom bojom dobivamo drugačiji zbroj, 36 umjesto 34. Dakle, niti ovaj slučaj ne daje nam rješenje.

2	11	4
9	5	3
6	1	10

+

6	12	16
20	12	2
8	10	16

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 17
zbroj 34
zbroj 51

Za kraj, promotrimo i slučaj kada je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 4, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 1. Na potpuno isti način vidimo da je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama u prvoj tablici jednak 18 i popunjavamo preostala polja. No, ponovno nailazimo na isti problem kao i u prethodnom slučaju.

2	10	6
9	5	4
7	3	8

+

6		
20	12	1

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 18
zbroj 51

Dobili smo samo jednu mogućnost koja zadovoljava sve postavljene uvjete. Dakle, prije učiteljičinog brisanja na ploči su bile sljedeće tablice:

2	7	6		6	16	14		8	23	20
9	5	1	+	20	12	4	=	29	17	5
4	3	8		10	8	18		14	11	26
Ivanova tablica				Lucijina tablica				Matejeva tablica		

Zadatak K-1.4. [25 bodova]

Tonka pomaže mami napraviti kolač. U receptu piše da je za kolač potrebno 4 dl mlijeka. Mlijeko se nalazi u posudi od 8 dl koja je do vrha ispunjena mlijekom. Tonka ima još dvije prazne posude na raspolaganju, jednu od 3 dl, a drugu od 5 dl. Tonka može prelijevati mlijeko iz posude u posudu.

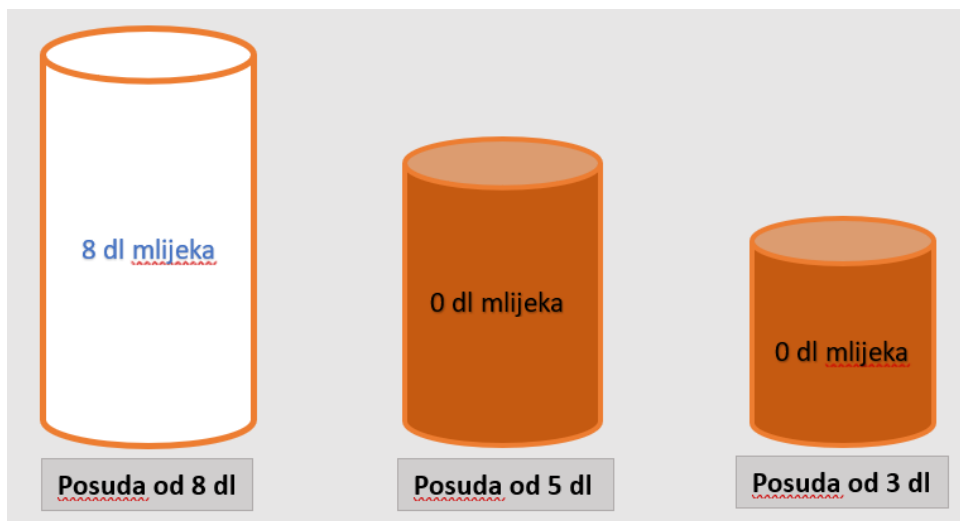
Može li Tonka postići da u nekoj od tri posude koje ima na raspolaganju bude točno 4 dl mlijeka?

Posude nemaju nikakve oznake na sebi. Tonka nema na raspolaganju nikakvo drugo pomagalo za određivanje količine mlijeka u posudi, niti može koristiti neku drugu posudu osim tri navedene, niti odliti mlijeko iz posude igdje drugdje.

Rješenje.

Ovdje ćemo opisati jedan slijed prelijevanja kojim dolazimo do tražene količine mlijeka, od mnogih mogućih.

Polazna situacija izgleda kao na slici:



Označimo tu situaciju s $(8, 0, 0)$. Prva brojka odgovara trenutnoj količini mlijeka u prvoj posudi (zapremine 8 dl), itd.

Tonka u prvom koraku može prelići mlijeko iz prve posude u drugu. Kako nema nikakav način da odredi koliku količinu prelijeva, mora napuniti drugu posudu do vrha da zna da je u njoj točno 5 dl mlijeka. U prvoj posudi tada ostaje $8 - 5 = 3$ dl, pa je stanje količine mlijeka nakon ovog prelijevanja opisano s $(3, 5, 0)$. Ovo prelijevanje možemo stoga zapisati na sljedeći način:

$$(8, 0, 0) \rightarrow (3, 5, 0).$$

Kao drugi korak Tonka može prelići 3 dl mlijeka iz druge posude u treću (da ispuni treću posudu do vrha). U drugoj posudi tada ostane $5 - 3 = 2$ dl mlijeka:

$$(3, \hat{5}, 0) \rightarrow (3, 2, 3).$$

Trenutno stanje:



Ako Tonka u sljedećem koraku prelije sadržaj treće posude u prvu posudu, doći ćemo do situacije opisane trojkom $(6, 2, 0)$.

Daljnji Tonkini koraci prelijevanja mogu biti:

$$(6, \hat{2}, 0) \rightarrow (\hat{6}, 0, 2) \rightarrow (1, \hat{5}, 2) \rightarrow (1, \boxed{4}, 3).$$

Primjećujemo da se u drugoj posudi sada nalazi točno 4 dl mlijeka, što smo željeli dobiti.

Zadatak K-1.5. [30 bodova]

Andreina soba ima oblik kvadra. Odlučila je obojiti sva četiri zida sobe. S jednom litrom boje može se obojiti 955 dm^2 zida. Duljina sobe je 42 dm, a širina 4 m. Vrata sobe su pravokutnog oblika, visine 21 dm, a širine 1 m. U sobi su dva jednaka pravokutna prozora visine 13 dm i širine 9 dm. Pod i strop sobe se ne bojaju, kao ni vrata i prozori.

Ako je Andrea za bojanje sobe potrošila točno 4 litre boje, kolika je visina njezine sobe?

Rješenje.

Zidovi Andreine sobe (uključujući vrata i prozore kao dio zida) imaju oblik pravokutnika. Površinu P pravokutnika sa stranicama duljine a i b računamo formulom $P = a \cdot b$.

Odredimo koliku površinu zida je obojila Andrea. Iskoristila je 4 litra boje, a svakom litrom oboja 955 dm^2 zida. Dakle, ukupno je obojila $4 \cdot 955 = 3820 \text{ dm}^2$ zida.

Ako ovoj površini pridodamo površine vrata i prozora, dobit ćemo ukupnu površinu 4 pravokutnika koje čine zidovi Andreine sobe. Kako su i vrata i prozori pravokutnog oblika, njihovu površinu također računamo kao umnožak njihove visine i širine. Vrata stoga imaju površinu (pazimo na mjerne jedinice, $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$) $21 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 210 \text{ dm}^2$. Svaki prozor ima površinu $13 \text{ dm} \cdot 9 \text{ dm} = 117 \text{ dm}^2$. Ukupna površina sva četiri zida Andreine sobe, zajedno s prozorima i vratima, iznosi:

$$3820 \text{ dm}^2 + 210 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 117 \text{ dm}^2 = 4264 \text{ dm}^2.$$

Označimo visinu Andreine sobe s v (u decimetrima). Tada površina jednog dužeg zida Andreine sobe iznosi $42 \cdot v$, a kraćeg zida $40 \cdot v$. Ukupna površina svih zidova mora biti jednaka dobivenoj vrijednosti 4264 dm^2 , pa možemo zapisati jednadžbu:

$$2 \cdot (42 \cdot v) + 2 \cdot (40 \cdot v) = 4264.$$

Pojednostavljujemo jednadžbu tako da zbrajamo koeficijente uz nepoznanicu v :

$$84 \cdot v + 80 \cdot v = 4264$$

$$164 \cdot v = 4264$$

Pitamo se dakle koji broj pomnožen s brojem 164 daje broj 4264. Odgovor se dobije dijeljenjem $4264 : 164 = 26$. Dakle, visina Andreine sobe iznosi 26 dm.

Zadatak K-1.6. [35 bodova]

Martin je prošle školske godine pisao ukupno šest testova iz matematike. Na svakom testu moguće je ostvariti bilo koji cijeli broj bodova između 0 i 100 (uključujući i te brojeve). Na prvih pet testova Martin je ostvario jednak broj bodova. Prosječan broj bodova koje je Martin ostvario na svih šest testova iznosi 72.

Koliko je bodova Martin mogao ostvariti na zadnjem testu?

Rješenje.

Prisjetimo se najprije da se prosjek nekih vrijednosti (primjerice ocjena ili bodova) računa tako da zbrojimo sve vrijednosti i podijelimo ih s njihovim brojem:

$$\text{prosijek} = \frac{\text{zbroj vrijednosti}}{\text{broj vrijednosti}}.$$

U ovom slučaju, mi znamo da je broj vrijednosti 6, a njihov prosjek iznosi 72. Stoga možemo dobiti zbroj svih vrijednosti, tj. ukupni broj bodova koji je Martin ostvario na svih 6 testova zajedno, tako da pomnožimo prosjek i broj vrijednosti: $6 \cdot 72 = 432$.

Označimo sada broj bodova koji je Martin ostvario na prvih pet testova s A , a broj bodova koji je ostvario na zadnjem testu s B . Tada mora vrijediti jednakost:

$$5 \cdot A + B = 432.$$

Brojevi A i B su cijeli brojevi veći ili jednaki 0 i manji ili jednaki 100. Jednadžba u kojoj imamo više nepoznanica, koje su sve cijeli brojevi, naziva se *diofantska jednadžba*.

Jedno od najkorisnijih svojstava cijelih brojeva koje možemo koristiti u rješavanju diofantskih jednadžbi je **djeljivost** cijelih brojeva.

Promotrimo ponijed našu jednadžbu. Prvi pribrojnik s lijeve strane $5A$ je očito višekratnik broja 5. Broj s desne strane jednakosti 432 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5. Zato možemo zaključiti da drugi pribrojnik s lijeve strane B mora davati ostatak 2 pri dijeljenju s 5, da bi se ti ostatci poklapali s lijeve i desne strane (jer su to zapravo isti brojevi).

Dakle, broj B mora imati ostatak 2 pri dijeljenju s 5. Stoga su mogući kandidati za broj B sljedeći:

$$2, 7, 12, 17, 22, \dots, 87, 92, 97.$$

Ostaje još provjeriti da li za svaku ovu moguću vrijednost broja B postoji i odgovarajuća valjana vrijednost za broj A . Za najmanju vrijednost $B = 2$, dobijemo da mora biti $5A + 2 = 432$, odnosno $5A = 430$, pa je $A = 430 : 5 = 86$, što je valjana vrijednost. Za najveću vrijednost $B = 97$ dobijemo $5A + 97 = 432$, tj. $5A = 335$, pa je $A = 67$, što je također valjana vrijednost. Za sve vrijednosti između

ova dva ekstrema ćemo također dobiti valjanu vrijednost od A (znamo da je broj $432 - B$ djeljiv s 5, po našem izboru brojeva B , te će vrijednost od A biti između 67 i 86, što su sve moguće vrijednosti).

Dakle, na drugom testu je Jakov mogao dobiti bilo koji od sljedećih brojeva bodova: 2, 7, 12, 17, 22, ..., 87, 92, 97.

Zadatak K-1.7. [40 bodova]

Peteroznamenasti broj zovemo *pikantnim* ako za njega vrijede sljedeća tri svojstva:

- smije sadržavati samo znamenke 0, 1, 3, 5, 7 i 9
- sve znamenke su mu međusobno različite
- nije višekratnik broja 30.

Koliko ima pikantnih brojeva?

Rješenje.

Kada trebamo prebrojiti složene objekte s nekim svojstvima, korisno je zauzeti „konstruktivan” pristup: najprije uočimo od kojih se sastavnih dijelova sastoji svaki traženi objekt i pokušamo ga sastaviti dio po dio od tih dijelova, pazeći pritom da su tražena svojstva ispunjena. U svakom koraku „sastavljanja” brojimo koliko različitih mogućnosti imamo za pojedini sastavni dio i na kraju izbrojimo koliko ima mogućih kombinacija tih sastavnih dijelova.

U ovom zadatku, objekti koje želimo prebrojiti su peteroznamenasti brojevi s određenim svojstvima. Sastavni dijelovi peteroznamenastih brojeva su pet znamenki od kojih se oni sastoje (naravno, važno je u kojem poretku su posložene te znamenke). Dakle, svaki pikantni broj možemo konstruirati znamenku po znamenku, pazeći pritom da poštujemo svojstva koja oni moraju imati.

Krenimo najprije od jednostavnijeg problema – prebrojimo najprije koliko peteroznamenastih brojeva zadovoljava samo prvo svojstvo pikantnih brojeva. Pitamo se dakle koliko postoji peteroznamenastih brojeva koji su sastavljeni samo od znamenki 0, 1, 3, 5, 7 i 9 (za sada se mogu ponavljati unutar broja). Konstruiramo naš broj znamenku po znamenku i u svakom koraku bilježimo koliko imamo različitih mogućnosti.

- Prva znamenka našeg broja može biti bilo koja od 1, 3, 5, 7 ili 9. Naime, znamo da prva znamenka peteroznamenastog broja ne smije biti 0. Dakle, imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku našeg broja.
- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9. Nula može biti na drugom mjestu, a brojevi se smiju ponavljati pa smijemo uzeti i broj koji smo izabrali za prvo mjesto. Stoga za drugu znamenku imamo 6 mogućnosti.
- Treća znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Četvrta znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Peta znamenka se također može odabrati na 6 načina.

Sada znamo koliko imamo mogućnosti za svaku pojedinu znamenku. Dalje bismo htjeli odrediti na koliko načina se od ovih znamenki može sastaviti konačni broj. Da bismo izračunali tu vrijednost, koristimo princip poznat pod nazivom *princip uzastopnog prebrojavanja*. Naime, prebrojili smo broj mogućnosti za svaku pojedinu znamenku, a sada ih trebamo sastaviti uzastopno, jednu za drugom, i odrediti koliko je ukupni broj objekata koje dobijemo nakon svih takvih sastavljanja.

Princip uzastopnog prebrojavanja je vrlo jednostavan. On kaže da ako sastavni dijelovi ne ovise jedan o drugom (jedan ne uvjetuje ili ikako utječe na drugi), tada je broj mogućnosti za njihovo sastavljanje jednak **umnošku** broja mogućnosti za svaki pojedini sastavni dio. U našem slučaju, doista vrijedi da znamenke ne ovise jedna o drugoj. Stoga je ukupni traženi broj peteroznamenastih brojeva koji se

sastoje samo od znamenaka 0, 1, 3, 5, 7 ili 9 jednak umnošku

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{peta znamenka}}.$$

Uključimo sada i drugi uvjet u igru – znamenke u konstruiranom peteroznamenkastom broju ne smiju biti jednake. Sada se problem čini kompliciraniji, jer izbori znamenki počinju utjecati jedni na druge: čim iskoristimo jednu znamenku, ne smije se više pojavljivati nigdje drugdje u konačnom broju. Međutim, to možemo uzeti u obzir kada brojimo mogućnosti za pojedine znamenke i osigurati da izbori znamenki i dalje ostanu neovisni jedni o drugima.

Razmišljamo ovako. Na mjesto prve znamenke peteroznamenkastog broja ponovno možemo odabrati bilo koju od znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9, dakle ponovno imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku. Koju god znamenku da odaberemo, ne smijemo više koristiti tu istu znamenku na drugim mjestima. Stoga u svakom sljedećem koraku imamo jednu mogućnost manje nego u prethodnom koraku.

- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9, osim one koja je na prvom mjestu. Stoga za drugu znamenku imamo $6 - 1 = 5$ mogućnosti.
- Treća znamenka ne smije biti jednaka prvoj niti drugoj. Stoga imamo $6 - 2 = 4$ mogućnosti.
- Četvrta znamenka se može odabrati na $6 - 3 = 3$ načina.
- Peta znamenka se može odabrati na $6 - 4 = 2$ načina.

Koristeći princip uzastopnog prebrojavanja, dobijemo da je ukupan broj mogućnosti u ovom slučaju jednak:

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{5}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{4}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{3}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{2}{\text{peta znamenka}} = 600.$$

Konačno stižemo i do trećeg uvjeta, koji je i najkompliciraniji što se tiče prebrojavanja mogućnosti. Sada naime od svih 600 brojeva koje smo konstruirali u prethodnom prebrojavanju moramo pronaći koliko ih je koji nisu djeljivi s 30. Najprije primijetimo da možemo pokušati pronaći broj brojeva koji jesu djeljivi s 30 (to se čini prirodnije) i onda oduzeti taj broj od ukupnog broja svih brojeva (600). To pravilo prebrojavanja se zove *pravilo komplementa*.

Dakle, želimo brojati samo one brojeve koji su djeljivi s 30. Podsjetimo se stoga pravila o djeljivosti. Kada je broj djeljiv brojem 30? Onda (i samo onda) kada je djeljiv brojevima 3 i 10. Kada je broj djeljiv s 10? Onda (i samo onda) kada mu je zadnja znamenka 0. Što je s djeljivošću s brojem 3? Prisjetimo se da je broj djeljiv s brojem 3 ako (i samo ako) mu je zbroj svih znamenki djeljiv s 3.

Dakle, prilikom konstrukcije svih brojeva koje sada želimo prebrojiti moramo osigurati da im je zadnja znamenka jednaka 0 te da im je zbroj znamenki djeljiv s 3. Najprije odredimo koje kombinacije od 4 različite znamenke između preostalih dozvoljenih znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9 u zbroju daju broj djeljiv s 3. To su samo sljedeće 2 kombinacije:

$$1, 3, 5, 9; 3, 5, 7, 9.$$

U svakom od ova dva podslučaja još samo trebamo rasporediti ove znamenke na prva 4 mjesta (na petom mjestu znamo da mora biti znamenka 0). Ponovno koristeći princip uzastopnog umnoška dobijemo da to možemo učiniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Dakle, ukupno ćemo imati $2 \cdot 24 = 48$ brojeva djeljivih s 30 među ranije izbrojanih 600 koji zadovoljavaju prva dva svojstva pikantnih brojeva. Konačno zaključujemo, po pravilu komplementa, da pikantnih brojeva ima $600 - 48 = 552$.

Zadatak K-1.8. [45 bodova]

Neka je K prirodan broj. Ana i Bojan naprave hrpu od K kamenčića i zatim igraju igru. Naizmjenice, jedno za drugim uzimaju s hrpe ili jedan kamenčića ili četiri kamenčića, sve dok na hrpi ima još kamenčića. Pobjednik je onaj tko zadnji uzme kamenčić ili kamenčiće s hrpe.

Ako Ana igra prva, za koliko brojeva K manjih od 1000 Bojan ima strategiju koja mu osigurava pobjedu?

Rješenje.

Promotrimo prvo tko ima pobjedničku strategiju u slučaju da je K jedan od malih brojeva 1, 2, 3, 4, 5.

$K = 1$: Ana uzima jedan kamenčić i pobjeđuje.

$K = 2$: Ana može uzeti samo jedan kamenčić jer nema dovoljno kamenčića da uzme 4. Bojan uzima preostali kamenčić i pobjeđuje.

$K = 3$: Ana opet može uzeti samo 1 kamenčić, ali isto vrijedi i za Bojana. Ostaje jedan kamenčić koji uzima Ana.

$K = 4$: Ana uzima 4 kamenčića i pobjeđuje.

$K = 5$: Ako Ana uzme 1 kamenčić, Bojan će uzeti 4, a ako Ana uzme 4, Bojan će uzeti preostali kamenčić.

Dakle, Ana pobjeđuje za $K = 1, 3, 4$, a Bojan za $K = 2, 5$.

U nastavku ćemo pokazati da tko ima pobjedničku strategiju ovisi o tome koji je ostatak broja K pri dijeljenju s 5.

$K = 5N$: Ako je K djeljiv s 5, neovisno koliko kamenčića uzme Ana, Bojan uvijek može napraviti potez tako da nakon njega ostane broj kamenčića koji je ponovno djeljiv s 5 (ako Ana uzme 1, Bojan uzme 4 i obratno). Bojan nastavlja ovu strategiju u svakom sljedećem potezu i pobjeđuje.

$K = 5N + 1$: U ovom slučaju Ana može uzeti 1 kamenčić, tako da nakon njenog poteza broj kamenčića na hrpi bude djeljiv s 5. Sada je broj kamenčića djeljiv s 5, ali uloge su zamijenjene. Bojan igra sljedeći i neovisno što on napravi, Ana može koristiti Bojanovu strategiju kao igrača koji igra drugi iz prethodnog slučaja ($K = 5N$). Stoga, neovisno kako Bojan igra, Ana pobjeđuje.

$K = 5N + 2$: Slično kao u slučaju kada je $K = 5N$, neovisno što Ana napravi, Bojan može napraviti potez tako da se djeljivost broja kamenčića s 5 ne promijeni nakon njegovog poteza. To može raditi sve dok ne ostanu samo 2 kamenčića na Aninom potezu. Na početku smo vidjeli da u tom slučaju Bojan pobjeđuje.

$K = 5N + 3$: Sada Ana može uzeti 1 kamenčić, nakon čega ostaje $5N + 2$ kamenčića. Koristeći istu strategiju kao Bojan u prethodnom slučaju, ovaj put Ana pobjeđuje.

$K = 5N + 4$: Analogno slučaju $K = 5N + 1$, samo što Ana u prvom potezu uzme 4 kamenčića.

Dakle, Bojan ima pobjedničku strategiju ako je K djeljiv s 5 ili daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5. U ostalim slučajevima pobjeđuje Ana.

Ostalo je prebrojati koliko ima takvih brojeva od 1 do 999. Kako je $999 = 199 \cdot 5 + 4$, brojevi djeljivi s 5 u traženom rasponu su $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, \dots, 199 \cdot 5$. Njih ima 199. Brojevi koji daju ostatak 2 pri dijeljenju s 5 u ovom rasponu su $0 \cdot 5 + 2, 1 \cdot 5 + 2, \dots, 199 \cdot 5 + 2$. Dakle 200 brojeva. Stoga je ukupan broj brojeva K manjih od 1000 za koje Bojan ima pobjedničku strategiju $199 + 200 = 399$.