

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

4. razred - rješenja

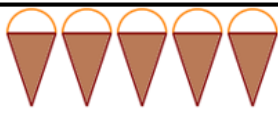
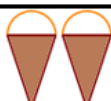
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

- | | |
|--------------------------------|--------|
| a) 30 djece | 2 BODA |
| b) 9 djece | 2 BODA |
| c) $18 - 12 = 6$ djece | 3 BODA |
| d) $15 \cdot 6 + 3 = 93$ djece | 3 BODA |

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

vanilija		30
čokolada		18
jagoda		24
banana		9
malina		12

ili

vanilija	30
čokolada	18
jagoda	24
banana	9
malina	12

- | | |
|---|--------|
| a) Iz tablice je vidljivo da sladoled od vanilije najviše voli 30 djece. | 3 BODA |
| b) Iz tablice je vidljivo da sladoled od banane najviše voli 9 djece. | 1 BOD |
| c) Iz tablice je vidljivo da sladoled od čokolade najviše voli 18 djece, a sladoled od malina 12 djece, pa je tražena razlika $18 - 12 = 6$. | 1 BOD |
| d) $30 + 18 + 24 + 9 + 12 = 93$ | 2 BODA |
| | 3 BODA |

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Ako prva ura svakih 45 minuta zakasni jednu minutu, znači da za 90 minuta zakasni dvije minute, a za 180 minuta zakasni 4 minute. Kako je 180 minuta = 3 sata, znači da za 3 sata zakasni 4 minute.

2 BODA

U 12 sati će kasniti 4 minute, u 15 sati će kasniti 8 minuta, u 18 sati kasnit će 12 minuta, u 21 sat će kasniti 16 minuta, u ponoć će kasniti 20 minuta.

2 BODA

Prvu uru mora namjestiti na 9:20.

2 BODA

Ako druga svakih 30 minuta požuri jednu minutu, znači da za jedan sat požuri 2 minute.

1 BOD

Od 9 sati do ponoći je 15 sati pa će ukupno požuriti 30 minuta.

1 BOD

Drugu uru treba namjestiti na 8:30.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

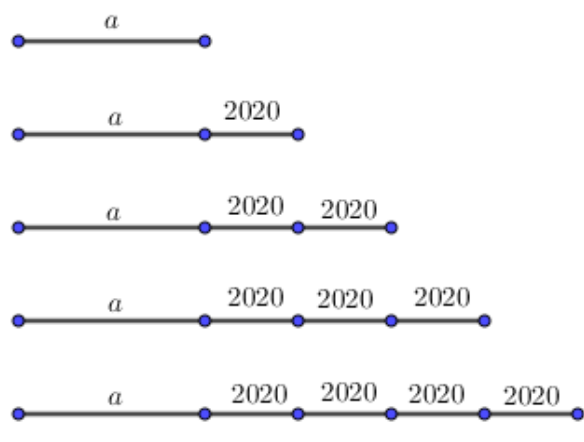
Između 9 sati ujutro i ponoći ima 15 sati, odnosno $15 \cdot 60 = 900$ minuta. 2 BODA
 Za to vrijeme prva će ura kasniti $900 : 45 = 20$ minuta, 2 BODA
 pa ju Marija treba namjestiti na 9:20. 2 BODA
 Za isto vrijeme, druga će ura požuriti $900 : 30 = 30$ minuta, 2 BODA
 pa ju Marija treba namjestiti na 8:30. 2 BODA
 UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Ako zbroj brojeva podijelimo s 5 dobit ćemo srednji od traženih brojeva. 2 BODA
 $20\ 295 : 5 = 4\ 059$
 Oduzimanjem i dodavanjem zadane razlike 2 020 dobiju se drugi i četvrti broj u nizu traženih brojeva (naznačena radnja) 1 BOD
 $4\ 059 - 2\ 020 = 2\ 039$, 1 BOD
 $4\ 059 + 2\ 020 = 6\ 079$. 1 BOD
 Daljnjim oduzimanjem i dodavanjem zadane razlike 2 020 dobiju se prvi i peti broj u nizu traženih brojeva. (naznačena radnja) 1 BOD
 $2\ 039 - 2\ 020 = 19$, 1 BOD
 $6\ 079 + 2\ 020 = 8\ 099$. 1 BOD
 Prvi broj je 19. 1 BOD
 Ostali brojevi su 2 039, 4 059, 6 079, 8 099. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Odnos među brojevima može se prikazati grafički.

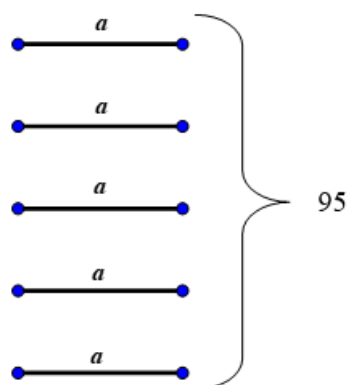


Najmanji broj označen je s a .
 (može i bez oznake)

Zbroj svih brojeva je 20 295.

3 BODA

Broj 2 020 se javlja 10 puta kao pribrojnik. 1 BOD
 $2\ 020 \cdot 10 = 20\ 200$
 Da bismo izračunali vrijednost broja a , potrebno je od 20 295 oduzeti 20 200.
 (naznačeno oduzimanje) 1 BOD
 $20\ 295 - 20\ 200 = 95$ 1 BOD
 Broj a se kao pribrojnik javlja pet puta, što se može grafički prikazati na sljedeći način:



Želimo li dobiti vrijednost jednog broja, moramo 95 podijeliti s 5.
(naznačeno dijeljenje)

$$95 : 5 = 19$$

1 BOD

Najmanji traženi broj je 19.

1 BOD

Ostali traženi brojevi su 2 039, 4 059, 6 079, 8 099.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Prikažimo grafički prvi broj s .

Sada su traženi brojevi oblika:

		2020	2020	2020	2020
	2020	2020	2020	2020	2020
1. broj	2. broj	3. broj	4. broj	5. broj	

3 BODA

odnosno:

	2020	4040	6060	8080
1. broj	2. broj	3. broj	4. broj	5. broj

1 BOD

Kako je zbroj tih pet brojeva 20 295, onda je

$20\,295 - 2020 - 4040 - 6060 - 8080 = 95.$				

2 BODA

To znači da je jednako $95 : 5 = 19$.

1 BOD

Prvi broj je 19.

1 BOD

Ostali traženi brojevi su 2 039, 4 059, 6 079, 8 099.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Označimo prvi broj s x .

Uzastopnim pribrajanjem broja 2020 dobiju se izrazi koji opisuju preostala četiri broja.

Drugi broj jednak je $x + 2\,020$.

1 BOD

Treći broj jednak je $x + 4\,040$.

1 BOD

Četvrti broj jednak je $x + 6\,060$.

1 BOD

Peti broj jednak je $x + 8\,080$.

1 BOD

Zbrajanjem svih brojeva dobije se $5x + 20\,200 = 20\,295$.

1 BOD

Na temelju svojstava računskih radnji $5x = 20\,295 - 20\,200$.

1 BOD

Vrijednost broja $x = 95 : 5$.

1 BOD

Najmanji traženi broj je $x = 19$.

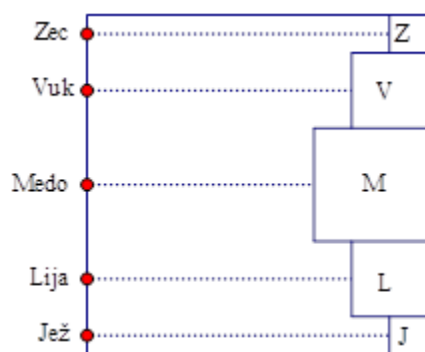
1 BOD

Preostali brojevi su redom 2 039, 4 059, 6 079, 8 099.

2 BODA

.....UKUPNO 10 BODOVA

4. Označimo na slici kretanje životinja do njihovih kućica.



1 BOD

Kako je širina šume jednaka zbroju duljine puta do kućice i širine kućice svake životinje, onda su Zekina i Ježeva kućica široke $550 - 475 = 75$ m,

1 BOD

a Vukova i Lijina kućica široke su $550 - 450 = 100$ m.

1 BOD

Sada je širina Medine kućice $550 - (75 + 75 + 100 + 100) = 200$ m.

1 BOD

Medo do svoje kućice treba prijeći $550 - 200 = 350$ m.

1 BOD

Kako Medo prijeđe 1 metar za 1 sekundu, do kućice će trebati 350 sekundi.

1 BOD

Vuku i Liji treba dvostruko manje vremena od Mede, $350 : 2 = 175$ sekundi.

1 BOD

Liji će do kućice trebati 175 sekundi = 2 minute i 55 sekundi.

1 BOD

Zec i Jež trebaju dvostruko više vremena od Mede, $350 \cdot 2 = 700$ sekundi.

1 BOD

Ježu će do kućice trebati 700 sekundi = 11 minuta i 40 sekundi.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena:

Učenik može rezultat zapisati samo u sekundama ili u minutama i sekundama. U svakom slučaju, točan rezultat nosi 1 BOD.

5. Prvi način:

Znamo da Luka nema plavi ručnik. Kako Luka nema natikače br. 44 onda nema ni zeleni ručnik, jer osoba koja nosi natikače br. 44 ima zeleni ručnik.

Dakle, Luka ima crveni ručnik.

2 BODA

Osoba s crvenim ručnikom nema natikače br. 43, dakle Luka nema natikače br. 43, a kako nema ni natikače br. 44, onda zaključujemo da Luka ima natikače br. 45.

2 BODA

Kako Roč nema natikače br. 43, a nema ni br. 45 jer ih ima Luka, onda Roč ima natikače br. 44.

2 BODA

Kako osoba s natikačama br. 44 ima zeleni ručnik, Ročev ručnik je zelene boje.

1 BOD

Konačno, Marko ima natikače br. 43 i plavi ručnik.

2 BODA

To znači da su danas Roč i Marko izgubili stvari na bazenu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je Z oznaka za zeleni ručnik, P za plavi ručnik i C za crveni ručnik.

Neka je 43 oznaka natikača br. 43, 44 oznaka natikača br. 44 i 45 oznaka natikača br. 45.

Popunit ćemo tablicu znakovima „+“ i „-“ na sljedeći način: ako osoba nešto posjeduje popunit ćemo odgovarajuće mjesto u tablici znakom „+“, a ako ne posjeduje znakom „-“.

Ovaj integram prati zaključivanje kao u 1. načinu rješavanja.

	43	44	45	Z	P	C
Roč						-
Luka		-		-	-	+
Marko						-
Z						
P						
C						

2 BODA

	43	44	45	Z	P	C
Roč			-			-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko			-			-
Z			-			
P			-			
C	-	-	+			

2 BODA

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-			-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko	+	-	-			-
Z			-			
P			-			
C	-	-	+			

2 BODA

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-	+	-	-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko	+	-	-	-		-
Z	-	+	-			
P		-	-			
C	-	-	+			

1 BOD

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-	+	-	-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko	+	-	-	-	+	-
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

2 BODA

Kako su danas izgubljeni zeleni ručnik i natikače broj 43, znači da su danas Roč i Marko izgubili stvari na bazenu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je Z oznaka za zeleni ručnik, P za plavi ručnik i C za crveni ručnik.

Neka je 43 oznaka natikača br. 43, 44 oznaka natikača br. 44 i 45 oznaka natikača br. 45.

Popunit ćemo tablicu znakovima „+“ i „-“ na sljedeći način: ako osoba nešto posjeduje popunit ćemo odgovarajuće mjesto u tablici znakom „+“, a ako ne posjeduje znakom „-“.

Ovaj integram se popunjava prema uvjetima koji su zadani.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-					
Luka		-			-	
Marko						
Z	-	+	-			
P		-				
C	-	-				

2 BODA

Iz tablice se sad može očitati da plavi ručnik ima osoba koja nosi natikače br. 43 i da crveni ručnik ima osoba koja nosi natikače br. 45.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-					
Luka		-			-	
Marko						
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

2 BODA

Plavi ručnik ima osoba koja nosi natikače br. 43, a Roč ne nosi natikače br. 43, znači da Roč nema plavi ručnik. Znači da plavi ručnik ima Marko. Zeleni ručnik ima osoba koja nosi natikače br. 44. Marko ima plavi, a ne zeleni ručnik, pa prema tome Marko ne nosi natikače br. 44.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-				-	
Luka		-			-	
Marko		-		-	+	-
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

2 BODA

Roč nosi natikače br. 44 i ima zeleni ručnik.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-	+	-	-
Luka		-		-	-	
Marko		-		-	+	-
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

1 BOD

Sada se još može očitati: Luka ima crveni ručnik i nosi natikače br. 45, Marko nosi natikače br. 43.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-	+	-	-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko	+	-	-	-	+	-
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

2 BODA

Kako su danas izgubljeni zeleni ručnik i natikače broj 43, znači da su danas Roč i Marko izgubili stvari na bazenu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Najprije sparimo ručnike i natikače istog vlasnika.

Poznato je da onaj koji ima natikače broj 44 ima zeleni ručnik.

Također je poznato da onaj koji ima natikače broj 43 nema crveni ručnik.

Prema tome, vlasnik natikača broj 43 nema ni zeleni ni crveni ručnik, nego plavi.

2 BODA

Zaključujemo da onda vlasnik natikača broj 45 ima crveni ručnik.

2 BODA

Sada se vidi da Luka, koji nema ni plavi ručnik, ni natikače broj 44, mora imati crveni ručnik i natikače broj 45.

2 BODA

Roč nema natikače broj 43, pa slijedi da on ima natikače broj 44 i zeleni ručnik,

2 BODA

a Marko (preostale) natikače broj 43 i plavi ručnik.

1 BOD

Kako su danas izgubljeni zeleni ručnik i natikače broj 43, znači da su danas Roč i Marko izgubili stvari na bazenu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bez postupka/objašnjenja bodovati s 1 BODOM.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iz rastava na proste faktore $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, vidi se da će umnožak znamenaka nekog četveroznamenkastog broja biti 8 ako su znamenke tog broja 2, 2, 2, 1; 4, 2, 1, 1 ili 8, 1, 1, 1 (u bilo kojem poretku).

Zbroj iznosi 8 samo ako su znamenke 4, 2, 1, 1.

2 BODA

Kombiniranjem redoslijeda znamenaka mogu se dobiti sljedeći brojevi:

1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421, 2114, 2141, 2411, 4112, 4121, 4211.

4 BODA

(**Napomena:** Ako učenik nema svih 12 brojeva, svake 3 napisane kombinacije bodovati s 1 BODOM.)

Traženih brojeva ima 12.

1 BOD

Najveći je 4211, a najmanji 1124.

2 BODA

Njihova razlika je 3087.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako su količnici A i B prirodni brojevi, onda je $\overline{2a4b}$ djeljiv s 15, a $\overline{3c8d}$ djeljiv s 18. 1 BOD

Kako je $15 = 5 \cdot 3$, broj $\overline{2a4b}$ mora biti djeljiv i s 5 i s 3.

1 BOD

Zbog djeljivosti s 5 znamenka b može biti 0 ili 5.

Za $b = 0$, zbog djeljivosti s 3, znamenka a može biti 0, 3, 6, 9.

Dakle, broj može biti **2040**, 2340, 2640, 2940.

1 BOD

Za $b = 5$, zbog djeljivosti s 3, znamenka a može biti 1, 4, 7.

Broj može biti 2145, 2445, 2745.

1 BOD

(**Napomena:** Učenik ne mora ispisivati sve brojeve. Ako iz napisanih vrijednosti znamenaka zaključi da je najmanji broj 2040, takvo rješenje bodovati s maksimalna 3 BODA.)

Kako je $18 = 2 \cdot 9$, broj $\overline{3c8d}$ mora biti djeljiv i s 2 i s 9.

1 BOD

Zbog djeljivosti s 2 znamenka d može biti 0, 2, 4, 6, 8,

a onda je, zbog djeljivosti s 9, znamenka c (redom) 7, 5, 3, 1, 8.

Broj može biti 3780, 3582, 3384, 3186, **3888**.

2 BODA

(**Napomena:** Ni ovdje učenik ne mora ispisivati sve brojeve. Ako iz napisanih vrijednosti znamenaka zaključi da je najveći broj 3888, takvo rješenje bodovati s (nova) maksimalna 3 BODA.)

Najmanji mogući broj A dobit ćemo ukoliko najmanji broj oblika $\overline{2a4b}$ djeljiv s 15 podijelimo s 15, a najveći mogući broj B ukoliko najveći broj oblika $\overline{3c8d}$ djeljiv s 18 podijelimo s 18.

$A = 2040 : 15 = 136$

1 BOD

$B = 3888 : 18 = 216$

1 BOD

Traženi zbroj iznosi $A + B = 136 + 216 = 352$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Zadatak možemo riješiti pomoću Vennovog dijagrama.

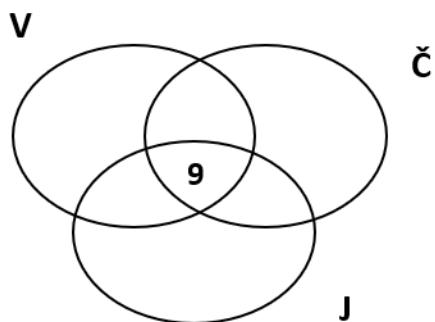
Kako 5 učenika uopće ne voli sladoled,

broj učenika koje trebamo rasporediti u skupove je $97 - 5 = 92$ učenika.

1 BOD

Podatak da 9 učenika voli sva tri okusa smjestimo u presjek sva tri skupa.

1 BOD



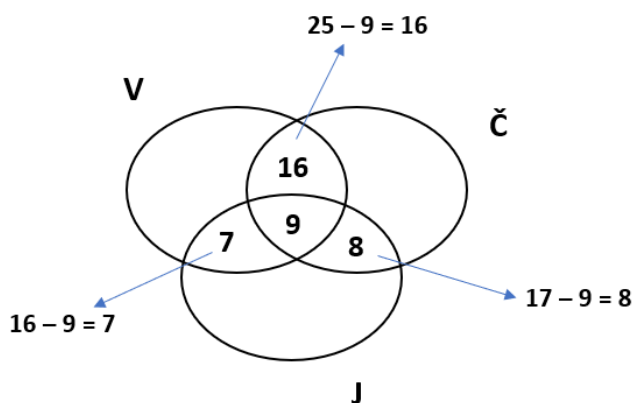
Nakon toga rasporedimo one koji su se odlučili za dva omiljena okusa sladoleda.

Znamo da 25 učenika voli sladoled od čokolade i vanilije. Od tih 25 učenika, njih 9 voli sva tri okusa, pa zaključujemo da preostalih $25 - 9 = 16$ voli sladoled od čokolade i vanilije. 1 BOD

Kako 16 učenika voli sladoled od vanilije i jagode, a 9 ih voli sva tri okusa, zaključujemo da preostalih $16 - 9 = 7$ voli sladoled od vanilije i jagode. 1 BOD

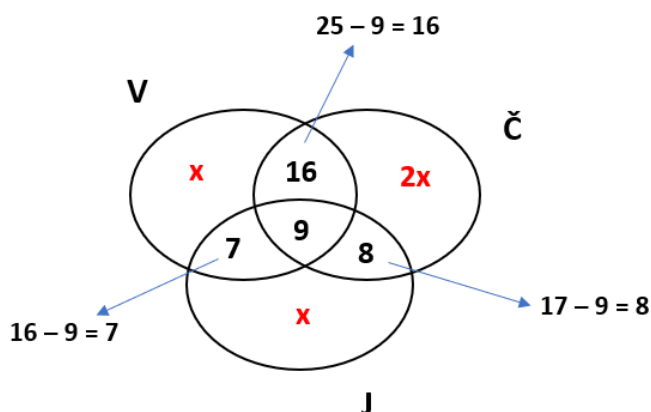
Budući da 17 učenika voli sladoled od čokolade i jagode, a kako ih 9 voli sva tri okusa, zaključujemo da preostalih $17 - 9 = 8$ voli sladoled od čokolade i jagode. 1 BOD

Dobivene brojeve upišemo u Vennov dijagram.



Broj učenika koji voli samo sladoled od vanilije označimo s x .

Prema uvjetima zadatka tada je i broj učenika koji vole samo sladoled od jagode jednak boju x , a broj učenika koji vole samo sladoled od čokolade je $2x$. 1 BOD



Iz grafičkog prikaza vidimo da vrijedi:

$$x + x + 2x + 7 + 9 + 8 + 16 = 92$$

2 BODA

$$4x + 40 = 92$$

$$4x = 52$$

$$x = 13$$

Broj učenika koji vole samo sladoled od vanilije je 13.

2 BODA

(**Napomena:** Ukoliko učenik umjesto jednadžbe koristi grafički prikaz za određivanje nepoznate veličine, bodovati u skladu s predloženim rješenjem.)

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Zadatak rješavamo unazad, odnosno promatramo iznos kuna nakon što je Ana dala kune Ivanu i Maji. U tom trenutku Ivan ima dva puta više novca od Ane, a Maja tri puta više od Ane.

Ako iznos Aninog novca označimo s x , tada oni imaju:

Ana x kn

Ivan ... $2x$ kn

Maja ... $3x$ kn

1 BOD

Zajedno je to $6x$ kuna.

1 BOD

Iz $6x = 432$,

1 BOD

izračuna se

$x = 432 : 6 = 72$ kune.

1 BOD

U tom trenutku, Ana ima 72 kune, Ivan 144 kuna, a Maja 216 kuna.

3 BODA

Budući da je Ana dala Ivanu 18, a Maji 43 kn, na početku je imala

$72 + 18 + 43 = 133$ kune.

1 BOD

Ivan je imao $144 - 18 = 126$ kuna.

1 BOD

Maja je imala $216 - 43 = 173$ kune.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je A iznos Aninog novca, I Ivanovog, a M Majinog novca.

Kad bi Ana dala Ivanu 18 kn, a Maji 43 kn, imala bi $(A - 61)$ kn.

Ivan bi imao $(I + 18)$ kn, i vrijedilo bi:

$I + 18 = 2 \cdot (A - 61)$, odnosno

1 BOD

$I + 18 = 2 \cdot A - 122$,

$I = 2 \cdot A - 122 - 18$

$I = 2 \cdot A - 140$.

1 BOD

Nakon što dobije novac od Ane, Maja bi imala $(M + 43)$ kune, te vrijedi:

$M + 43 = 3 \cdot (A - 61)$, odnosno

1 BOD

$M + 43 = 3 \cdot A - 3 \cdot 61$

$M + 43 = 3 \cdot A - 183$

$M = 3 \cdot A - 183 - 43$

$M = 3 \cdot A - 226$.

1 BOD

Svi zajedno imaju 432 kune, tj. $A + I + M = 432$.

$A + (2 \cdot A - 140) + (3 \cdot A - 226) = 432$

1 BOD

$6 \cdot A - 140 - 226 = 432$

$6 \cdot A = 432 + 140 + 226$

$6 \cdot A = 798$

$A = 798 : 6$

$A = 133$

3 BODA

Tada je:

$I = 2 \cdot A - 140 = 2 \cdot 133 - 140 = 126$

1 BOD

$M = 3 \cdot A - 226 = 3 \cdot 133 - 226 = 173$

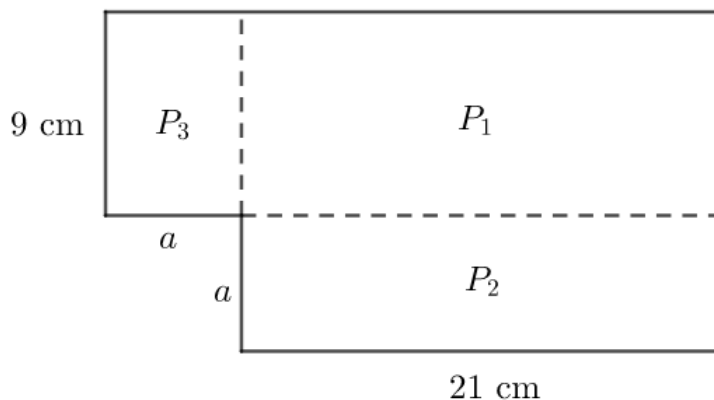
1 BOD

Ana ima 133 kune, Ivan 126 kuna, a Maja 173 kune.

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Stranicu kvadrata označimo s a , a površinu lika s P .

Podijelimo dobiveni lik na tri dijela čije su površine P_1 , P_2 i P_3 .



Površina P_1 iznosi $P_1 = 21 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 189 \text{ cm}^2$.

2 BODA

Tada je $P_2 + P_3 = P - P_1 = 369 \text{ cm}^2 - 189 \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$.

2 BODA

Vrijedi:

$$P_2 = 21a,$$

$$P_3 = 9a, \text{ pa je}$$

$$P_2 + P_3 = 21a + 9a = 30a.$$

2 BODA

Iz $30a = 180$ izračuna se

$$a = 180 : 30 = 6 \text{ cm}.$$

2 BODA

Površina kvadrata iznosi 36 cm^2 .

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 1 \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{11} - \frac{3}{11} \right) : \left(\left(1 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) : 18 \frac{1}{3} \right) = \\
 & = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{11} - \frac{3}{11} \right) : \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) : \frac{55}{3} \right) & 1 \text{ BOD} \\
 & = \left(\frac{2}{5} + \frac{49}{55} - \frac{3}{11} \right) : \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{55} \right) & 3 \text{ BODA} \\
 & = \frac{56}{55} : \frac{21}{220} & 3 \text{ BODA} \\
 & = \frac{56}{55} \cdot \frac{220}{21} \\
 & = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3} & 2 \text{ BODA}
 \end{aligned}$$

Najveći prirodni broj manji od vrijednosti zadanog izraza je 10. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Uz oznake:

$$|\angle BAC| = \alpha, |\angle CBA| = \beta \text{ i } |\angle ACB| = \gamma,$$

najmanji kut trokuta $\triangle ABC$ je α , zatim je $\gamma = \alpha + 20^\circ$, a najveći je $\beta = 2 \cdot (\alpha + 20^\circ) = 2\alpha + 40^\circ$.

2 BODA

Iz $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ dobivamo jednadžbu:

$$\alpha + \alpha + 20^\circ + 2\alpha + 40^\circ = 180^\circ$$

$$4\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

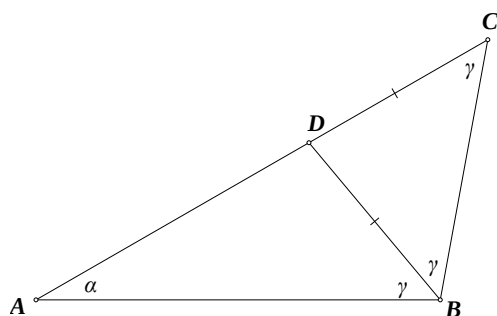
Slijedi:

$$\gamma = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$$

$$\beta = 2\alpha + 40^\circ = 100^\circ$$

3 BODA

Skica:



1 BOD

Trokut $\triangle BCD$ je jednakokrakan, pa vrijedi da je $|DC| = |DB|$.

2 BODA

U trokutu $\triangle ABD$ je kut nasuprot stranici $\overline{AD}$ veći od kuta nasuprot stranici $\overline{DB}$, pa je $|DB| < |AD|$, a iz toga slijedi da je $|DC| < |AD|$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik samo napisao koja je stranica manja, bez jasnog obrazloženja, takav odgovor nosi 1 BOD.

3. U pravokutniku $ABCD$ označimo $|AB| = a$ i $|BC| = b$.

Kako je širina pravokutnika $\frac{1}{4}$ duljine pravokutnika, vrijedi $b = \frac{1}{4}a$, odnosno $a = 4b$.

Tada je površina pravokutnika $P_{ABCD} = ab = 4b \cdot b$.

1 BOD

Tada vrijedi:

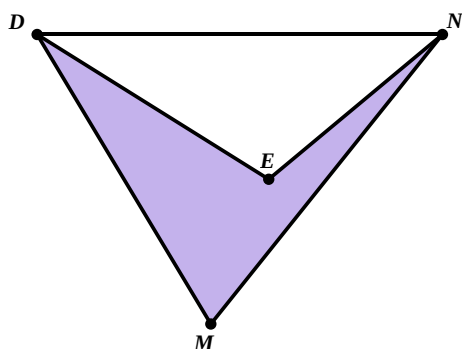
$$4b \cdot b = 144,$$

$$b \cdot b = 36,$$

$$b = 6 \text{ cm}, \text{ odnosno } a = 24 \text{ cm}.$$

1 BOD

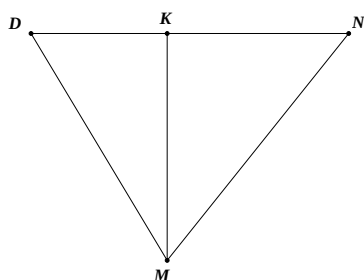
Kako su osjenčani četverokuti sukladni, odredimo površinu jednog od njih. Označimo taj četverokut s $MNED$.



Površina tog četverokuta jednaka je razlici površina dvaju trokuta, tj.

$$P_{MNED} = P_{MND} - P_{END}.$$

1 BOD



Označimo s $\overline{MK}$ visinu trokuta $\triangle MND$.

Kako je duljina stranice $\overline{ND}$ trećina duljine stranice a pravokutnika, a duljina visine $\overline{MK}$ je širina pravokutnika $ABCD$, vrijedi:

$$|ND| = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ cm},$$

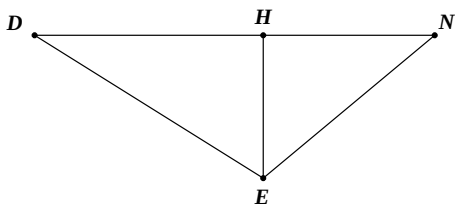
1 BOD

$$|MK| = 6 \text{ cm i}$$

1 BOD

$$P_{MND} = \frac{|ND| \cdot |MK|}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

1 BOD



Označimo s $\overline{EH}$ visinu trokuta $\triangle END$.

Kako točka E pripada simetrali stranice $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AD}$, onda je duljina dužine $\overline{EH}$ polovina širine pravokutnika $ABCD$, tj.

$$|EH| = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{To znači da je } P_{END} = \frac{|ND| \cdot |EH|}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Sada je } P_{MNED} = P_{MND} - P_{END} = 24 - 12 = 12 \text{ cm}^2 \text{ pa je} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{ukupna osjenčana površina } 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za određivanje površine $\triangle END$ može se koristiti činjenica da trokuti $\triangle END$ i $\triangle MND$ imaju zajedničku osnovicu $\overline{ND}$, a za duljine odgovarajućih visina vrijedi

$$|MK| = |AD|, |EH| = \frac{1}{2}|AD| \text{ pa je } |EH| = \frac{1}{2}|MK|.$$

$$\text{Stoga vrijedi: } P_{END} = \frac{1}{2}P_{MND} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

4. Označimo iznos Josipovog novca s J, Markovog s M, Franjinog s F i Lukinog s L.

Vrijedi:

$$M + F + L = 85 \text{ kn}$$

$$J + F + L = 90 \text{ kn}$$

$$J + M + L = 88 \text{ kn}$$

$$J + M + F = 94 \text{ kn}$$

2 BODA

Zbrajanjem svih jednakosti dobije se:

$$3 \cdot (J + M + F + L) = 357 \text{ kn, odnosno}$$

2 BODA

$$J + M + F + L = 119 \text{ kn}$$

1 BOD

$$\text{Sad se lako izračuna da Josip ima } 119 - 85 = 34 \text{ kn,}$$

1 BOD

$$\text{Marko } 119 - 90 = 29 \text{ kn,}$$

1 BOD

$$\text{Franjo } 119 - 88 = 31 \text{ kn}$$

1 BOD

$$\text{i Luka } 119 - 94 = 25 \text{ kn.}$$

1 BOD

Točan iznos za plaćanje računa imaju Franjo i Luka.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo s x planiranu svotu zarade.

$$\text{Tada je zarada poduzeća } x + \frac{1}{7}x, \text{ tj. } \frac{8}{7}x.$$

1 BOD

Poduzeće dijeli $\frac{1}{24}$ zarađene svote, pa mora ostati $\frac{23}{24}$ zarađene svote.

$$\text{Dakle, ostaje } \frac{23}{24} \cdot \frac{8}{7}x = \frac{23}{21}x.$$

2 BODA

$$\frac{23}{21}x \text{ je za jedan milijun veći iznos od planirane svote, pa vrijedi } \frac{23}{21}x = x + 1\,000\,000.$$

Dalje slijedi da je:

$$\frac{2}{21}x = 1\,000\,000,$$

2 BODA

$$x = 1\,000\,000 : \frac{2}{21},$$

$$x = 1\,000\,000 \cdot \frac{21}{2} = 10\,500\,000 \text{ kn.}$$

Planirana svota iznosi 10 500 000 kuna. 2 BODA

$$\text{Svota za podjelu zaposlenicima iznosi } \frac{1}{24} \cdot \frac{8}{7} \cdot 10\,500\,000 = 500\,000 \text{ kn.}$$

2 BODA

Broj zaposlenika tog poduzeća dobivamo dijeleći ukupnu svotu podijeljenu svim zaposlenicima iznosom od 12 500 kuna (iznosom kojeg je dobio svaki zaposlenik), tj. $500\,000 : 12\,500 = 40$.

Poduzeće ima 40 zaposlenika. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Velika kazaljka opiše puni krug (360°) za jedan sat pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : 60 = 6^\circ$. 1 BOD
Mala kazaljka opiše puni krug (360°) za 12 sati pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : (60 \cdot 12) = 0.5^\circ$. 1 BOD
Ako s x označimo minute od 18 sati do Dorinog izlaska onda je do tada velika kazaljka opisala $(6x)^\circ$, a mala $(0.5x)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $110^\circ = 180^\circ - (6x)^\circ + (0.5x)^\circ$ 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog izlaska je prošlo $x = 12\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
Ako s y označimo minute od 18 sati do Dorinog ulaska u kuću onda je do tada velika kazaljka opisala $(6y)^\circ$, a mala $(0.5y)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $110^\circ = (6y)^\circ - 180^\circ - (0.5y)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog povratka kući je prošlo $y = 52\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
 $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40$ 1 BOD
Od Dorinog izlaska do povratka u kuću proteklo je 40 minuta. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Velika kazaljka opiše puni krug (360°) za jedan sat pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : 60 = 6^\circ$. 1 BOD
Mala kazaljka opiše puni krug (360°) za 12 sati pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : (60 \cdot 12) = 0.5^\circ$. 1 BOD
Ako s x označimo minute od 18 sati do Dorinog izlaska onda je do tada velika kazaljka opisala $(6x)^\circ$, a mala $(0.5x)^\circ$, pa je razlika opisanog kuta bila $(6x)^\circ - (0.5x)^\circ = (5.5x)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $180^\circ - 110^\circ = (5.5x)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog izlaska je prošlo $x = 12\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
Ako s y označimo minute od 18 sati do Dorinog ulaska u kuću onda je do tada velika kazaljka opisala $(6y)^\circ$, a mala $(0.5y)^\circ$, pa je razlika opisanog kuta bila $(6y)^\circ - (0.5y)^\circ = (5.5y)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $180^\circ + 110^\circ = (5.5y)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog povratka kući je prošlo $y = 52\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
 $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40$ 1 BOD
Od Dorinog izlaska do povratka u kuću proteklo je 40 minuta. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Označimo s x_1 , x_2 i x_3 dio livade koji će u jednoj minuti pokositi Dinko, Hinko i Vinko redom.

Tada je:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{36} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{1}{45} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_3 + x_1 = \frac{1}{60} \quad 1 \text{ BOD}$$

Zbrajanjem svih jednadžbi dobivamo

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{15}, \text{ odnosno } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{30}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Sada je

$$x_1 = \frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{1}{90}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_2 = \frac{1}{30} - \frac{1}{60} = \frac{1}{60}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_3 = \frac{1}{30} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, za pokositi cijelu livadu Dinku je potrebno 90, Hinku 60, a Vinku 180 minuta. 1 BOD

Svatko od njih će pokositi trećinu livade, pa će Dinku za to trebati 30, Hinku 20, a Vinku 60 minuta.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x broj kilograma riže prve klase koju je prodavač uzeo.

No, onda je prodavač uzeo $2x$ kg riže druge klase 1 BOD

i $(x + 0.8)$ kg riže treće klase. 1 BOD

Pojedinačna masa slomljenih zrna je redom:

u 1. vreći $0.006 \cdot x$ kg, 1 BOD

u 2. vreći $0.015 \cdot 2x$ kg, 1 BOD

u 3. vreći $0.08 \cdot (x + 0.8)$ kg, 1 BOD

a u smjesi $0.033 \cdot (x + 2x + x + 0.8)$. 1 BOD

Vrijedi:

$$0.006x + 0.015 \cdot 2x + 0.08 \cdot (x + 0.8) = 0.033 \cdot (4x + 0.8) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.132x - 0.116x = 0.064 - 0.0264 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.016x = 0.0376$$

$$x = 2.35 \text{ kg} \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz vreće s prvom klasom riže prodavač je uzeo 2.35 kg riže. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je x broj kilograma riže prve klase koju je prodavač uzeo.

No, onda je prodavač uzeo $2x$ kg riže druge klase 1 BOD

i $(x + 0.8)$ kg riže treće klase. 1 BOD

Pojedinačna masa čitavih zrna je redom:

u 1. vreći $0.994 \cdot x$ kg, 1 BOD

u 2. vreći $0.985 \cdot 2x$ kg, 1 BOD

u 3. vreći $0.92 \cdot (x + 0.8)$ kg, 1 BOD

a u smjesi $0.967 \cdot (x + 2x + x + 0.8)$ kg. 1 BOD

Vrijedi:

$$0.994x + 0.985 \cdot 2x + 0.92 \cdot (x + 0.8) = 0.967 \cdot (4x + 0.8) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$3.884x - 3.868x = 0.7736 - 0.736$$

1 BOD

$$0.016x = 0.0376$$

$$x = 2.35 \text{ kg}$$

1 BOD

Iz vreće s prvom klasom riže prodavač je uzeo 2.35 kg riže.

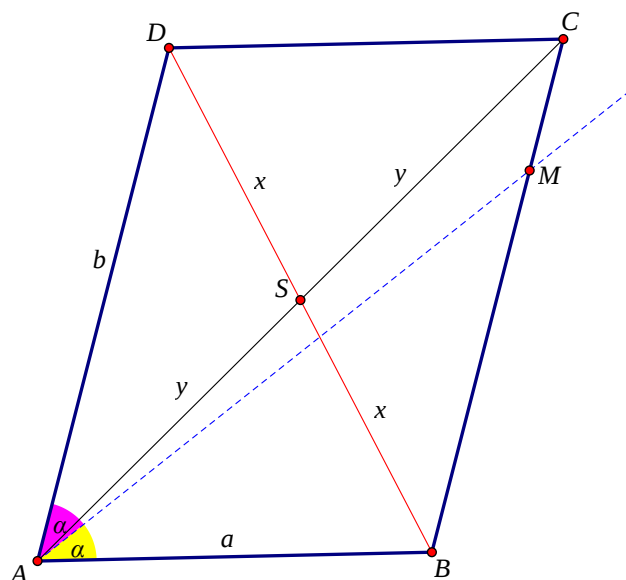
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, pa možemo označiti

$$|SB| = |SD| = x \text{ i } |SA| = |SC| = y.$$

Ako je opseg trokuta $\triangle CDS$ za 5.6 cm manji od opsega trokuta $\triangle BCS$, vrijedi jednakost

$$x + y + b = x + y + a + 5.6,$$

1 BOD

$$\text{tj. } b = a + 5.6.$$

1 BOD

Razmjer $|BM| : |MC| = 7 : 4$ možemo zapisati kao $|BM| = 7k$, $|MC| = 4k$, pa je

$$b = |BM| + |MC| = 11k.$$

1 BOD

Označimo li $|\angle BAD| = 2\alpha$, onda je $|\angle BAM| = \alpha$, jer je AM simetrala kuta $\angle BAD$.

Susjedni kutovi u paralelogramu su suplementarni, pa je $|\angle MBA| = 180^\circ - 2\alpha$.

1 BOD

Iz navedenog slijedi da je mjera trećeg kuta $\triangle ABM$, $|\angle AMB| = \alpha$.

Stoga je $\triangle ABM$ jednakokrakan s duljinama krakova $|AB| = |BM| = a = 7k$.

1 BOD

Uvrštavanjem u jednakost $b = a + 5.6$ dobijemo $11k = 7k + 5.6$, tj. $k = 1.4$.

1 BOD

Slijedi:

$$a = 7k = 9.8 \text{ cm},$$

1 BOD

$$b = 11k = 15.4 \text{ cm}.$$

1 BOD

Opseg paralelograma $ABCD$ je

$$o = 2a + 2b = 19.6 + 30.8 = 50.4 \text{ cm}.$$

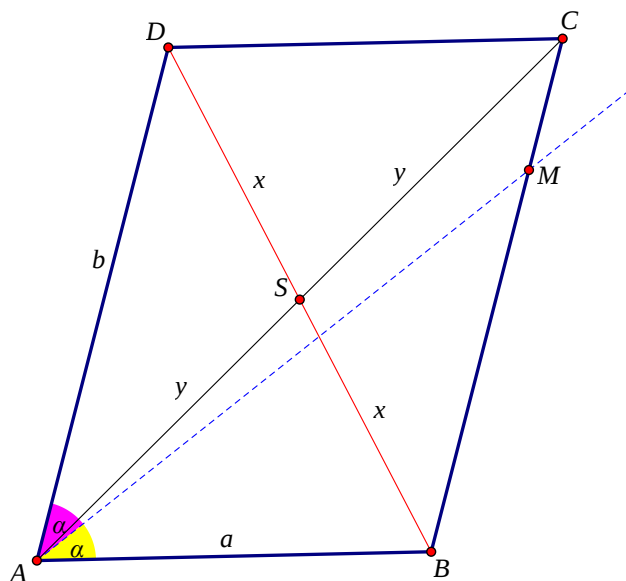
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, pa možemo označiti

$|SB| = |SD| = x$ i $|SA| = |SC| = y$.

Ako je opseg trokuta $\triangle CDS$ za 5.6 cm manji od opsega trokuta $\triangle BCS$, vrijedi jednakost

$$x + y + b = x + y + a + 5.6,$$

tj. $b = a + 5.6$.

1 BOD

1 BOD

Razmjer $|BM| : |MC| = 7 : 4$ možemo zapisati kao $|BM| = \frac{7}{11}b$, $|MC| = \frac{4}{11}b$.

1 BOD

Označimo li $|\angle BAD| = 2\alpha$, onda je $|\angle BAM| = \alpha$, jer je AM simetrala kuta $\angle BAD$.

Susjedni kutovi u paralelogramu su suplementarni, pa je $|\angle MBA| = 180^\circ - 2\alpha$.

1 BOD

Iz navedenog slijedi da je mjera trećeg kuta $\triangle ABM$, $|\angle AMB| = \alpha$.

Stoga je $\triangle ABM$ jednakokrakan s duljinama krakova $|AB| = |BM| = a$.

1 BOD

Kako je $|BM| = \frac{7}{11}b$, slijedi $a = \frac{7}{11}b$.

1 BOD

Uvrštavanjem u jednakost $b = a + 5.6$ dobijemo $b = \frac{7}{11}b + 5.6$, odnosno $b = 15.4$ cm.

1 BOD

Slijedi $a = \frac{7}{11}b = \frac{7}{11} \cdot 15.4 = 9.8$ cm.

1 BOD

Opseg paralelograma $ABCD$ je

$$o = 2a + 2b = 19.6 + 30.8 = 50.4 \text{ cm.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Na kuglicama su svi prirodni brojevi $b \leq 10\,000$, pa ćemo prebrojati jednoznamenaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenaste i peteroznamenaste brojeve s traženim svojstvom.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je znamenka jedinica 5 ili 0.

- a) Ako je $1 \leq b \leq 9$, onda samo broj 5 zadovoljava uvjete pa imamo samo 1 jednoznamenasti broj s traženim svojstvom.

1 BOD

- b) Ako je $10 \leq b \leq 99$, onda je $b = \overline{x0}$ ili $b = \overline{x5}$. Ako je broj dvoznamenkast, onda je $x \neq 0$, a kako

znamenke moraju biti različite, dvoznamenkastih brojeva oblika $\overline{x0}$ ima 9, 1 BOD

a dvoznamenkastih brojeva oblika $\overline{x5}$ ima 8. 1 BOD

Ukupno je 17 dvoznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

c) Ako je $100 \leq b \leq 999$, onda je $b = \overline{xy0}$ ili $b = \overline{xy5}$.

Za troznamenkaste brojeve oblika $\overline{xy0}$ stoticu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$, a desetice iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabrane znamenke stotica, pa troznamenkastih brojeva oblika $\overline{xy0}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $9 \cdot 8 = 72$. 1 BOD

Za troznamenkaste brojeve oblika $\overline{xy5}$ stoticu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5, a desetice iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabrane znamenke stotica, pa troznamenkastih brojeva oblika $\overline{xy5}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $8 \cdot 8 = 64$. 1 BOD

Ukupno je $72 + 64 = 136$ troznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

d) Ako je $1000 \leq b \leq 9999$, onda je $b = \overline{xyz0}$ ili $b = \overline{xyz5}$.

Za četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{xyz0}$ tisućicu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$, stoticu iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabrane znamenke tisućica, a desetice iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabranih znamenki tisućica i stotica pa četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{xyz0}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. 1 BOD

Analogno, za četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{xyz5}$ tisućicu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5, stoticu iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabrane znamenke tisućica, a desetice iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabranih znamenki tisućica i stotica, pa četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{xyz5}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$. 1 BOD

Ukupno je $504 + 448 = 952$ četveroznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

e) Jedini peteroznamenkasti broj 10 000 ne zadovoljava uvjete zadatka. 1 BOD

Dakle, povoljnih ishoda događaja je $1 + 9 + 8 + 72 + 64 + 504 + 448 = 1106$, 1 BOD
pa je vjerojatnost da je od mogućih 10 000 kuglica izvučena kuglica s traženim svojstvom jednaka

$$p = \frac{1106}{10\,000} = \frac{553}{5\,000} = 0.1106 = 11.06\% . \quad 1 \text{ BOD}$$

Napomena: Vjerojatnost može biti izražena u bilo kojem od navedenih oblika zapisa.

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. ožujka 2020.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x prvi u nizu 50 uzastopnih parnih prirodnih brojeva.

- 1. broj x
- 2. broj $x + 2$
- 3. broj $x + 4$

...

- 50. broj $x + 98$

Aritmetička sredina tog niza parnih brojeva iznosi:

$$\frac{x + x + 2 + x + 4 + \dots + x + 98}{50} = \frac{50x + 50 \cdot 49}{50}$$

$$= x + 49.$$

1 BOD

1 BOD

Neka je y prvi u nizu 41 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva.

- 1. broj y
- 2. broj $y + 2$
- 3. broj $y + 4$

...

- 41. broj $y + 80$

Aritmetička sredina tog niza neparnih brojeva iznosi:

$$\frac{y + y + 2 + y + 4 + \dots + y + 80}{41} = \frac{41y + 41 \cdot 40}{41}$$

$$= y + 40.$$

1 BOD

1 BOD

Kako su aritmetičke sredine jednake, slijedi $x + 49 = y + 40$, odnosno $x + 9 = y$.

1 BOD

Najveći paran broj u nizu parnih brojeva je $x + 98$, a srednji po veličini neparan broj u nizu neparnih brojeva je $y + 40$.

1 BOD

Razlika kvadrata tih brojeva iznosi 7 595:

$$(x + 98)^2 - (y + 40)^2 = 7\,595, \text{ odnosno}$$

$$(x + 98)^2 - (x + 49)^2 = 7\,595.$$

1 BOD

Dalje je:

$$(x + 98 + x + 49)(x + 98 - x - 49) = 7\,595,$$

$$(2x + 147) \cdot 49 = 7\,595,$$

(Napomena 1: Umjesto rastavom razlike kvadrata može i kvadriranjem:

$$x^2 + 196x + 9\,604 - (x^2 + 98x + 2\,401) = 7\,595.)$$

$$98x + 7\,203 = 7\,595.$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 4$.

1 BOD

Dalje je $y = x + 9 = 13$.

1 BOD

Parni brojevi su 4, 6, 8, 10, ..., 100 i 102, a neparni 13, 15, 17, 19, ..., 91 i 93.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 2: Točno određena aritmetička sredina (parnih ili neparnih brojeva) na bilo koji način nosi 2 BODA.

Drugi način:

Neka je $2n$ prvi u nizu 50 uzastopnih parnih prirodnih brojeva, $n \in \mathbb{N}$.

1. broj $2n$
 2. broj $2n + 2$
 3. broj $2n + 4$
 ...

50. broj $2n + 98$

Aritmetička sredina tog niza parnih brojeva iznosi:

$$\frac{2n + 2n + 2 + 2n + 4 + \dots + 2n + 98}{50} = \frac{100n + 50 \cdot 49}{50} = 2n + 49. \quad \begin{array}{l} 1 \text{ BOD} \\ 1 \text{ BOD} \end{array}$$

Neka je $2k + 1$ prvi u nizu 41 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva, $k \in \mathbb{N}_0$.

1. broj $2k + 1$
 2. broj $2k + 3$
 3. broj $2k + 5$
 ...

41. broj $2k + 81$

Aritmetička sredina tog niza neparnih brojeva iznosi:

$$\frac{2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5 + \dots + 2k + 81}{41} = \frac{82k + 41 \cdot 41}{41} = 2k + 41. \quad \begin{array}{l} 1 \text{ BOD} \\ 1 \text{ BOD} \end{array}$$

Kako su aritmetičke sredine jednake, slijedi $2n + 49 = 2k + 41$, odnosno $n + 4 = k$. 1 BOD

Najveći paran broj u nizu parnih brojeva je $2n + 98$, a srednji po veličini neparan broj u nizu neparnih brojeva je $2k + 41$. 1 BOD

Razlika kvadrata tih brojeva iznosi 7 595:

$$\begin{aligned} (2n + 98)^2 - (2k + 41)^2 &= 7\,595, \text{ odnosno} \\ (2n + 98)^2 - (2n + 49)^2 &= 7\,595. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \\ 1 \text{ BOD} \end{array}$$

Dalje je:

$$(2n + 98 + 2n + 49)(2n + 98 - 2n - 49) = 7\,595,$$

$$(4n + 147) \cdot 49 = 7\,595,$$

(Napomena 1: Umjesto rastavom razlike kvadrata može i kvadriranjem:

$$4n^2 + 392n + 9\,604 - (4n^2 + 196n + 2\,401) = 7\,595.)$$

$$196n + 7\,203 = 7\,595.$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $n = 2$. 1 BOD

Dalje je $k = n + 4 = 6$. 1 BOD

Parni brojevi su 4, 6, 8, 10, ..., 100 i 102, a neparni 13, 15, 17, 19, ..., 91 i 93. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 2: Točno određena aritmetička sredina (parnih ili neparnih brojeva) na bilo koji način nosi 2 BODA.

2. Prvi način:

Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (a, b, c) .

Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 2 BODA

Umnožak $a \cdot b \cdot c$ višekratnik je broja 10, tj. umnožak je oblika $10k$, $k \in \{1, 2, \dots, 21\}$.

Višekratnici 70, 110, 130, 140, 170, 190 i 210 ne mogu biti traženi umnošci jer na stranama kocke ne postoje brojevi 7, 11, 13, 17 i 19.

Višekratnici 160 i 200 se ne mogu postići bacanjem kocke tri puta.

Dakle, traženi umnošci mogu biti 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120, 150 i 180.

1 BOD

Ako su brojevi na kockama različiti, tada imamo 6 mogućnosti tj. 6 različitih uređenih trojki (npr. $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5 \cdot 1 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 1$).

Ako su dva broja na kockama jednaka, tada imamo 3 mogućnosti tj. 3 različite uređene trojke (npr. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2$).

Tri broja na kockama ne mogu biti jednaka, a da umnožak bude višekratnik broja 10.

Popis svih mogućih dobrih rastava i broja mogućnosti za svaki od njih dani su u tablici.

Potpuno popisani svi mogući rastavi, njih 15, neovisno o tome je li dobro izračunat broj mogućnosti za te rastave.

1 BOD

umnožak	brojevi na kockama su različiti		dva broja na kockama su jednaka	
10	(1, 2, 5)	6 mogućnosti		
20	(1, 4, 5)	6 mogućnosti	(2, 2, 5)	3 mogućnosti
30	(1, 5, 6)	6 mogućnosti		
	(2, 3, 5)	6 mogućnosti		
40	(2, 4, 5)	6 mogućnosti		
50			(2, 5, 5)	3 mogućnosti
60	(2, 5, 6)	6 mogućnosti		
	(3, 4, 5)	6 mogućnosti		
80			(4, 4, 5)	3 mogućnosti
90	(3, 5, 6)	6 mogućnosti		
100			(4, 5, 5)	3 mogućnosti
120	(4, 5, 6)	6 mogućnosti		
150			(5, 5, 6)	3 mogućnosti
180			(5, 6, 6)	3 mogućnosti
ukupno		54 mogućnosti		18 mogućnosti
		3 BODA		2 BODA

Broj povoljnih trojki (povoljnih ishoda) je 72.

Vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:

Učeniku treba priznati 2 BODA i ako je za broj svih uređenih trojki (svih ishoda) samo zapisano $6 \cdot 6 \cdot 6$.

Napomena 2:

Za prebrojavanje mogućnosti za sve moguće rastave predviđeno je 5 BODOVA.

Ako učenik nije popisao sve moguće rastave ili nije točno prebrojao sve mogućnosti, parcijalne bodove treba dodijeliti na način da se za svaku 3 dobro napisana rastava i prebrojane mogućnosti za te rastave dobiva po 1 BOD.

Drugi način:

Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (a, b, c) .

Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

2 BODA

Umnožak $a \cdot b \cdot c$ je djeljiv s 10 ako i samo ako je jedan od dobivenih brojeva jednak 5 i jedan od preostala dva broja paran (tj. jednak 2, 4 ili 6).

1 BOD

Broj povoljnih slučajeva dobit ćemo zbrajanjem mogućnosti dobivanja:

- a) jedne petice i dva parna broja,
- b) jedne petice, jednog parnog broja i jednog neparnog broja koji nije 5,
- c) jednog parnog broja i dvije petice.

Pod a) za svaki parni broj imamo po 3 mogućnosti, a kako 5 može biti bilo koji od brojeva a, b, c , ovdje imamo $3^2 \cdot 3 = 27$ mogućnosti. 2 BODA

Pod b) parni broj biramo na 3 načina, a neparni na 2, a broj rasporeda (permutacija) je 6, što daje $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ mogućnosti. 2 BODA

Pod c) parni broj je jedan od brojeva 2, 4 ili 6 (to su 3 mogućnosti), a kako taj broj može biti bilo koji od brojeva a, b, c , imamo ukupno $3 \cdot 3 = 9$ mogućnosti. 2 BODA

Broj povoljnih ishoda je 72.

Dakle, vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (a, b, c) .

Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 2 BODA

Prebrojat ćemo slučajeve kada umnožak $a \cdot b \cdot c$ nije djeljiv s 10. To će se dogoditi ako nijedan od brojeva nije djeljiv s 5 i ako nijedan nije paran, odnosno ako

a) nijednom nije pao broj 5, a takvih je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ mogućnosti (na raspolaganju su samo brojevi 1, 2, 3, 4 i 6), 2 BODA

b) nijednom nije pao parni broj, što daje $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mogućnosti (jer je pri svakom bacanju kocke pao neki od brojeva 1, 3 ili 5). 2 BODA

Međutim, pod a) i b) dvostruko brojimo situacije kada nije pao ni broj 5 niti paran broj (kao što je npr. slučaj $a = 1, b = 3, c = 1$). Takvih slučajeva ima $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (jer su na raspolaganju samo brojevi 1 i 3).

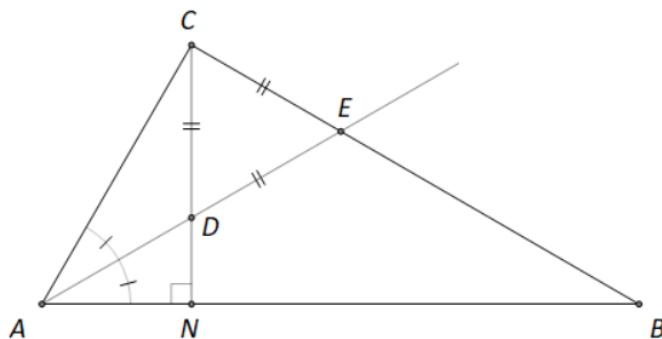
Od zbroja brojeva mogućnosti pod a) i b) treba oduzeti broj mogućnosti koje smo dvostruko brojali, dakle, postoje $125 + 27 - 8 = 144$ mogućnosti da umnožak NE bude djeljiv s 10. 2 BODA

Zato je u $216 - 144 = 72$ slučaja umnožak djeljiv sa 10. 1 BOD

Dakle, vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:



Trokut $\triangle DEC$ je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60^\circ$.

Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60^\circ$.

Trokut $\triangle AND$ je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60^\circ$, pa je $|\angle NAD| = 30^\circ$.

Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30^\circ$, pa je $|\angle NAC| = 60^\circ$. 1 BOD

Trokut $\triangle ANC$ je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACN| = 30^\circ$.

$|\angle ACN| = 30^\circ$ i $|\angle DCE| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACB| = 90^\circ$.

1 BOD

Dakle, trokut $\triangle ABC$ je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30^\circ$.

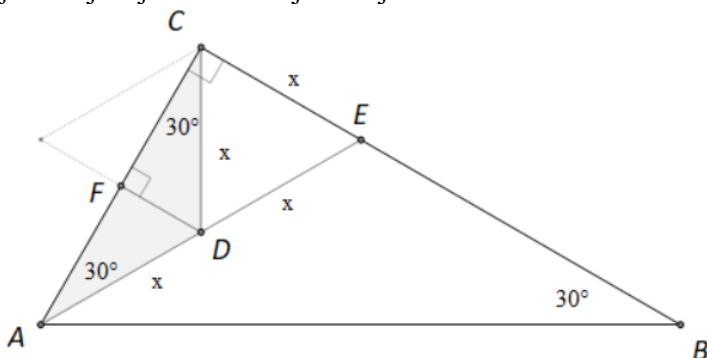
1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle DEC$ duljine x .

Površina trokuta $\triangle DEC$ je $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$, pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Rješavanjem jednadžbe slijedi da je $x = 4 \text{ cm}$.

1 BOD



Dva kuta (uz stranicu $\overline{AC}$) u trokutu $\triangle ADC$ su veličine 30° , pa je trokut $\triangle ADC$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AC}$.

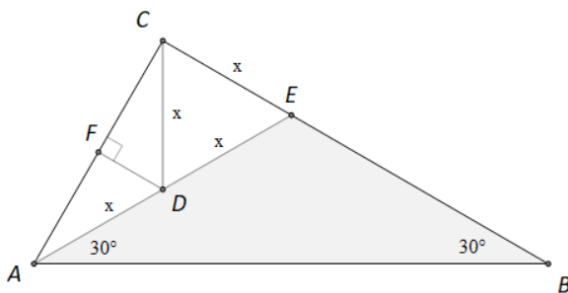
Dužina $\overline{CF}$ je kateta pravokutnog trokuta $\triangle CFD$ (odnosno visina jednakostraničnog trokuta stranice duljine x), pa je

$$|CF| = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

1 BOD

Slijedi da je $|AC| = 2|CF| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

1 BOD



Dva kuta (uz stranicu $\overline{AB}$) u trokutu $\triangle ABE$ su veličine 30° , pa je trokut $\triangle ABE$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$.

Dakle, slijedi da je $|BE| = |AE| = 2x = 8 \text{ cm}$.

1 BOD

Zato je $|BC| = |BE| + |EC| = 12 \text{ cm}$.

1 BOD

Duljine kateta trokuta $\triangle ABC$ su 12 cm i $4\sqrt{3} \text{ cm}$,

1 BOD

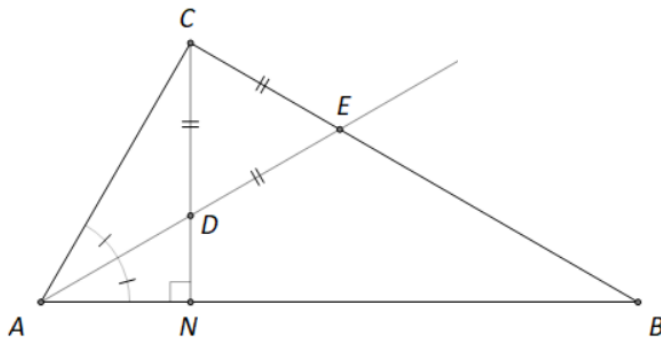
pa je njegova površina $P = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Duljina dužine $\overline{CF}$ može se izračunati i izračunom duljine dužine $\overline{DF}$ i potom primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle CFD$.

Drugi način:



Trokut $\triangle DEC$ je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60^\circ$.

Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60^\circ$.

Trokut $\triangle AND$ je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60^\circ$, pa je $|\angle NAD| = 30^\circ$.

Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30^\circ$, pa je $|\angle NAC| = 60^\circ$.

1 BOD

Trokut $\triangle ANC$ je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACN| = 30^\circ$.

$|\angle ACN| = 30^\circ$ i $|\angle DCE| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACB| = 90^\circ$.

1 BOD

Dakle, trokut $\triangle ABC$ je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30^\circ$.

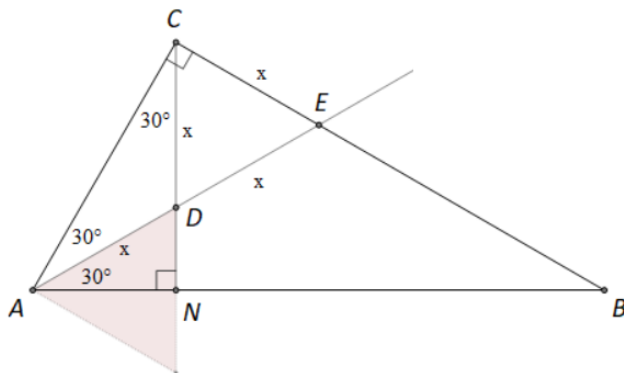
1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle DEC$ duljine x .

Površina trokuta $\triangle DEC$ je $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$, pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Rješavanjem jednadžbe slijedi da je $x = 4 \text{ cm}$.

1 BOD



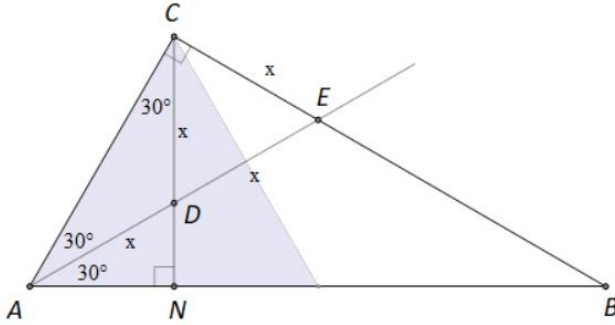
Dva kuta (uz stranicu $\overline{AC}$) u trokutu $\triangle ADC$ su veličine 30° , pa je trokut $\triangle ADC$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AC}$, odakle slijedi da je $|AD| = |CD| = x$. Kako je $\overline{DN}$ kateta pravokutnog trokuta $\triangle AND$ nasuprot kutu veličine 30° , onda je $|DN|$ jednaka polovini duljine stranice x jednakostraničnog trokuta.

$$|DN| = \frac{x}{2} = 2 \text{ cm},$$

1 BOD

$$\text{odnosno } |CN| = |CD| + |DN| = 6 \text{ cm}.$$

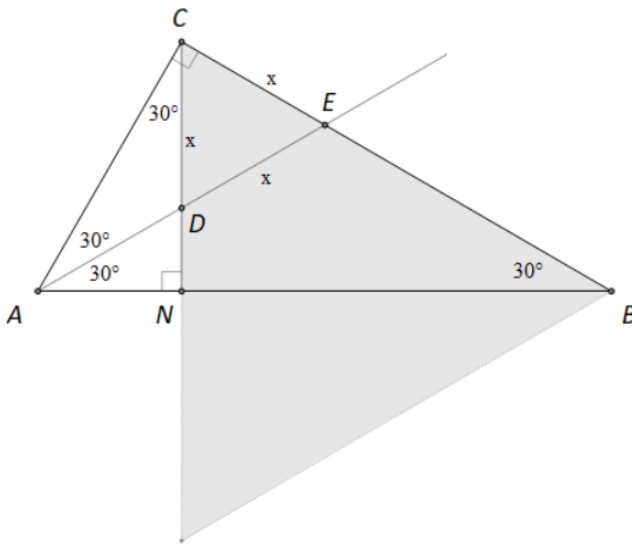
1 BOD



Trokut $\triangle CAN$ je pravokutan trokut, pri čemu je kateta $\overline{CN}$ nasuprot kutu veličine 60° (odnosno visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{AC}$), pa je

$$|CN| = \frac{|AC|}{2} \sqrt{3}, \text{ tj. } |AC| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

1 BOD



Trokut $\triangle CNB$ je pravokutan trokut, pri čemu je kateta $\overline{CN}$ nasuprot kutu veličine 30° (polovina stranice jednakostraničnog trokuta), pa je $|BC| = 2|CN| = 12 \text{ cm}$.

1 BOD

Duljine kateta trokuta $\triangle ABC$ su 12 cm i $4\sqrt{3}$ cm,

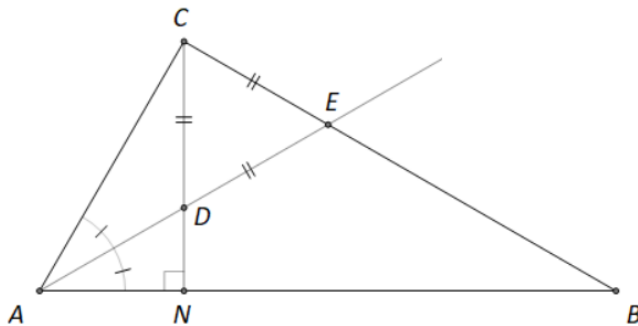
1 BOD

pa je njegova površina $P = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



Trokut $\triangle DEC$ je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60^\circ$.

Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60^\circ$.

Trokut $\triangle AND$ je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60^\circ$, pa je $|\angle NAD| = 30^\circ$.

Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30^\circ$, pa je $|\angle NAC| = 60^\circ$.

1 BOD

Trokut $\triangle ANC$ je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACN| = 30^\circ$.

$|\angle ACN| = 30^\circ$ i $|\angle DCE| = 60^\circ$, pa je $|\angle ACB| = 90^\circ$.

1 BOD

Dakle, trokut $\triangle ABC$ je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30^\circ$.

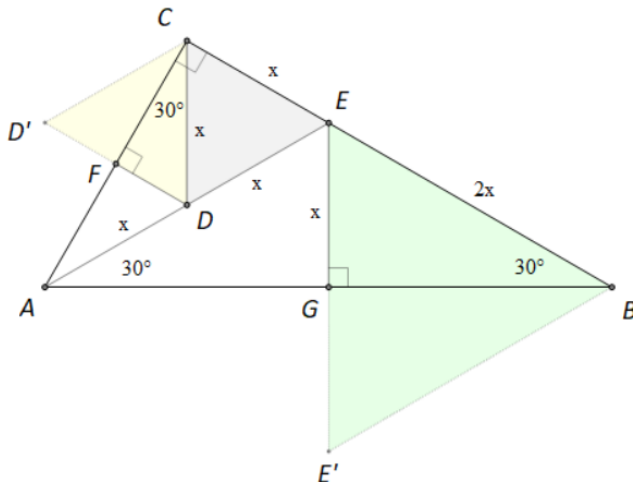
1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle DEC$ duljine x .

Površina trokuta $\triangle DEC$ je $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$, pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Rješavanjem jednadžbe slijedi da je $x = 4 \text{ cm}$.

1 BOD



(skica s do crtanim osnosimetričnim jednakostraničnim trokutima)

1 BOD

Trokuti $\triangle DEC$ i $\triangle D'DC$ su jednakostranični trokuti sa stranicom duljine x , a trokut $\triangle E'BE$ je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $2x$.

1 BOD

(Napomena: Za taj 1 BOD dovoljno je to naznačiti na skici.)

Površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka je zbroju površina jednakostraničnih trokuta $\triangle DEC$, $\triangle D'DC$ i $\triangle E'BE$, odnosno za površinu P trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $P = P_{DEC} + P_{D'DC} + P_{E'BE}$.

2 BODA

Tada je $P = 2 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{8^2}{4}\sqrt{3}$,

1 BOD

odnosno $P = 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3}$.

Površina trokuta $\triangle ABC$ je $P = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

$$A = n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n^2 + 6n + 9 - 1) = n((n + 3)^2 - 1) =$$

1 BOD

$$= n(n + 3 - 1)(n + 3 + 1) = n(n + 2)(n + 4)$$

1 BOD

a) Brojevi n , $n + 2$ i $n + 4$ daju različite ostatke pri dijeljenju s 3 pa je (točno) jedan od njih djeljiv s 3.

2 BODA

(Barem) jedan od faktora umnoška je djeljiv s 3 pa je i umnožak djeljiv s 3.

1 BOD

b) Ako je A djeljiv s 3 i s 32, tada je A djeljiv s 96 ($3 \cdot 32 = 96$, 3 i 32 su relativno prosti brojevi).

1 BOD

Pokazano je da je A djeljiv s 3 za svaki prirodni broj n . Treba pokazati za koje je prirodne brojeve n broj A djeljiv s 32.

Ako je n neparan, faktori n , $n + 2$ i $n + 4$ su neparni, pa je A neparan i ne može biti djeljiv s 32.

1 BOD

Od tri uzastopna parna broja, barem jedan je djeljiv s 4.

Ako je **n djeljiv s 4**, tj. $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je

$$A = 4k(4k + 2)(4k + 4) = 32k(2k + 1)(k + 1), \text{ pa je broj } A \text{ djeljiv s 32.}$$

1 BOD

Ako je **$n + 2$ djeljiv s 4**, tj. $n + 2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je

$$A = (4k - 2)4k(4k + 2) = 16(2k - 1)k(2k + 1).$$

Ako je k neparan, tada su i faktori $2k - 1$, $2k + 1$ neparni, pa A nije djeljiv s 32.

1 BOD

Ako je k paran, tada je A djeljiv s 32.

1 BOD

Prirodni brojevi n za koje je A djeljiv s 96 su svi brojevi oblika $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ i svi brojevi oblika $n = 4k - 2$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ i k je paran broj.

Ili:

Neka je $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je $n = 4k - 2 = 8m - 2$. Broj n je prirodan broj koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 6.

Prirodni brojevi n za koje je A djeljiv s 96 su svi brojevi koji su djeljivi s 4 i svi brojevi koji pri dijeljenju s 8 daju ostatak 6.

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:

Ako učenik trinom $n^2 + 6n + 8$ rastavlja na faktore rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$n^2 + 6n + 8 = 0, \text{ točan rastav zadanog broja } A \text{ treba bodovati s 2 BODA.}$$

Napomena 2:

Broj A može se rastaviti i na sljedeći način:

$$A = n^3 + 6n^2 + 8n = n^3 + 4n^2 + 2n^2 + 8n = n^2(n + 4) + 2n(n + 4) =$$

1 BOD

$$= (n^2 + 2n)(n + 4) = n(n + 2)(n + 4)$$

1 BOD

Napomena 3:

U a) dijelu zadatka djeljivost brojem 3 može se obrazložiti na sljedeći način:

Broj n , s obzirom na djeljivost brojem 3, može biti oblika $3k$, $3k + 1$ ili $3k + 2$.

Neka je $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = 3k(3k + 2)(3k + 4)$ pa je A djeljiv s 3.

1 BOD

Neka je $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 1)(3k + 3)(3k + 5) = 3(3k + 1)(k + 1)(3k + 5)$

pa je A djeljiv s 3.

1 BOD

Neka je $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 2)(3k + 4)(3k + 6) = 3(3k + 2)(3k + 4)(k + 2)$

pa je A djeljiv s 3.

1 BOD

Drugi način:

$$A = n^3 + 6n^2 + 8n$$

- a) S obzirom na djeljivost brojem 3, n može biti oblika $3k$, $3k + 1$ ili $3k + 2$.

Neka je $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 8 \cdot 3k = 27k^3 + 54k^2 + 24k = 3(9k^3 + 18k^2 + 8k)$ pa je A djeljiv s 3.

ili $A = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 8 \cdot 3k = 27k^3 + 54k^2 + 24k$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD

Neka je $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 1)^3 + 6(3k + 1)^2 + 8 \cdot (3k + 1) = 27k^3 + 81k^2 + 69k + 15 = 3(9k^3 + 27k^2 + 23k + 5)$ pa je A djeljiv s 3.

ili $A = (3k + 1)^3 + 6(3k + 1)^2 + 8 \cdot (3k + 1) = 27k^3 + 81k^2 + 69k + 15$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD

Neka je $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 2)^3 + 6(3k + 2)^2 + 8 \cdot (3k + 2) = 27k^3 + 108k^2 + 132k + 48 = 3(9k^3 + 36k^2 + 44k + 16)$ pa je A djeljiv s 3.

ili $A = (3k + 2)^3 + 6(3k + 2)^2 + 8 \cdot (3k + 2) = 27k^3 + 108k^2 + 132k + 48$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD

- b) Ako je A djeljiv s 3 i s 32, tada je A djeljiv s 96 ($3 \cdot 32 = 96$, 3 i 32 su relativno prosti brojevi).

1 BOD

Kako je $6n^2 + 8n$ paran broj, tada je A paran ako i samo ako je n^3 paran, odnosno ako i samo ako je n paran.

Dakle, ako je n neparan tada A nije djeljiv s 32. 1 BOD

Za parne brojeve n , promotrimo sljedeće slučajeve:

Neka je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = (4k)^3 + 6(4k)^2 + 8 \cdot 4k = 32(2k^3 + 3k^2 + k)$ pa je A djeljiv s 32. 1 BOD

Neka je $n = 8k - 2$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} A &= (8k - 2)^3 + 6(8k - 2)^2 + 8 \cdot (8k - 2) \\ &= 8((4k)^3 - 3 \cdot (4k)^2 + 3 \cdot 4k - 1) + 24((4k)^2 - 8k + 1) + 16(4k - 1) \\ &= 32(16k^3 - k) \end{aligned}$$

pa je A djeljiv s 32. 2 BODA

Neka je $n = 8k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$\begin{aligned} A &= (8k + 2)^3 + 6(8k + 2)^2 + 8 \cdot (8k + 2) = \\ &= 8((4k)^3 + 3 \cdot (4k)^2 + 3 \cdot 4k + 1) + 24((4k)^2 + 8k + 1) + 16(4k + 1) = \\ &= 32(16k^3 + 24k^2 + 11k + 1) + 16 \end{aligned}$$

pa A nije djeljiv s 32. 2 BODA

.....UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Vrijedi $mn + 2m - 2n - 4 + 4 = 2020$. 1 BOD

Nadalje je $m(n + 2) - 2(n + 2) + 4 = 2020$, 1 BOD

odnosno $(m - 2)(n + 2) = 2016$. 1 BOD

Broj $n + 2$ je djelitelj broja 2016. 1 BOD

Rastavimo broj 2016 na proste faktore: $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. 1 BOD

Svaki djelitelj broja 2016 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, gdje je

$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$. 1 BOD

Broj prirodnih djelitelja broja 2016 jednak je $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. 2 BODA

Djelitelji broja 2016 koji ne zadovoljavaju uvjete zadatka su brojevi 1 i 2 jer ako je

$n + 2 = 1$ i $n + 2 = 2$, tada n nije prirodan broj, a u ostalim je slučajevima broj n prirodan

pa postoje 34 prirodna broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD

Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona

$$\text{ekvivalentna s } m = 2 + \frac{2016}{n+2}.$$

Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu

$$mn + 2m - 2n = 2020.$$

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik zna da je broj djelitelja broja $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ jednak $(5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, bodovati s 3 BODA.

Drugi način:

Rješavanjem polazne jednadžbe po m dobivamo $m(n+2) = 2n + 2020$.

1 BOD

$$\text{Nadalje je } m = \frac{2n + 2020}{n+2},$$

1 BOD

$$\text{odnosno } m = 2 + \frac{2016}{n+2}.$$

1 BOD

Broj $n+2$ je djelitelj broja 2016.

1 BOD

Rastavimo broj 2016 na proste faktore: $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

1 BOD

Svaki djelitelj broja 2016 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, gdje je

$$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, b \in \{0, 1, 2\}, c \in \{0, 1\}.$$

1 BOD

Broj prirodnih djelitelja broja 2016 jednak je $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$.

2 BODA

Djelitelji broja 2016 koji ne zadovoljavaju uvjete zadatka su brojevi 1 i 2 jer ako je

$n+2 = 1$ i $n+2 = 2$, tada n nije prirodan broj, a u ostalim je slučajevima broj n prirodan

pa postoje 34 prirodna broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1 BOD

Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona

$$\text{ekvivalentna s } m = 2 + \frac{2016}{n+2}.$$

Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu

$$mn + 2m - 2n = 2020.$$

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik zna da je broj djelitelja broja $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ jednak $(5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, bodovati s 3 BODA.

Treći način:

$$\text{Vrijedi } mn + 2m - 2n - 4 + 4 = 2020.$$

1 BOD

$$\text{Nadalje je } m(n+2) - 2(n+2) + 4 = 2020$$

1 BOD

$$\text{odnosno } (m-2)(n+2) = 2016.$$

1 BOD

Broj $n+2$ je djelitelj broja 2016.

1 BOD

Rastavimo broj 2016 na proste faktore: $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

1 BOD

Prirodni djelitelji broja 2016 su: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63,

72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1008 i 2016, ima ih 36.

3 BODA

U slučaju $n+2 = 1$ i $n+2 = 2$ broj n nije prirodan.

Za preostalih 34 slučaja n je prirodni broj.

1 BOD

Inače, iz preostalih slučajeva slijedi da n može biti:

1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 26, 30, 34, 40, 46, 54, 61, 70, 82, 94, 110, 124, 142, 166, 222,

250, 286, 334, 502, 670, 1006 i 2014.

Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona

$$\text{ekvivalentna s } m = 2 + \frac{2016}{n+2}.$$

Inače, odgovarajući broj m redom može biti:

674, 506, 338, 290, 254, 226, 170, 146, 128, 114, 98, 86, 74, 65, 58, 50, 44, 38, 34, 30, 26, 23, 20, 18, 16, 14, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 4 i 3.

Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu

$$mn + 2m - 2n = 2\,020.$$

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:

Ukoliko učenik, nakon rastava broja 2 016 na proste faktore (i ostvarivanja prvih 5 BODOVA), krene raspisivati rješenja jednadžbe i ne nađe sva rješenja, može dobiti maksimalno 3 od 5 BODOVA, i to:

- 3 BODA, u slučaju da nađe 30 ili više rješenja,
- 2 BODA, u slučaju da nađe 15 ili više rješenja,
- 1 BOD, u slučaju da nađe 5 ili više rješenja.

Napomena 2:

Iz $(m - 2)(n + 2) = 2\,016$ možemo zaključiti i da je $m - 2$ djelitelj broja $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Tada imamo 36 prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju taj uvjet, ali za točno 34 takva prirodna broja m

postoji prirodan broj n za koji je $n = -2 + \frac{2\,016}{m-2}$, tj. za $m - 2 = 2\,016$ i $m - 2 = 1\,008$ broj n nije

prirodan, dok je, u svim ostalim slučajevima, n prirodan broj.

Bodovanje rješenja, u tom je slučaju, u osnovi, istovjetno gore prikazanom.