

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ema je svoje kune razmijenila u banci A.

$$4\,500 : 5 = 900 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$900 \cdot 20 = 18\,000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ema je za 4500 kuna dobila 18 000 grina.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Ana je svoje kune razmijenila u banci B.

$$4\,300 : 100 = 43 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$43 \cdot 420 = 18\,060 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ana je za 4300 kuna dobila 18 060 grina.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ana je platila sladolede.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$18\,060 - 18\,000 = 60 \quad 1 \text{ BOD}$$

Razlika u dobivenim iznosima je 60 grina.

$$60 : 2 = 30 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Cijena jednog sladoleda je 30 grina.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

$$\text{Iz 5. tvrdnje slijedi da je Darko visok 141 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Prema 3. tvrdnji, Jakov i Mate zajedno imaju 272 cm pa je jedan od njih visok 135 cm,} \\ \text{a drugi 137 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz 4. tvrdnje slijedi da je Jakov visok 135 cm,} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{a Mate 137 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz 6. tvrdnje slijedi da je Viktor visok 138 cm ili 142 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz 1. tvrdnje slijedi da je Bruno viši i od Ante i od Lovre pa je visok 138 cm ili 142 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz 2. tvrdnje slijedi da je Bruno visok 138 cm,} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{a Viktor 142 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz 1. tvrdnje slijedi da je Ante visok 132 cm,} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{a Lovre 128 cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

	ANTE	BRUNO	DARKO	JAKOV	LOVRE	MATE	VIKTOR
128 cm	–	–	–	–	+	–	–
132 cm	+	–	–	–	–	–	–
135 cm	–	–	–	+	–	–	–
137 cm	–	–	–	–	–	+	–
138 cm	–	+	–	–	–	–	–
141 cm	–	–	+	–	–	–	–
142 cm	–	–	–	–	–	–	+

1 BOD 2 BODA 1 BOD 2 BODA 1 BOD 1 BOD 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

- a) Prva kućica sastoji se od 6 šibica. 1 BOD
 Za dodavanje svake sljedeće kućice potrebno je dodati 5 šibica. 1 BOD
 Za 55 kućica potrebno je
 $6 + 54 \cdot 5 =$ 2 BODA
 $= 6 + 270$ 1 BOD
 $= 276$ šibica. 1 BOD
- b) Za prvu kućicu trebalo je 6 šibica pa za ostale kućice preostaje $756 - 6 = 750$ šibica. 1 BOD
 Kako je za dodavanje jedne kućice potrebno 5 šibica, može se dodati $750 : 5$ kućica, 1 BOD
 a to je 150 kućica. 1 BOD
 Pomoću 756 šibica može se prikazati 151 kućica. 1 BOD
- UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

- a) Izgradnju počnimo s 1 šibicom.. 1 BOD
 Sada za svaku kućicu treba dodati 5 šibica. 1 BOD
 Za 55 kućica potrebno je
 $1 + 55 \cdot 5 =$ 2 BODA
 $= 1 + 275$ 1 BOD
 $= 276$ šibica. 1 BOD
- b) Nakon prve šibice za kućice preostaje $756 - 1 = 755$ šibica. 1 BOD
 Kako je za dodavanje jedne kućice potrebno 5 šibica, može se prikazati $755 : 5$ kućica. 2 BODA
 Pomoću 756 šibica može se prikazati 151 kućica. 1 BOD
- UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

- a) Među 55 kućica u nizu, 28 su na neparnom, 1 BOD
 a 27 na parnom mjestu. 1 BOD
 Za svaku kućicu na neparnom mjestu potrebno je 6 šibica, a 1 BOD
 za svaku između, na parnom mjestu, potrebne su 4 šibice. 1 BOD
 Ukupno je potrebno:
 $28 \cdot 6 + 27 \cdot 4 =$ 1 BOD
 $= 168 + 108 = 276$ šibica. 1 BOD
- b) Kako za kućice na susjednom parnom i neparnom mjestu treba ukupno 10 šibica, 1 BOD
 od 756 šibica mogu se napraviti ukupno 75 takvih parova, 1 BOD
 odnosno 150 kućica. 1 BOD
 Od 6 preostalih šibica sagrađena je posljednja, 151. kućica. 1 BOD
- UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

- Srpanj ima 31 dan pa će Dora kod bake provesti 31 dan. 1 BOD
 Broj 31 nije moguće podijeliti brojem 3 bez ostatka pa Dora ne može svaki dan čitati.
 Broj 31 nije moguće podijeliti brojem 2 bez ostatka pa Dora ne može svaki dan voziti bicikl. 1 BOD
 Ako Dora planira čitati 1 dan, onda je $31 - 3 \cdot 1 = 28$, $28 : 2 = 14$.
 Bicikl će voziti 14 dana. (1. način) 1 BOD
 Ako Dora planira čitati 2 dana, onda je $31 - 3 \cdot 2 = 25$, $25 : 2 = 12$ i ostatak 1.
 Dora neće čitati 2 dana.

Ako Dora planira čitati 3 dana, onda je $31 - 3 \cdot 3 = 22$, $22 : 2 = 11$.	
Bicikl će voziti 11 dana. (2. način)	1 BOD
Ako Dora planira čitati 4 dana, onda je $31 - 3 \cdot 4 = 19$, $19 : 2 = 9$ i ostatak 1.	
Dora neće čitati 4 dana.	
Ako Dora planira čitati 5 dana, onda je $31 - 3 \cdot 5 = 16$, $16 : 2 = 8$.	
Bicikl će voziti 8 dana. (3. način)	1 BOD
Ako Dora planira čitati 6 dana, onda je $31 - 3 \cdot 6 = 13$, $13 : 2 = 6$ i ostatak 1.	
Dora neće čitati 6 dana.	
Učenik, u nekom trenutku, zaključuje da se broj dana čitanja povećava za 2.	1 BOD
Ako Dora planira čitati 7 dana, onda je $31 - 3 \cdot 7 = 10$, $10 : 2 = 5$.	
Bicikl će voziti 5 dana. (4. način)	1 BOD
Ako Dora planira čitati 9 dana, onda je $31 - 3 \cdot 9 = 4$, $4 : 2 = 2$.	
Bicikl će voziti 2 dana. (5. način)	1 BOD
Ako Dora planira čitati 11 dana, onda je $31 - 3 \cdot 11 = 31 - 33$.	
Dora neće čitati 11 dana ili više od 11 dana.	1 BOD
Dora je mogla na 5 različitih načina isplanirati broj dana čitanja i vožnje bicikla.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Srpanj ima 31 dan pa će Dora kod bake provesti 31 dan.	1 BOD
Broj 31 nije moguće podijeliti brojem 3 bez ostatka pa Dora ne može svaki dan čitati.	
Broj 31 nije moguće podijeliti brojem 2 bez ostatka pa Dora ne može svaki dan voziti bicikl.	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 1 dan, onda je $31 - 2 \cdot 1 = 29$, $29 : 3 = 9$ i ostatak 2.	
Dora neće voziti bicikl 1 dan.	
Ako Dora planira voziti bicikl 2 dana, onda je $31 - 2 \cdot 2 = 27$, $27 : 3 = 9$.	
Čitat će 9 dana. (1. način)	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 3 dana, onda je $31 - 2 \cdot 3 = 25$, $25 : 3 = 8$ i ostatak 1.	
Dora neće voziti bicikl 3 dana.	
Ako Dora planira voziti bicikl 4 dana, onda je $31 - 2 \cdot 4 = 23$, $23 : 3 = 7$ i ostatak 2.	
Dora neće voziti bicikl 4 dana.	
Ako Dora planira voziti bicikl 5 dana, onda je $31 - 2 \cdot 5 = 21$, $21 : 3 = 7$.	
Čitat će 7 dana. (2. način)	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 6 dana, onda je $31 - 2 \cdot 6 = 19$, $19 : 3 = 6$ i ostatak 1.	
Dora neće voziti bicikl 6 dana.	
Ako Dora planira voziti bicikl 7 dana, onda je $31 - 2 \cdot 7 = 17$, $17 : 3 = 5$ i ostatak 2.	
Dora neće voziti bicikl 7 dana.	
Ako Dora planira voziti bicikl 8 dana, onda je $31 - 2 \cdot 8 = 15$, $15 : 3 = 5$.	
Čitat će 5 dana. (3. način)	1 BOD
Učenik, u nekom trenutku, zaključuje da se broj dana vožnje bicikla povećava za 3.	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 11 dana, onda je $31 - 2 \cdot 11 = 9$, $9 : 3 = 3$.	
Čitat će 3 dana. (4. način)	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 14 dana, onda je $31 - 2 \cdot 14 = 3$, $3 : 3 = 1$.	
Čitat će 1 dan. (5. način)	1 BOD
Ako Dora planira voziti bicikl 17 dana, onda je $31 - 3 \cdot 17 = 31 - 51$.	
Dora neće čitati 17 dana ili više od 17 dana.	1 BOD
Dora je mogla na 5 različitih načina isplanirati broj dana čitanja i vožnje bicikla.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Srpanj ima 31 dan pa će Dora kod bake provesti 31 dan. 1 BOD

Kako broj 31 nije niti dvokratnik niti trokratnik nekog prirodnog broja, Dora ne može niti sve dane čitati niti sve dane voziti bicikl. 1 BOD

(**Napomena:** Umjesto ovog obrazloženja, učenik može u tablici početi s planiranim brojem dana čitanja 0.)

Posložimo podatke u tablicu:

<i>Broj dana čitanja</i>	<i>Broj dana vožnje bicikla</i>	<i>Trokratnik broja dana čitanja</i>	<i>Dvokratnik broja dana vožnje bicikla</i>	<i>Ukupno</i>	
1	30	3	60	$3 + 60 = 63$	
1	15	3	30	$3 + 30 = 33$	
1	14	3	28	$3 + 28 = 31$	1 BOD
2	13	6	26	$6 + 26 = 32$	
2	12	6	24	$6 + 24 = 30$	
3	11	9	22	$9 + 22 = 31$	1 BOD
4	10	12	20	$12 + 20 = 32$	
4	9	12	18	$12 + 18 = 30$	
Broj dana čitanja ne može biti paran (jer bi tada udvostručeni broj dana vožnje biciklom morao biti neparan, što je nemoguće jer je svaki broj pomnožen s 2 paran broj).					1 BOD
5	8	15	16	$15 + 16 = 31$	1 BOD
7	5	21	10	$21 + 10 = 31$	1 BOD
9	2	27	4	$27 + 4 = 31$	1 BOD

Kada bi broj dana čitanja bio 11 ili veći od 11, trokratnik bi bio veći od 31. 1 BOD

Dora je mogla na 5 različitih načina isplanirati broj dana čitanja i vožnje bicikla. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Neka je broj dana čitanja n , a broj dana bicikliranja m .

Kada bi broj dana čitanja udvostručila, a broj dana kada vozi bicikl udvostručila, ukupno bi $3n$ dana čitala i $2m$ dana vozila bicikl. 1 BOD

Kako srpanj ima 31 dan, Dora će biti kod bake 31 dan pa vrijedi

$3n + 2m = 31$. 1 BOD

Pribrojnik $2m$ je paran, a zbroj 31 je neparan pa zaključujemo da $3n$ mora biti neparan što znači da je i n neparan. 1 BOD

Odredimo sve mogućnosti za n .

Ako je $n = 1$, tada je $2m = 28$, odnosno $m = 14$. 1 BOD

Ako je $n = 3$, tada je $2m = 22$, odnosno $m = 11$. 1 BOD

Ako je $n = 5$, tada je $2m = 16$, odnosno $m = 8$. 1 BOD

Ako je $n = 7$, tada je $2m = 10$, odnosno $m = 5$. 1 BOD

Ako je $n = 9$, tada je $2m = 4$, odnosno $m = 2$. 1 BOD

Ako je $n \geq 11$, tada je $2m < 0$, što je nemoguće. 1 BOD

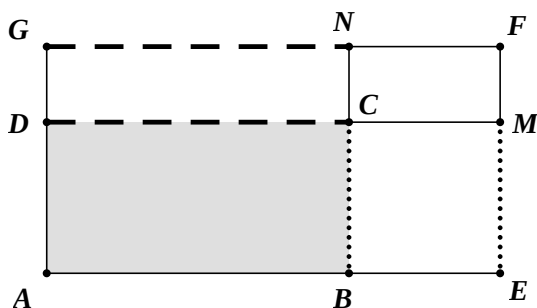
Dora je mogla na 5 različitih načina isplanirati broj dana čitanja i vožnje bicikla. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka pravokutnik $ABCD$ predstavlja staro, a pravokutnik $AEFG$ novo igralište.

Kako je duljina dužine $\overline{GN}$ jednaka duljini dužine $\overline{DC}$ i duljina dužine $\overline{EM}$ jednaka duljini dužine $\overline{BC}$, te dijelove stare ograde Katarina može iskoristiti za novo igralište.

1 BOD

Za ograditi igralište još nedostaje ograde ukupne duljine jednake zbroju duljina dužina $\overline{BE}$, $\overline{MF}$, $\overline{NF}$ i $\overline{DG}$ jer su ostali dijelovi ograđeni starom ogradom.

Također vrijedi: duljina dužine $\overline{NF}$ jednaka duljini dužine $\overline{BE}$ i duljina dužine $\overline{MF}$ jednaka je duljini dužine $\overline{DG}$.

Kako je stranice starog igrališta povećala za pola duljine vrijedi:

Zbroj duljina dužina $\overline{BE}$ i $\overline{NF}$ jednak je duljini dužine $\overline{AB}$ i zbroj duljina dužina $\overline{MF}$ i $\overline{DG}$ jednak je duljini dužine $\overline{AD}$.

1 BOD

Dakle, za novo igralište nedostaje dio ograde jednak zbroju duljine dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, što je jednako polovini opsega zadanog pravokutnika

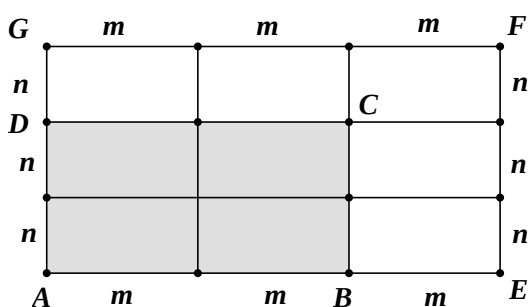
1 BOD

tj. $188 : 2 = 94$ metara.

1 BOD

Podijelimo pravokutnik $AEFG$ na pravokutnike jednakih površina kao na slici.

1 BOD



Površina novog igrališta sastoji se od 9 takvih pravokutnika.

1 BOD

Površina starog igrališta sastoji se od 4 takva pravokutnika, a

1 BOD

površina kojom je povećano staro igralište od 5 takvih pravokutnika.

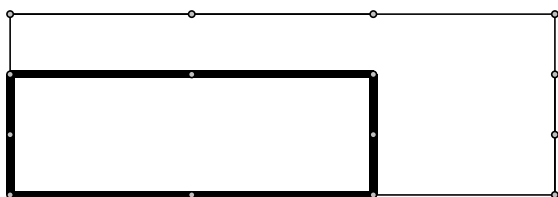
1 BOD

Veća je površina kojom je povećano staro igralište.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

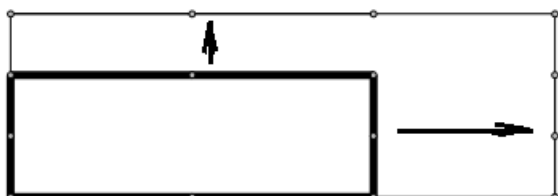


Neka manji pravokutnik predstavlja staro, a veći pravokutnik novo igralište.

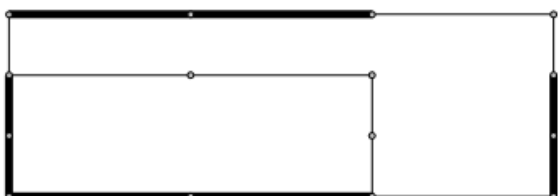
1 BOD

Katarina može dijelove stare ograde pomaknuti na sljedeći način:

1 BOD



(Napomena: Priznaje se bilo koji način koji prikazuje situaciju iz zadatka.)



Kako bi ogradila novo dvorište, nedostaje joj još polovina duljine stare ograde.

1 BOD

$$188 : 2 = 94$$

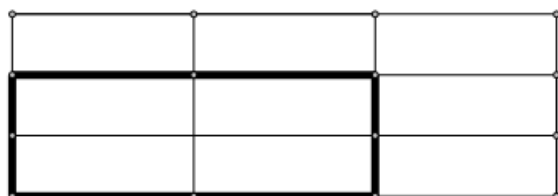
1 BOD

Katarina mora kupiti još 94 metara ograde.

1 BOD

Podijelimo oba igrališta na pravokutnike jednakih površina:

1 BOD



(Napomena: Priznaje se i drugačija podjela koja vodi do točnog zaključka.)

Staro igralište sastoji se od 4 pravokutnika.

1 BOD

Novo igralište sastoji se od 9 pravokutnika.

1 BOD

Površina kojom je povećano staro igralište sastoji se od 5 pravokutnika.

1 BOD

Veća je površina kojom je povećano staro igralište.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ako je učenik do točnog zaključka o odnosu površina došao uvrštavanjem konkretnih duljina stranica koje odgovaraju zadanom opsegu, od **posljednjih** 5 bodova dobiva ukupno 2 BODA.

Napomena 2: Ako je učenik do točnog zaključka o odnosu površina došao uvrštavanjem konkretnih duljina stranica koje ne odgovaraju zadanom opsegu, od **posljednjih** 5 bodova dobiva ukupno 0 BODOVA.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj 72 rastavljen na proste faktore je: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ 1 BOD

Duljine stranica pravokutnika mogu biti:

1 cm i 72 cm 1 BOD

2 cm i 36 cm 1 BOD

3 cm i 24 cm 1 BOD

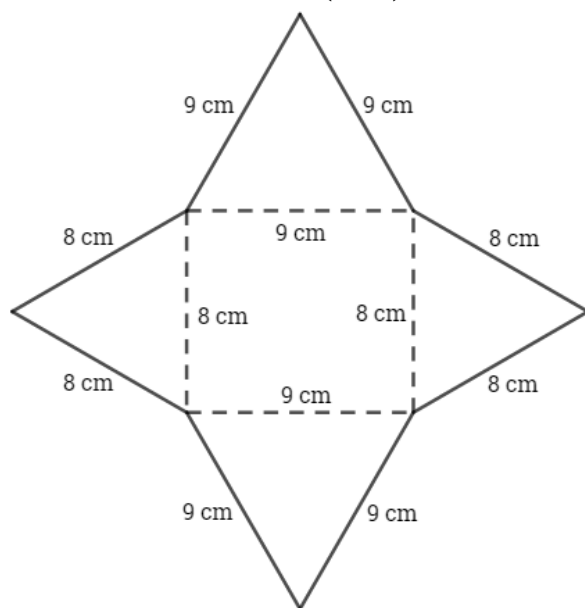
4 cm i 18 cm 1 BOD

6 cm i 12 cm 1 BOD

8 cm i 9 cm 1 BOD

Najmanji opseg ima pravokutnik čije su stranice duljina 8 cm i 9 cm. 1 BOD

Lik nastao na zadani način (skica): 1 BOD



Opseg nastalog lika: $4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 =$
 $= 32 + 36$
 $= 68 \text{ cm}$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Sva tri sporta vole 4 učenika.

Ako 10 učenika voli nogomet i košarku, onda samo nogomet i košarku voli još $10 - 4 = 6$ učenika.

1 BOD

Ako 7 učenika voli košarku i odbojku, onda samo košarku i odbojku vole još $7 - 4 = 3$ učenika.

1 BOD

Ako 5 učenika voli nogomet i odbojku, onda samo nogomet i odbojku voli još $5 - 4 = 1$ učenik.

1 BOD

Do sada nogomet voli $4 + 6 + 1 = 11$ učenika.

Samo nogomet tada vole $14 - 11 = 3$ učenika.

2 BODA

Do sada košarku voli $4 + 6 + 3 = 13$ učenika.

Samo košarku tada voli $18 - 13 = 5$ učenika.

2 BODA

Do sada odbojku voli $4 + 3 + 1 = 8$ učenika.

Samo odbojku tada vole $10 - 8 = 2$ učenika.

2 BODA

$4 + 6 + 3 + 1 + 3 + 5 + 2 = 24$

U 5.a razredu su 24 učenika.

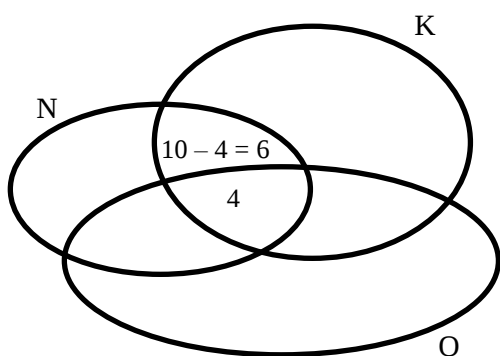
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

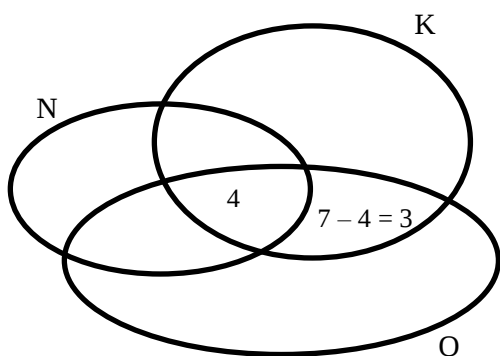
Napomena: Učenik ne mora rješavati navedenim redoslijedom i načinom.

Drugi način:

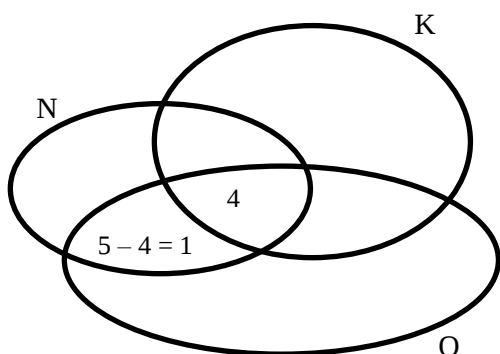
Učenik može skupovno prikazati rješenje zadatka. Rješenje treba bodovati po fazama.



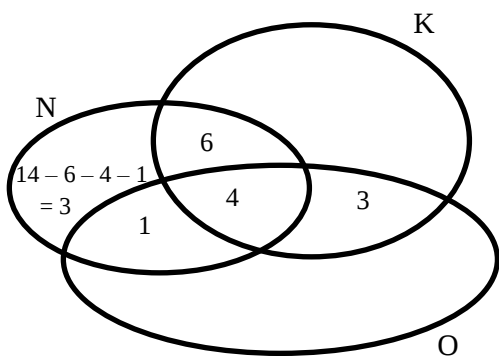
1 BOD



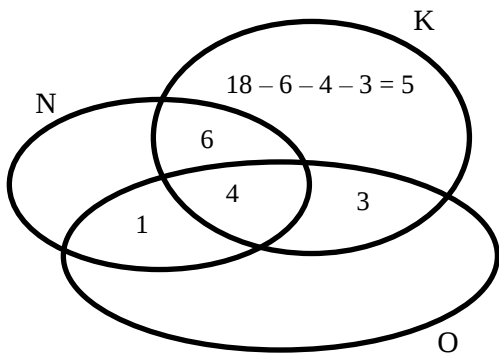
1 BOD



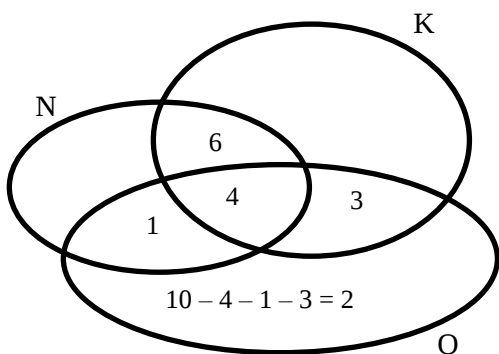
1 BOD



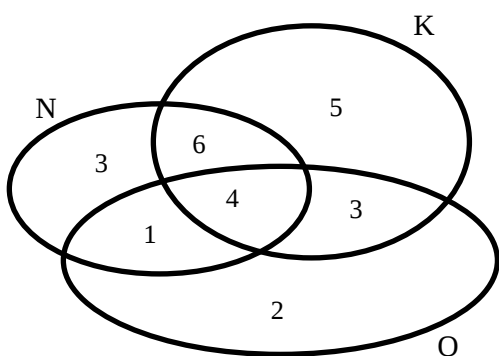
2 BODA



2 BODA



2 BODA



$$3 + 1 + 6 + 4 + 3 + 5 + 2 = 24$$

U 5.a razredu su 24 učenika.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Učenik ne mora rješavati navedenim redoslijedom i načinom.

3. Prvi vlak je imao 3 zaustavljanja u trajanju od 10 minuta što je ukupno $3 \cdot 10 = 30$ minuta. 1 BOD

To znači da je vozio 3 sata i 30 minuta.

1 BOD

Za to vrijeme prvi vlak je prešao:

$$3 \cdot 58 + 58 : 2 =$$

1 BOD

$$= 174 + 29$$

$$= 203 \text{ km}$$

1 BOD

Drugi vlak je imao 2 zaustavljanja u trajanju od 15 minuta što je ukupno

$$2 \cdot 15 = 30 \text{ minuta.}$$

1 BOD

To znači da je vozio 3 sata i 30 minuta.

1 BOD

Za to vrijeme drugi vlak je prešao:

$$3 \cdot 64 + 64 : 2 =$$

1 BOD

$$= 192 + 32$$

$$= 224 \text{ km}$$

1 BOD

$$203 + 224 = 427 \text{ km}$$

1 BOD

Udaljenost mjesta A i mjesta B je 427 km.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Treba izjednačiti mjerne jedinice u zadatku, npr. pretvoriti milimetre u centimetre:

$$60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$$

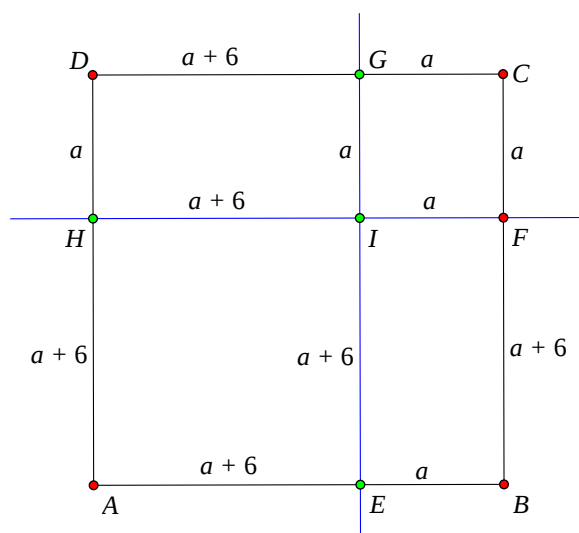
1 BOD

Površina zadanog kvadrata je 400 cm^2 , pa je duljina stranice tog kvadrata 20 cm.

1 BOD

Pravilno skiciran kvadrat i pravci koji ga dijele na dva kvadrata i dva pravokutnika:

1 BOD



Pravilno označene duljine stranica (one mogu biti označene i dvjema različitim oznakama, ali mora biti naznačena veza da je jedna stranica dulja od druge za 6 cm):

1 BOD

(**Napomena:** Navedene oznake mogu biti na skici ili izvan skice.)

Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$a + (a + 6) = 20$$

1 BOD

$$2a = 14 \Rightarrow a = 7 \text{ cm}$$

1 BOD

Za kvadrat AEIH vrijedi:

$$o_1 = 4 \cdot (a + 6) = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$$

1 BOD

Za kvadrat IFCG vrijedi:

$$o_2 = 4 \cdot a = 4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}$$

1 BOD

Iz skice se vidi da pravokutnici HIGD i EBF I imaju odgovarajuće stranice jednakih duljina, pa imaju i jednake opsege.

1 BOD

$$o_3 = o_4 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 13 = 14 + 26 = 40 \text{ cm}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Od rujna 2014. do rujna 2018. prošle su 4 godine.	1 BOD
U tom vremenu ukupan broj godina svih učenika povećao se za $245 - 153 = 92$ godine.	2 BODA
Kako je svaki učenik postao stariji 4 godine, u razredu je $92 : 4 = 23$ učenika.	2 BODA
Da su svi učenici upisali prvi razred sa 7 godina, imali bi zajedno $7 \cdot 23 = 161$ godinu.	2 BODA
Kako su imali 153 godine, onda ih je u školu sa 6 godina krenulo $161 - 153 = 8$ učenika.	2 BODA
Tada je sa sedam godina u školu krenulo $23 - 8 = 15$ učenika.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način

Neka je x broj učenika koji su u 1. razred krenuli sa 6 godina, a y broj učenika koji su u 1. razred krenuli sa 7 godina.	
U rujnu 2014. zbroj njihovih godina bio je 153 pa vrijedi $6x + 7y = 153$.	1 BOD
$6x$ je uvijek paran jer su višekratnici broja 6 parni brojevi, pa $7y$ mora biti neparan jer je zbroj 153 neparan.	2 BODA
Kako $7y$ mora biti neparan, slijedi da y mora biti neparan.	1 BOD
y može biti 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 ili 21 (23 ne može biti jer onda ne bi bilo učenika koji su krenuli sa 6 godina u 1. razred).	1 BOD

$y = 1$	$6x = 146$	146 nije djeljiv brojem 6	
$y = 3$	$6x = 132$	$x = 22$	$132 + 21 + 25 \cdot 4 = 132 + 21 + 100 = 253 > 245$
$y = 5$	$6x = 118$	118 nije djeljiv brojem 6	
$y = 7$	$6x = 104$	104 nije djeljiv brojem 6	
$y = 9$	$6x = 90$	$x = 15$	$90 + 63 + 24 \cdot 4 = 90 + 63 + 96 = 249 > 245$
$y = 11$	$6x = 76$	76 nije djeljiv brojem 6	
$y = 13$	$6x = 62$	62 nije djeljiv brojem 6	
$y = 15$	$6x = 48$	$x = 8$	$48 + 105 + 23 \cdot 4 = 48 + 105 + 92 = \mathbf{245}$
$y = 17$	$6x = 34$	34 nije djeljiv brojem 6	
$y = 19$	$6x = 20$	20 nije djeljiv brojem 6	
$y = 21$	$6x = 6$	$x = 1$	$6 + 147 + 22 \cdot 4 = 6 + 147 + 88 = 241 < 245$

Točno rješavanje četiri slučaja koja daju kao rješenja prirodne brojeve i provjeravanje ostalih:

	4 BODA
2014. godine je u 1. razred 8 učenika krenulo sa 6 godina, a 15 učenika sa 7 godina.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Marko je za knjige i bilježnice potrošio $\frac{4}{15} + \frac{7}{30} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$ svoje ušteđevine. 2 BODA

Preostalo mu je $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ njegove ušteđevine. 1 BOD

Kako $\frac{1}{5}$ njegove ušteđevine iznosi 72 kn, slijedi da je ušteđevina iznosila $72 \cdot 5 = 360$ kn.

3 BODA

Za prvu knjigu platio je $\frac{4}{15} \cdot 360 = 96$ kn, za drugu knjigu $\frac{7}{30} \cdot 360 = 84$ kn,

a za obje knjige zajedno $96 + 84 = 180$ kn.

3 BODA

Za bilježnice je platio $\frac{3}{10} \cdot 360 = 108$ kn.

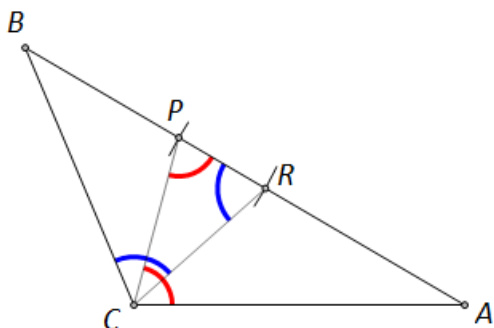
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Kako je $|AC| = |AP|$, trokut APC je jednakokračan.

1 BOD

Tada je $|\angle CPA| = |\angle ACP|$.

1 BOD

Neka je $|\angle CPA| = |\angle ACP| = \alpha$.

Kako je $|BC| = |BR|$, trokut BCR je jednakokračan.

1 BOD

Tada je $|\angle RCB| = |\angle BRC|$.

1 BOD

Neka je $|\angle RCB| = |\angle BRC| = \beta$.

Neka je $|\angle RCP| = x$.

Tada je $\alpha + \beta = 112^\circ + x$.

2 BODA

U trokutu CRP je $\alpha + \beta + x = 180^\circ$.

1 BOD

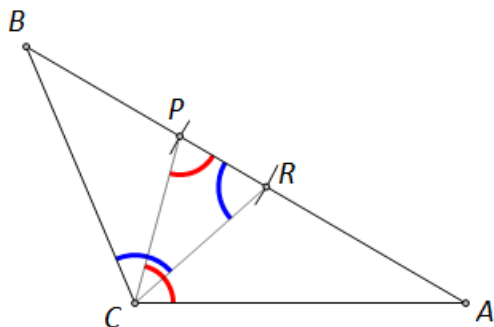
Slijedi:

$$112^\circ + x + x = 180^\circ$$

$2x = 68^\circ$	1 BOD
$x = \angle RCP = 34^\circ$	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Kako je $|AC| = |AP|$, trokut ACP je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle CPA| = |\angle ACP|$. 1 BOD

Neka je $|\angle CPA| = |\angle ACP| = x$.

Kako je $|BC| = |BR|$, trokut BCR je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle RCB| = |\angle BRC|$. 1 BOD

Neka je $|\angle RCB| = |\angle BRC| = y$.

Neka je $|\angle RCP| = z$, $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$.

Kako zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta iznosi 180° , u trokutima ACP i BCR slijedi

$$x = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \quad y = \frac{180^\circ - \beta}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

U trokutu PCR sada vrijedi

$$x + y + z = 180^\circ \text{ odnosno } \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} + z = 180^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

Tada je:

$$\frac{180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta}{2} + z = 180^\circ$$

$$\frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} + z = 180^\circ$$

$$\frac{360^\circ - (180^\circ - 112^\circ)}{2} + z = 180^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

$$146^\circ + z = 180^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, $|\angle RCP| = z = 34^\circ$. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

3. Treba izračunati s koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2\,018 \cdot 2\,019$. 1 BOD

Broj završava sa onoliko nula koliko puta se u rastavu svih brojeva na proste faktore pojavljuje umnožak $2 \cdot 5 = 10$. 1 BOD

Kako je među brojevima manjim od 2 020 više višekratnika broja 2 nego broja 5, očito se u tom zapisu broj 2 pojavljuje više puta nego broj 5. Zato je potrebno prebrojati koliko se puta broj 5 pojavljuje u zapisu cijelog umnoška kao umnoška prostih brojeva. 1 BOD

Faktor 5 se pojavljuje u svim višekratnicima broja 5 barem jednom. Pritom se kod višekratnika broja $5 \cdot 5 = 25$ pojavljuje barem dva puta, kod višekratnika broja $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ barem tri puta. U svakom višekratniku broja $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ manjem od 2 020 faktor 5 se pojavljuje točno četiri puta. Pet puta se ne može pojaviti jer je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$, a taj broj je veći od 2 019. 2 BODA

Višekratnika broja 5 manjih od 2 020 ima 403 jer je $2\,019 : 5 = 403$ i ostatak 4.

Višekratnika broja 25 manjih od 2 020 ima 80 jer je $2\,019 : 25 = 80$ i ostatak 19.

Višekratnika broja 125 manjih od 2 020 ima 16 jer je $2\,019 : 125 = 16$ i ostatak 19.

Višekratnika broja 625 manjih od 2 020 ima 3 jer je $2\,019 : 625 = 3$ i ostatak 144. 3 BODA

Stoga se broj 5 u rastavima na proste faktore svih brojeva iz umnoška pojavljuje $403 + 80 + 16 + 3 = 502$ puta. 1 BOD

Prema tome, umnožak prvih 2 019 prirodnih brojeva završava s 502 nule. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Jednom točkom na pravcu određena su dva polupravca, što znači da n točaka na pravcu određuju $2n$ polupravaca. 2 BODA

Dužina je određena s dvije točke. Prva se točka može odabrati na n načina, a druga na $n - 1$ načina.

Ukupan broj dužina određenih s n točaka na pravcu je $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. 2 BODA

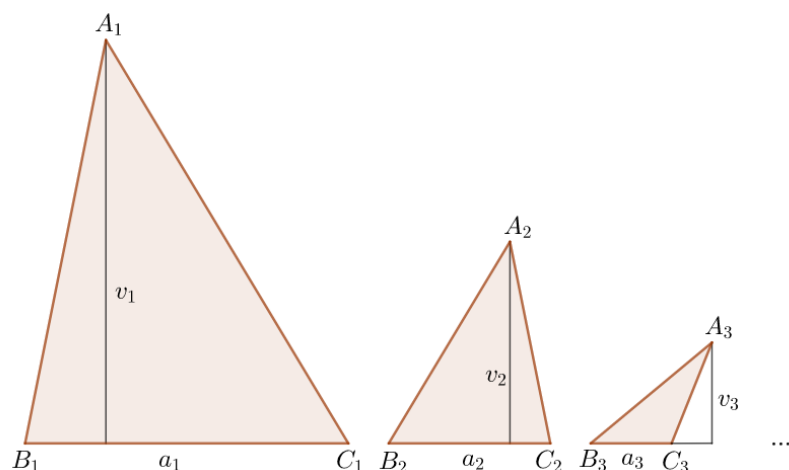
$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 20n \rightarrow n \cdot (n-1) = 40n \rightarrow n-1 = 40 \rightarrow n = 41$ 3 BODA

Na pravac treba smjestiti 41 točku. 1 BOD

One određuju $41 \cdot 40 : 2 = 820$ dužina. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica:



(Napomena: Skica nije nužna i ne boduje se.)

Označimo s a_1 duljinu stranice prvog trokuta, a s v_1 duljinu pripadne visine u prvom trokutu.

Tada je površina tog trokuta $P_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_1$.

Označimo s a_2 duljinu odgovarajuće stranice drugog trokuta, a s v_2 duljinu pripadne visine u

drugom trokutu. Tada je površina tog trokuta $P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot v_2$.

Kako vrijedi $a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1$ i $v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1$, slijedi

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_1 = \frac{1}{4} \cdot P_1.$$

2 BODA

Na isti način zaključujemo

$$P_3 = \frac{1}{4} \cdot P_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot P_1 = \frac{1}{16} \cdot P_1,$$

1 BOD

$$P_4 = \frac{1}{4} \cdot P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot P_1 = \frac{1}{64} \cdot P_1,$$

1 BOD

$$P_5 = \frac{1}{4} \cdot P_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} \cdot P_1 = \frac{1}{256} \cdot P_1,$$

1 BOD

$$P_6 = \frac{1}{4} \cdot P_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256} \cdot P_1 = \frac{1}{1024} \cdot P_1.$$

1 BOD

Vrijedi:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 4\,095$$

$$P_1 + \frac{1}{4} \cdot P_1 + \frac{1}{16} \cdot P_1 + \frac{1}{64} \cdot P_1 + \frac{1}{256} \cdot P_1 + \frac{1}{1024} \cdot P_1 = 4\,095$$

1 BOD

$$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} \right) = 4\,095$$

$$P_1 \cdot \frac{1365}{1024} = 4\,095$$

1 BOD

$$P_1 = 4\,095 \cdot \frac{1024}{1365}$$

$$P_1 = 3\,072 \text{ cm}^2$$

1 BOD

$$P_6 = \frac{1}{1024} \cdot 3\,072 = 3 \text{ cm}^2$$

Površina najvećeg trokuta 3 072 cm², a najmanjeg 3 cm².

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je s t označena duljina tanje i dulje, a s d duljina deblje i kraće svijeće.

Za 1 sat izgorjet će

$$\frac{t}{3.5} = \frac{2}{7}t \text{ dijela dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{5}d \text{ dijela deblje svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Za 2 sata izgorjet će

$$\frac{4}{7}t \text{ dijela dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{2}{5}d \text{ dijela deblje svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Nakon 2 sata gorenja ostat će

$$t - \frac{4}{7}t = \frac{3}{7}t \text{ dulje svijeće i} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$d - \frac{2}{5}d = \frac{3}{5}d \text{ kraće svijeće.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako su nakon 2 sata gorenja duljine jednake, možemo pisati

$$\frac{3}{7}t = \frac{3}{5}d \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{t}{7} = \frac{d}{5}$$

$$\frac{t}{d} = \frac{7}{5} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$t : d = 7 : 5 \quad 1 \text{ BOD}$$

Omjer duljine dulje svijeće prema duljini kraće svijeće je $7 : 5$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Brojevi se općenito mogu birati na dva različita načina:

- a) redoslijed izbora brojeva nije važan;
- b) redoslijed izbora brojeva je važan!

Prvi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$ različitih načina. 2 BODA

Zbroj triju različitih brojeva može biti 6, 9, 12, 15, 18, 21 ili 24. 1 BOD

Ako zbroj brojeva iznosi:

- 6

Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{1, 2, 3\}$.

- 9
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 3, 4\}$.
- 12
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 2, 9\}$, $\{1, 3, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$ i $\{3, 4, 5\}$.
- 15
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 6, 8\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$ i $\{4, 5, 6\}$.
- 18
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
 $\{1, 8, 9\}$, $\{2, 7, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$, $\{3, 7, 8\}$, $\{4, 5, 9\}$, $\{4, 6, 8\}$ i $\{5, 6, 7\}$.
- 21
Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{4, 8, 9\}$, $\{5, 7, 9\}$ i $\{6, 7, 8\}$.
- 24
Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{7, 8, 9\}$. 5 BODOVA

Ukupno ima 30 povoljnih trojki pa je tražena vjerojatnost $p = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako se slijedi ideja ispisivanja trojki kojima je zbroj djeljiv s 3, svakih 6 dobro ispisanih trojki treba bodovati s JEDNIM BODOM.

Pokušaj izračunavanja tražene vjerojatnosti (povoljni / mogući) treba bodovati s JEDNIM BODOM.

Drugi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$ različitih načina. 2 BODA

Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:

(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3,

(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD

Tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: $\{1, 4, 7\}$ ili $\{2, 5, 8\}$ ili $\{3, 6, 9\}$, tj. postoje 3 mogućnosti. 2 BODA

Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 imamo $3^3 = 27$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog s 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3). 3 BODA

Tražena vjerojatnost je $p = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način (redoslijed izbora brojeva je važan):

Broj ukupnih mogućnosti izbora tri različita broja (ako pazimo na njihov redoslijed) je $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. 2 BODA

Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:

(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3;

(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD

Tri broja mogu dati isti ostatak pri dijeljenju brojem 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: $\{1, 4, 7\}$ ili $\{2, 5, 8\}$ ili $\{3, 6, 9\}$. 1 BOD

Budući da je važan poredak brojeva, to je ukupno $3 \cdot 6 = 18$ mogućnosti.

1 BOD

Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 je $3^3 \cdot 6 = 162$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog brojem 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju brojem 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3;

kako je **bitan** poredak, za svaku od dobivenih mogućnosti, postoji $3! = 6$ mogućih permutacija).

3 BODA

Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je u razredu x dječaka. Djevojčica je za 20 % više od tog broja, dakle ima ih $x + 0.2x = 1.2x$.

1 BOD

Iz $x + 1.2x = 22$ slijedi $2.2x = 22$, odnosno $x = 10$.

2 BODA

U razredu je 10 dječaka i 12 djevojčica.

1 BOD

Iz uvjeta zadatka se vidi da u tročlanoj ekipi moraju biti ili dvije djevojčice i jedan dječak ili dva dječaka i jedna djevojčica.

1 BOD

Dvije djevojčice možemo izabrati na $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ načina, a jednog dječaka na 10 načina.

1 BOD

Tročlanu ekipu s dvije djevojčice i jednim dječakom možemo izabrati na $66 \cdot 10 = 660$ načina.

1 BOD

Dva dječaka možemo izabrati na $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ načina, a jednu djevojčicu na 12 načina.

1 BOD

Tročlanu ekipu s dva dječaka i jednom djevojčicom možemo izabrati na $45 \cdot 12 = 540$ načina.

1 BOD

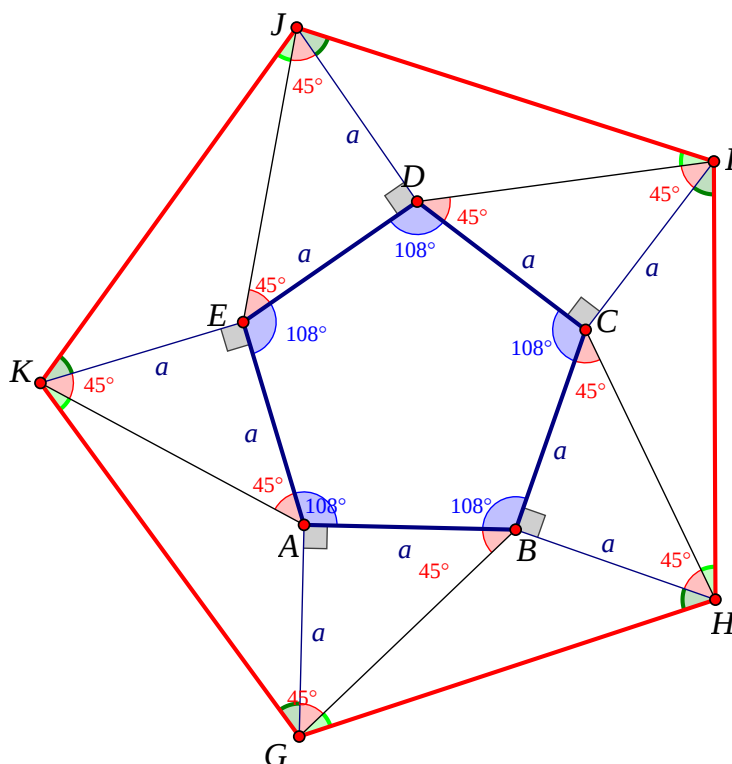
Ukupan broj različitih odabira je $660 + 540 = 1\,200$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica:

1 BOD



Neka je a duljina stranice pravilnog peterokuta $ABCDE$.

Veličine svih unutarnjih kutova pravilnog peterokuta su $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. 1 BOD

Trokuti $\triangle ABG$, $\triangle BCH$, $\triangle CDI$, $\triangle DEJ$ i $\triangle EAK$ su međusobno sukladni jer su to jednakokračni pravokutni trokuti s katetama duljine a . Veličine šiljastih kutova u tim trokutima su 45° . 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi:

$$|GB| = |HC| = |ID| = |JE| = |KA| \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|\angle KAG| = |\angle GBH| = |\angle IDJ| = |\angle JEK| = |\angle HCI| = 360^\circ - (108^\circ + 90^\circ + 45^\circ) = 117^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

Prema poučku S-K-S trokuti $\triangle HBG$, $\triangle ICH$, $\triangle JDI$, $\triangle KEJ$ i $\triangle GAK$ su međusobno sukladni jer imaju po dva para sukladnih stranica i sukladne veličine kutova između tih stranica. 1 BOD

Iz ove sukladnosti slijedi:

$$|GH| = |HI| = |IJ| = |JK| = |KG|, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|\angle BGH| = |\angle CHI| = |\angle DIJ| = |\angle EJK| = |\angle AKG|,$$

$$|\angle GHB| = |\angle HIC| = |\angle IJD| = |\angle JKE| = |\angle KGA|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Gledajući peterokut $GHIJK$, veličina kuta kod svakog od vrhova peterokuta jednaka je zbroju triju sukladnih kutova pa slijedi:

$$|\angle KGH| = |\angle GHI| = |\angle HIJ| = |\angle IJK| = |\angle JKG|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Peterokut $GHIJK$ ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine pa je pravilan. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Iz nejednakosti $x > y > z > 1$ za recipročne vrijednosti brojeva x , y i z vrijedi $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z} < 1$. 1 BOD

Stoga je

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1,$$

$$\text{odnosno } \frac{3}{z} > 1 \Rightarrow z < 3. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako mora biti $z > 1$ i $z < 3$, slijedi da je $z = 2$. 1 BOD

Iz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Nadalje je

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2},$$

$$\text{odnosno } \frac{2}{y} > \frac{1}{2}, \text{ pa je } y < 4. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako mora biti $y > z = 2$ i $y < 4$, slijedi da je $y = 3$. 1 BOD

Iz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{6}.$$

Slijedi da je $x < 6$. 1 BOD

Kako mora biti $x > y = 3$ i $x < 6$, slijedi da x može biti 4 ili 5. 1 BOD

Uređene trojke koje zadovoljavaju zadane uvjete su (4, 3, 2) i (5, 3, 2).

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Obje pogođene trojke, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati sa 6 BODOVA, na način da se dobije po 1 BOD za svaku trojku, 2 BODA za provjeru prve nejednakosti (obje trojke) te 2 BODA za provjeru druge nejednakosti (obje trojke).

Jednu pogođenu trojku, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati s 3 BODA (1 BOD za trojku, 1 BOD za provjeru prve nejednakosti, 1 BOD za provjeru druge nejednakosti).

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$a^2 = (2^{2020} - 2^{2019})^2 = (2^{2020})^2 - 2 \cdot 2^{2020} \cdot 2^{2019} + (2^{2019})^2 =$$

1 BOD

$$= 2^{4040} - 2^{4040} + 2^{4038} = 2^{4038}$$

2 BODA

$$b^2 = (2^{2018} + 2^{2017})^2 = (2^{2018})^2 + 2 \cdot 2^{2018} \cdot 2^{2017} + (2^{2017})^2 =$$

1 BOD

$$= 2^{4036} + 2^{4036} + 2^{4034} = 2 \cdot 2^{4036} + 2^{4034} = 2^{4037} + 2^{4034}$$

2 BODA

$$c^2 = (2^{2019} + 2^{2017})^2 = (2^{2019})^2 + 2 \cdot 2^{2019} \cdot 2^{2017} + (2^{2017})^2 =$$

1 BOD

$$= 2^{4038} + 2^{4037} + 2^{4034}$$

2 BODA

Budući da vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 2^{4038} + 2^{4037} + 2^{4034} = c^2, \text{ trokut je pravokutan.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$$a = 2^{2017} \cdot (2^3 - 2^2) = 2^{2017} \cdot (8 - 4) = 4 \cdot 2^{2107}$$

2 BODA

$$b = 2^{2017} \cdot (2^1 + 1) = 2^{2017} \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2^{2107}$$

2 BODA

$$c = 2^{2017} \cdot (2^2 + 1) = 2^{2017} \cdot (4 + 1) = 5 \cdot 2^{2107}$$

2 BODA

Tada je:

$$a^2 = (4 \cdot 2^{2017})^2 = 16 \cdot 2^{4034}$$

1 BOD

$$b^2 = (3 \cdot 2^{2017})^2 = 9 \cdot 2^{4034}$$

1 BOD

$$c^2 = (5 \cdot 2^{2017})^2 = 25 \cdot 2^{4034}$$

1 BOD

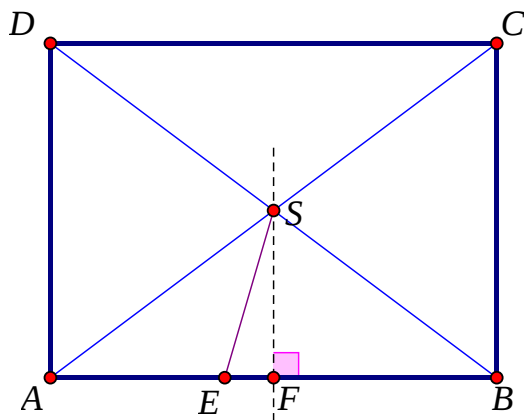
Budući da vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 16 \cdot 2^{4034} + 9 \cdot 2^{4034} = 25 \cdot 2^{4034} = (5 \cdot 2^{2017})^2 = c^2, \text{ trokut je pravokutan.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



Skica (s nacrtanom točkom F, polovištem stranice $\overline{AB}$):

1 BOD

Za pravokutni trokut $\triangle EFS$ vrijedi Pitagorin poučak:

$$|ES|^2 = |EF|^2 + |FS|^2 (*)$$

1 BOD

Vrijedi $|FS| = \frac{1}{2}|BC| = 6 \text{ cm}$. 1 BOD

Ako označimo $|AE| = |ES| = x$, tada vrijedi:

$$|EF| = |AF| - |AE| = \frac{1}{2}|AB| - |AE| = 8 - x. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dobiveno uvrstimo u (*) i računamo:

$$x^2 = (8 - x)^2 + 6^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x^2 = 64 - 16x + x^2 + 36 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$16x = 100$$

$$x = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Tada je i $|AE| = 6.25 \text{ cm}$. 1 BOD

U trokutu $\triangle AES$ poznate su duljina stranice $\overline{AE}$ i duljina visine $\overline{FS}$ na tu stranicu.

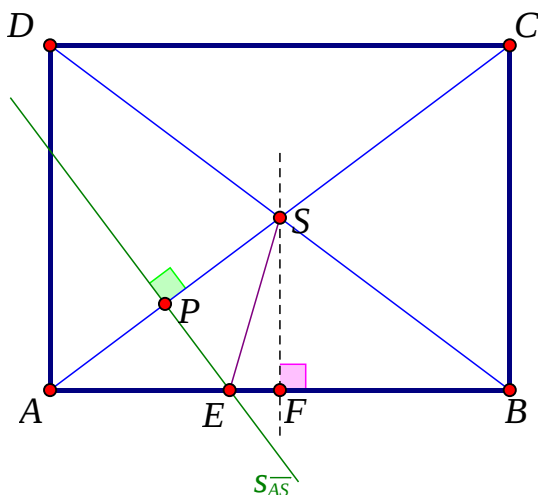
$$\text{Površina je } P = \frac{|AE| \cdot |FS|}{2} = \frac{6.25 \cdot 6}{2} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina trokuta $\triangle AES$ jednaka je $P = 18.75 \text{ cm}^2$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica (potpuna): 1 BOD



Primjenom Pitagorinog poučka, na pravokutan trokut $\triangle ABC$ možemo izračunati duljine dijagonala.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$$

$$|AC| = 20 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Točka S je sjecište dijagonala, pa je onda $|AS| = \frac{1}{2}|AC| = 10 \text{ cm}$.

Točka E jednako je udaljena od točaka A i S, što znači da točka E pripada simetrali s_{AS} dužine $\overline{AS}$.

Simetrala s_{AS} i dužina $\overline{AS}$ sijeku se u točki P. Točka P je polovište dužine $\overline{AS}$.

Tada je $|AP| = \frac{1}{2}|AS| = 5 \text{ cm}$. 1 BOD

Prema K-K poučku vrijedi $\triangle AEP \sim \triangle ABC$ (jedan pravi kut i jedan zajednički kut u vrhu A).

Iz sličnosti slijedi:

$$|AP| : |AB| = |AE| : |AC| \quad 1 \text{ BOD}$$

$$5 : 16 = |AE| : 20 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|AE| = \frac{5 \cdot 20}{16} = \frac{25}{4} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|AE| = 6.25 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Vrijedi $|FS| = \frac{1}{2}|BC| = 6 \text{ cm}$. 1 BOD

U trokutu $\triangle AES$ znamo duljinu stranice $\overline{AE}$ i duljinu visine $\overline{FS}$ na tu stranicu.

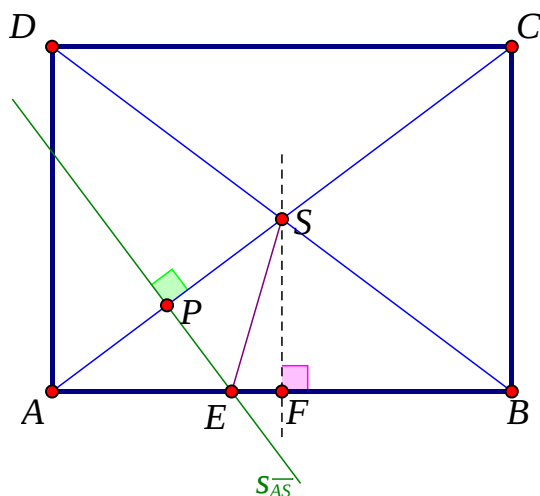
$$\text{Površina je } P = \frac{|AE| \cdot |FS|}{2} = \frac{6.25 \cdot 6}{2} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina trokuta $\triangle AES$ jednaka je $P = 18.75 \text{ cm}^2$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Skica (potpuna): 1 BOD



Primjenom Pitagorinog poučka, na pravokutan trokut $\triangle ABC$ možemo izračunati duljine dijagonala.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$$

$$|AC| = 20 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Točka S je sjecište dijagonala, pa je onda $|AS| = \frac{1}{2}|AC| = 10 \text{ cm}$.

Točka E jednako je udaljena od točaka A i S, što znači da točka E pripada simetrali $s_{\overline{AS}}$ dužine $\overline{AS}$.

Simetrala $s_{\overline{AS}}$ i dužina $\overline{AS}$ sijeku se u točki P. Točka P je polovište dužine $\overline{AS}$.

Tada je $|AP| = \frac{1}{2}|AS| = 5 \text{ cm}$. 1 BOD

Prema K-K poučku vrijedi $\triangle AEP \sim \triangle ABC$ (jedan pravi kut i jedan zajednički kut u vrhu A).

Iz sličnosti slijedi:

$$|AP| : |AB| = |AE| : |AC| \quad 1 \text{ BOD}$$

$$5 : 16 = |AE| : 20 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|AE| = \frac{5 \cdot 20}{16} = \frac{25}{4} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|AE| = 6.25 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut $\triangle EPA$ računamo:

$$|EP|^2 = |AE|^2 - |AP|^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 - 5^2 = \frac{625}{16} - 25 = \frac{225}{16}$$

$$|EP| = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina trokuta $\triangle AES$ dvostruko je veća od površine trokuta $\triangle AEP$.

$$P_{\triangle AEP} = \frac{|AP| \cdot |EP|}{2} = \frac{5 \cdot 3.75}{2} = 9.375 \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{pa je površina trokuta } \triangle AES \text{ jednaka } P_{\triangle AES} = 2 \cdot P_{\triangle AEP} = 18.75 \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. a) Prvi način:

$$\text{Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je } \frac{30 \cdot 29}{2} = 435. \quad 1 \text{ BOD}$$

Povoljni su oni parovi brojeva koji daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 5.

Među brojevima napisanim na kuglicama označimo:

$$A_0 = \{\text{brojevi koji su djeljivi brojem 5}\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$A_1 = \{\text{brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 1}\} = \{1, 6, 11, 16, 21, 26\}$$

$$A_2 = \{\text{brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 2}\} = \{2, 7, 12, 17, 22, 27\}$$

$$A_3 = \{\text{brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 3}\} = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$

$$A_4 = \{\text{brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 4}\} = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$

U svakom od tih skupova ima 6 brojeva. 1 BOD

Povoljni parovi brojeva su oni koji su izvučeni iz istog skupa.

Broj povoljnih parova brojeva

$$\text{iz skupa } A_0 \text{ jednak je } \frac{6 \cdot 5}{2} = 15,$$

$$\text{iz skupa } A_1 \text{ jednak je } \frac{6 \cdot 5}{2} = 15,$$

$$\text{iz skupa } A_2 \text{ jednak je } \frac{6 \cdot 5}{2} = 15,$$

$$\text{iz skupa } A_3 \text{ jednak je } \frac{6 \cdot 5}{2} = 15,$$

$$\text{iz skupa } A_4 \text{ jednak je } \frac{6 \cdot 5}{2} = 15. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Dakle, ukupan broj povoljnih ishoda jednak je } 5 \cdot 15 = 75. \quad 1 \text{ BOD}$$

Tražena vjerojatnost jednaka je

$$p = \frac{75}{435} = \frac{5}{29}.$$

1 BOD

Drugi način:

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

1 BOD

Prebrojimo sve povoljne ishode:

Broj 1 je u paru s brojevima 6, 11, 16, 21, 26.

Broj 2 je u paru s brojevima 7, 12, 17, 22, 27.

Broj 3 je u paru s brojevima 8, 13, 18, 23, 28,

Broj 4 je u paru s brojevima 9, 14, 19, 24, 29.

Broj 5 je u paru s brojevima 10, 15, 20, 25, 30.

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ parova}$$

Broj 6 je u paru s brojevima 11, 16, 21, 26.

Broj 7 je u paru s brojevima 12, 17, 22, 27.

Broj 8 je u paru s brojevima 13, 18, 23, 28.

Broj 9 je u paru s brojevima 14, 19, 24, 29.

Broj 10 je u paru s brojevima 15, 20, 25, 30.

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ parova}$$

Broj 11 je u paru s brojevima 16, 21, 26.

Broj 12 je u paru s brojevima 17, 22, 27.

Broj 13 je u paru s brojevima 18, 23, 28.

Broj 14 je u paru s brojevima 19, 24, 29.

Broj 15 je u paru s brojevima 20, 25, 30.

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ parova}$$

Broj 16 je u paru s brojevima 21, 26.

Broj 17 je u paru s brojevima 22, 27.

Broj 18 je u paru s brojevima 23, 28.

Broj 19 je u paru s brojevima 24, 29.

Broj 20 je u paru s brojevima 25, 30.

$$5 \cdot 2 = 10 \text{ parova}$$

Broj 21 je u paru s brojem 26.

Broj 22 je u paru s brojem 27.

Broj 23 je u paru s brojem 28.

Broj 24 je u paru s brojem 29.

Broj 25 je u paru s brojem 30.

$$5 \cdot 1 = 5 \text{ parova}$$

2 BODA

Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 75$.

1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$$p = \frac{75}{435} = \frac{5}{29}.$$

1 BOD

Treći način:

Izvlačeći dvije kuglice s brojevima od 1 do 30 moguće je dobiti sljedeće **razlike** djeljive brojem 5:

5, 10, 15, 20 i 25.

1 BOD

Razliku 5 je moguće dobiti kao $6 - 1, 7 - 2, 8 - 3, \dots, 30 - 25$; na 25 načina,

- razliku 10 je moguće dobiti kao $11 - 1, 12 - 2, \dots, 30 - 20$; na 20 načina,
 razliku 15 je moguće dobiti kao $16 - 1, \dots, 30 - 15$; na 15 načina,
 razliku 20 je moguće dobiti kao $21 - 1, \dots, 30 - 10$; na 10 načina,
 razliku 25 je moguće dobiti kao $26 - 1, \dots, 30 - 5$; na 5 načina. 1 BOD
 Ukupan broj izvlačenja dvaju brojeva čija je razlika djeljiva brojem 5 jednak je
 $25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 75$. 1 BOD
 Ukupan broj parova dvoznamenkastih brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. 1 BOD
 Tražena vjerojatnost jednaka je
 $p = \frac{75}{435} = \frac{5}{29}$. 1 BOD

Napomena 1: Zadnji bod treba dodijeliti isključivo ukoliko je rezultat točan.

Napomena 2: Učenici su mogli umjesto parova brojeva prebrojavati uređene parove, u kojima je bitan poredak izvučenih brojeva. Oni će dobiti dvostruko veći broj povoljnih (150), ali i ukupnih (870) događaja, pa će tražena vjerojatnost ostati ista.

Napomena 3: Zadatak se može riješiti i na sljedeći način: ponovo promatrajmo uređene parove, tj. vodimo računa o redoslijedu izvlačenja. S obzirom kako, nakon izbora prvog broja znamo koliki on ostatak daje pri dijeljenju s 5, povoljnih mogućnosti za izbor drugog broja imamo 5 (to su preostalih 5 brojeva koji daju isti ostatak pri dijeljenju s 5), a broj brojeva koji biramo je 29. Kako skupovi $A_0, \dots, A_4$ imaju isti broj elemenata, posve je svejedno koji će broj prvi izabran. Zato je tražena vjerojatnost $\frac{5}{29}$. Ovakav način rješavanja treba priznati kao točan.

b) Prvi način:

- Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. 1 BOD
 Zbroj dvaju brojeva djeljiv je brojem 5 ako vrijedi:
 1. oba broja su djeljiva brojem 5. To su brojevi skupa $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. Dva broja iz tog skupa možemo odabrati na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
 2. jedan broj je oblika $5k + 1$ (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 1), a drugi broj je oblika $5k + 4$ (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 4). To su brojevi 1, 6, 11, 16, 21, 26, odnosno 4, 9, 14, 19, 24, 29. Ukupno imamo $6 \cdot 6 = 36$ takvih parova.
 3. jedan broj je oblika $5k + 2$ (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 2), a drugi broj je oblika $5k + 3$ (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 3). To su brojevi 2, 7, 12, 17, 22, 27, odnosno 3, 8, 13, 18, 23, 28. Ukupno imamo $6 \cdot 6 = 36$ takvih parova. 2 BODA
 Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $15 + 36 + 36 = 87$. 1 BOD
 Tražena vjerojatnost jednaka je
 $p = \frac{87}{435} = \frac{1}{5}$. 1 BOD

Drugi način:

- Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. 1 BOD
 Prebrojimo sve povoljne ishode:
 Broj 1 je u paru s brojevima 4, 9, 14, 19, 24, 29.

Broj 2 je u paru s brojevima 3, 8, 13, 18, 23, 28.

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ parova}$$

Broj 3 je u paru s brojevima 7, 12, 17, 22, 27.

Broj 4 je u paru s brojevima 6, 11, 16, 21, 26.

Broj 5 je u paru s brojevima 10, 15, 20, 25, 30.

Broj 6 je u paru s brojevima 9, 14, 19, 24, 29.

Broj 7 je u paru s brojevima 8, 13, 18, 23, 28.

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ parova}$$

Broj 8 je u paru s brojevima 12, 17, 22, 27.

Broj 9 je u paru s brojevima 11, 16, 21, 26.

Broj 10 je u paru s brojevima 15, 20, 25, 30.

Broj 11 je u paru s brojevima 14, 19, 24, 29.

Broj 12 je u paru s brojevima 13, 18, 23, 28.

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ parova}$$

Broj 13 je u paru s brojevima 17, 22, 27.

Broj 14 je u paru s brojevima 16, 21, 26.

Broj 15 je u paru s brojevima 20, 25, 30.

Broj 16 je u paru s brojevima 19, 24, 29.

Broj 17 je u paru s brojevima 18, 23, 28.

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ parova}$$

Broj 18 je u paru s brojevima 22, 27.

Broj 19 je u paru s brojevima 21, 26.

Broj 20 je u paru s brojevima 25, 30.

Broj 21 je u paru s brojevima 24, 29.

Broj 22 je u paru s brojevima 23, 28.

$$5 \cdot 2 = 10 \text{ parova}$$

Broj 23 je u paru s brojem 27.

Broj 24 je u paru s brojem 26.

Broj 25 je u paru s brojem 30.

Broj 26 je u paru s brojem 29.

Broj 27 je u paru s brojem 28.

$$5 \cdot 1 = 5 \text{ parova}$$

2 BODA

Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $12 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 87$.

1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$$p = \frac{87}{435} = \frac{1}{5}.$$

1 BOD

Treći način:

Izvlačeći dvije kuglice s brojevima od 1 do 30 moguće je dobiti sljedeće zbrojeve djeljive brojem 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 i 55. 1 BOD

Zbroj 5 je moguće dobiti kao $1 + 4$, $2 + 3$; na 2 načina.

Zbroj 10 je moguće dobiti kao $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 5$; na 4 načina.

Zbroj 15 je moguće dobiti kao $1 + 14$, $2 + 13$, ..., $7 + 8$; na 7 načina.

Zbroj 20 je moguće dobiti kao $1 + 19$, $2 + 18$, ..., $9 + 11$; na 9 načina.

Zbroj 25 je moguće dobiti kao $1 + 24$, $2 + 23$, ..., $12 + 13$; na 12 načina.

Zbroj 30 je moguće dobiti kao $1 + 29$, $2 + 28$, ..., $14 + 16$; na 14 načina.

Zbroj 35 je moguće dobiti kao $5 + 30, 6 + 29, \dots, 17 + 18$; na 13 načina.

Zbroj 40 je moguće dobiti kao $10 + 30, 11 + 29, \dots, 19 + 21$; na 10 načina.

Zbroj 45 je moguće dobiti kao $15 + 30, 16 + 29, \dots, 22 + 23$; na 8 načina.

Zbroj 50 je moguće dobiti kao $20 + 30, 21 + 29, \dots, 24 + 26$; na 5 načina.

Zbroj 55 je moguće dobiti kao $25 + 30, 26 + 29, 27 + 28$; na 3 načina.

1 BOD

Ukupan broj izvlačenja dvaju brojeva čiji je zbroj djeljiv brojem 5 jednak je

$$2 + 4 + 7 + 9 + 12 + 14 + 13 + 10 + 8 + 5 + 3 = 87.$$

1 BOD

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$$p = \frac{87}{435} = \frac{1}{5}.$$

1 BOD

Napomena 1: Zadnji bod treba dodijeliti isključivo ukoliko je rezultat točan.

Napomena 2: Učenici su i ovdje mogli umjesto parova brojeva prebrojavati uređene parove, u kojima je bitan poredak izvučenih brojeva. Oni će dobiti dvostruko veći broj povoljnih (174), ali i ukupnih (870) događaja, pa će tražena vjerojatnost ostati ista.

Napomena 3: Zadatak se može riješiti i na sljedeći način: ponovo promatrajmo uređene parove, pri čemu je važan redoslijed izvlačenja brojeva. Za prvi broj su dvije mogućnosti: ili je djeljiv brojem 5 (s vjerojatnošću $\frac{1}{5}$) ili nije (s vjerojatnošću $\frac{4}{5}$), ako je prvi djeljiv brojem 5, onda i drugi mora biti

djeljiv brojem 5 s vjerojatnošću $\frac{5}{29}$. U slučaju da, prvi izvučeni broj daje ostatak k pri dijeljenju

brojem 5, onda će drugi dati ostatak $5 - k$ pri dijeljenju brojem 5 s vjerojatnošću $\frac{6}{29}$. Tražena

vjerojatnost je $p = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{29} + \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{29} = \frac{1}{5}$. Ovakav način rješavanja treba priznati kao točan.

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Rastav broja 120 na proste faktore je $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Dakle, da bi broj bio djeljiv brojem 120, mora biti djeljiv brojem 3, brojem 5 i brojem 8. 1 BOD

Među tri uzastopna prirodna broja točno je jedan djeljiv brojem 3 pa je umnožak tri uzastopna prirodna broja uvijek djeljiv brojem 3.

1 BOD

Neka je prvi od tri uzastopna broja m **paran**.

Tada je i treći broj $(m + 2)$ paran. Jedan od dva uzastopna parna broja djeljiv je brojem 2, a drugi brojem 4, pa je njihov umnožak djeljiv brojem 8.

1 BOD

Djeljivost brojem 5 bit će ispunjena ako je bilo koji od triju brojeva djeljiv brojem 5. To je moguće ako i samo ako prvi ili treći (parni) broj završava znamenkom 0, odnosno ako drugi (neparni) završava znamenkom 5.

U traženim trojkama prvi broj može biti oblika $\overline{ab0}$, treći broj može biti oblika $\overline{cd0}$ ili drugi broj u trojci može biti oblika $\overline{ef5}$.

1 BOD

Dakle, u traženim trojkama prvi broj može biti oblika $\overline{ab0}$, gdje su brojevi a i b bilo koje znamenke iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ pri čemu je znamenka $a \neq 0$, i takvih je brojeva **90**.

Analogno, treći broj može biti oblika $\overline{cd0}$. I tu ima 90 mogućnosti, ali se u prvoj (98, 99, 100) pojavljuju dvoznamenkasti brojevi. Traženih trojki ovog oblika ima **89**.

Dakle, trojki gdje prvi ili treći broj završava znamenkom 0 ima $90 + 89 = 179$. 1 BOD

Drugi broj u trojci može biti oblika $\overline{ef5}$. I takvih trojki ima **90**. 1 BOD

Neka je sada prvi broj m u trojci **neparan**.

Kako je i treći broj $(m + 2)$ neparan, nužno je da drugi broj $(m + 1)$ bude djeljiv brojem 8. 1 BOD

Budući da kombiniramo djeljivost brojem 8 i djeljivost brojem 5, dovoljno je promatrati prvih 40 mogućnosti.

Srednji broj $(m + 1)$ može biti 104, 112, 120, 128 ili 136, no ili on ili njegov neposredni prethodnik ili sljedbenik moraju biti djeljivi brojem 5.

To se događa u tri slučaja: (103, 104, 105), (119, 120, 121) i (135, 136, 137). 1 BOD

Troznamenkastih brojeva ima 900, a iz $900 = 40 \cdot 22 + 20$ slijedi da traženih brojeva ima $22 \cdot 3 = 66$, te još u zadnjih 20 brojeva broj **984**. Traženih trojki ovog oblika ima **67**. 1 BOD

Ukupan broj trojki je $90 + 89 + 90 + 67 = 336$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Zadnji bod se dodjeljuje samo ako je rezultat točan.

Napomena 2: Ispisivanje određenog broja odgovarajućih trojki (naravno ne svih) koje zadovoljavaju uvjete zadatka bez navođenja opće strategije prebrojavanja svih takovih trojki treba vrednovati s 0 BODOVA.

Drugi način:

Učenik koji zaključi da umnožak mora biti djeljiv brojem 3, brojem 8 i brojem 5, da je umnožak tri uzastopna prirodna broja uvijek djeljiv brojem 3, da je umnožak tri uzastopna broja djeljiv brojem 8 ako i samo je ako je prvi broj u umnošku paran ili ako je prvi broj u umnošku neparan, a drugi djeljiv brojem 8, te da je umnožak tri uzastopna broja je djeljiv brojem 5 ako i samo ako m daje ostatke 0, 3 ili 4 pri dijeljenju brojem 5 5 BODOVA

dalje može zaključivati i na sljedeći način:

Iz gore navedenog zaključujemo da je umnožak tri broja djeljiv brojem 120 ako i samo ako daje ostatke 0, 4, 8, 10, 14, 15, 18, 20, 23, 24, 28, 30, 34, 38 ili 39 pri dijeljenju brojem 40.

To znači da za 40 uzastopnih vrijednosti broja m njih točno 15 zadovoljava uvjete zadatka.

Uzevši u obzir uvjet da sva tri broja u umnošku moraju biti troznamenkasta, m može biti prirodan broj između 100 i 997 (uključivo rubne vrijednosti).

Uočimo da 100 daje ostatak 20 pri dijeljenju brojem 40 i da 997 daje ostatak 37 pri dijeljenju brojem 40. Dakle, za vrijednosti broja m od 100 do 979 (uključivo rubne vrijednosti) imamo ukupno 22 skupa 40 uzastopnih prirodnih brojeva te ukupno $22 \cdot 15 = 330$ brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka, dok za vrijednosti m između 980 i 997 (uključivo rubne vrijednosti), ostaci broja m pri dijeljenju brojem 40 su između 20 i 37 (uključivo rubne vrijednosti) i imamo 6 brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

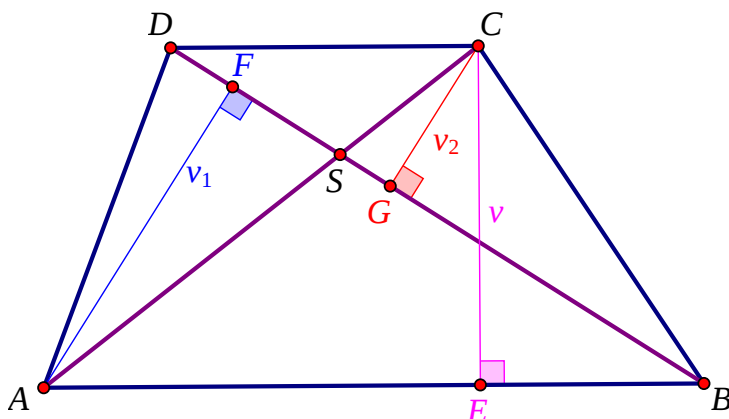
To znači da traženih trojki ima $330 + 6 = 336$. 5 BODOVA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: U slučaju ovakvog načina rješavanja, bodovanje s zadnjih 5 BODOVA mora biti usklađeno s bodovnom shemom iz prvog načina rješavanja.

5. Skica:

1 BOD



Površine trokuta $\triangle ABD$ i $\triangle ABC$ su jednake (trokuti imaju zajedničku stranicu $\overline{AB}$, i visinu v , koja je i visina trapeza). Dakle, vrijedi: $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC}$.

Promotrimo trokute $\triangle ASD$ i $\triangle BCS$. Za njihove površine vrijedi:

$$P_{\triangle ASD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle BCS}, \quad 1 \text{ BOD}$$

tj. trokuti $\triangle ASD$ i $\triangle BCS$ imaju jednake površine: $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BCS} = P_3$. 1 BOD

Trokuti $\triangle ASD$ i $\triangle ABS$ imaju zajedničku visinu iz vrha A duljine v_1 pa možemo površine trokuta zapisati kao:

$$P_{\triangle ASD} = P_3 = \frac{|SD| \cdot v_1}{2} \text{ i } P_{\triangle ABS} = P_1 = \frac{|SB| \cdot v_1}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Slijedi da je $P_3 : P_1 = |SD| : |SB|$. 1 BOD

Trokuti $\triangle CDS$ i $\triangle BCS$ imaju zajedničku visinu iz vrha C duljine v_2 pa površine trokuta možemo zapisati kao:

$$P_{\triangle CDS} = P_2 = \frac{|SD| \cdot v_2}{2} \text{ i } P_{\triangle BCS} = P_3 = \frac{|SB| \cdot v_2}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Slijedi da je $P_2 : P_3 = |SD| : |SB|$. 1 BOD

Dakle,

$$P_3 : P_1 = P_2 : P_3 \Rightarrow P_3^2 = P_1 \cdot P_2 \Rightarrow P_3 = \sqrt{P_1 \cdot P_2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina trapeza $ABCD$ jednaka je:

$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle ABS} + P_{\triangle CDS} + P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BCS} = P_1 + P_2 + 2 \cdot P_3 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} = \\ &= (\sqrt{P_1})^2 + (\sqrt{P_2})^2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} = (\sqrt{P_1})^2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} + (\sqrt{P_2})^2 = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2. \end{aligned} \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA