

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

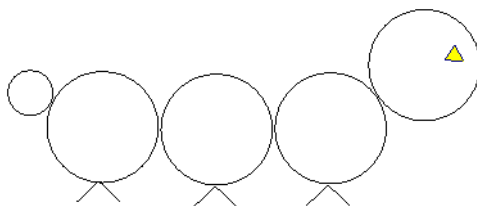
1. Prvi način:

$$\begin{aligned} 52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145) &= \\ = 52328 - 14 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot 0 & \quad 2 \text{ BODA} \\ (1 \text{ BOD za količnik, 1 BOD za zagradu}) & \\ = 52328 - 14 + 5320 \cdot (8 + 2) + 0 & \quad 3 \text{ BODA} \\ (2 \text{ BODA za distributivnost, 1 BOD za umnožak s nulom}) & \\ = 52328 - 14 + 5320 \cdot 10 & \quad 2 \text{ BODA} \\ = 52328 - 14 + 53200 & \quad 1 \text{ BOD} \\ = 52314 + 53200 & \quad 1 \text{ BOD} \\ = 105514 & \quad 1 \text{ BOD} \\ \dots\dots\dots \text{UKUPNO 10 BODOVA} \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned} 52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145) &= \\ = 52328 - 14 + (5320 \cdot 8 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot 0 & \quad 2 \text{ BODA} \\ (1 \text{ BOD za količnik, 1 BOD za zagradu}) & \\ = 52328 - 14 + (42560 + 10640) + 0 & \quad 3 \text{ BODA} \\ (\text{po 1 BOD za umnoške u zagradi, 1 BOD za umnožak s nulom}) & \\ = 52328 - 14 + 53200 & \quad 3 \text{ BODA} \\ = 52314 + 53200 & \quad 1 \text{ BOD} \\ = 105514 & \quad 1 \text{ BOD} \\ \dots\dots\dots \text{UKUPNO 10 BODOVA} \end{aligned}$$

2.



Neka je CCZPŽ oznaka za bojanje gusjenice redom bojama crvena, crvena, zelena, plava i žuta.
Mogući načini bojanja su: CCZPŽ, CCZŽP, CCPŽŽ, CCPŽZ, CCŽZP, CCŽPZ,
PCCZŽ, PCCŽZ, PZCCŽ, PŽCCZ, PŽZCC, PŽZCC,
ZCCPŽ, ZCCŽP, ZPCCŽ, ŽZCCP, ZPŽCC, ŽŽPCC,
ŽCCPZ, ŽCCZP, ŽPCCZ, ŽZCCP, ŽPZCC i ŽŽPCC. 8 BODOVA
(za svaka tri točna bojanja 1 BOD)
Bojanje gusjenice uz zadane uvjete može se učiniti na 24 načina. 2 BODA
UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik ispisivanjem načina bojanja pokazao razumijevanje uvjeta i ispisao 16 ili više načina, treba mu (uz točno prebrojavanje) dati proporcionalan broj bodova.

3. To su brojevi: 900,

801, 810,
702, 720, 711,
603, 630, 612, 621,
504, 540, 513, 531, 522,
405, 450, 414, 441, 423, 432,
306, 360, 315, 351, 324, 342, 333,
207, 270, 216, 261, 225, 252, 234, 243,
108, 180, 117, 171, 126, 162, 135, 153, 144.

9 BODOVA

Takvih brojeva ima 45.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svakih 5 točno ispisanih brojeva bodovati s JEDNIM BODOM.

4. Prvi način:

Najmanje je posađeno topola pa s

T

 označimo broj topola posađenih u akciji pošumljavanja.

1 BOD

Kako je broj topola jednak polovini broja posađenih breza, onda je broj posađenih breza dvostruko veći od broja posađenih topola tj. broj posađenih breza možemo označiti s:

T	T
---	---

1 BOD

Broj hrastova je tri puta veći od broja breza pa broj hrastova možemo označiti s:

T	T	T	T	T	T
---	---	---	---	---	---

1 BOD

Kako je javora posađeno 14 više od hrastova, njihov broj označimo s:

T	T	T	T	T	T	14
---	---	---	---	---	---	----

1 BOD

Ukupan broj tj. 209 posađenih stabala možemo prikazati s:

T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

1 BOD

Kako je $209 - 14 = 195$, a $195 : 15 = 13$, zaključujemo da je broj posađenih topola 13. 2 BODA

Konačno, broj posađenih breza je $2 \cdot 13 = 26$, hrastova $3 \cdot 26 = 78$, a javora $78 + 14 = 92$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Najmanje je posađeno topola pa s x označimo broj topola posađenih u akciji pošumljavanja.

1 BOD

Kako je broj topola jednak polovini broja posađenih breza, onda je broj posađenih breza dvostruko veći od broja posađenih topola tj. broj posađenih breza je $2x$.

1 BOD

Broj hrastova je tri puta veći od broja breza pa je broj hrastova $6x$.

1 BOD

Kako je javora posađeno 14 više od hrastova, njihov je broj $6x + 14$.

1 BOD

Ukupan broj posađenih stabala je 209 pa vrijedi:

$$x + 2x + 6x + 6x + 14 = 209, \text{ odnosno:}$$

1 BOD

$$15x + 14 = 209.$$

Kako je $209 - 14 = 195$, onda je $15x = 195$.

1 BOD

$195 : 15 = 13$ pa je $x = 13$. Broj posađenih topola je 13.

1 BOD

Konačno, broj posađenih breza je $2 \cdot 13 = 26$, hrastova $3 \cdot 26 = 78$, a javora $78 + 14 = 92$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. a) Na slici je moguće izbrojiti sljedeće kvadrate:



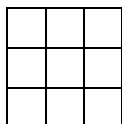
9 kvadrata površine 1 cm^2 ,

1 BOD



4 kvadrata površine 4 cm^2 ,

1 BOD



1 kvadrat površine 9 cm^2 .

1 BOD

Zbroj površina svih kvadrata je $9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 34 \text{ cm}^2$.

2 BODA

b) Pravokutnika koji nisu kvadrati ima:



6 pravokutnika površine 2 cm^2 ,



6 pravokutnika površine 2 cm^2 ,

1 BOD

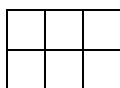


3 pravokutnika površine 3 cm^2 ,

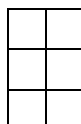


3 pravokutnika površine 3 cm^2 ,

1 BOD



2 pravokutnika površine 6 cm^2 ,



2 pravokutnika površine 6 cm^2 .

1 BOD

Zbroj površina svih pravokutnika koji nisu kvadrati je $12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 66 \text{ cm}^2$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način: Neka je prvi dan pročitao x stranica knjige.

1. dan: x stranica

2. dan: $x + 8$ stranica

3. dan: $(x + 8) + 15 = x + 23$ stranice

4. dan: $x + x$ stranica

5. dan: $x + x + 8$ stranica

3 BODA

Vrijedi jednačba:

$$x + x + 8 + x + 23 + x + x + x + x + 8 = 200$$

1 BOD

Pojednostavljivanjem dobivamo:

$$7x = 200 - 39,$$

$$x = 161 : 7,$$

$$x = 23.$$

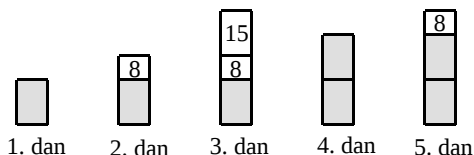
3 BODA

Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige.

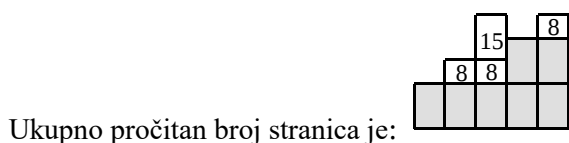
3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Označimo li s  broj stranica pročitanih prvog dana, za ostale dane vrijedi:



3 BODA



1 BOD

Zaključujemo da  vrijedi:

$$200 - (8 + 8 + 8 + 15) = 200 - 39 = 161,$$

2 BODA

tj. da  vrijedi $161 : 7 = 23$.

1 BOD

Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

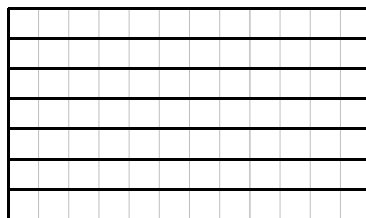
2. Broj je djeljiv brojem 72, ako je djeljiv i brojem 8 i brojem 9. 1 BOD
 Znamenke a, b, c i d mogu imati vrijednost 2, 3, 5 i 7. 1 BOD
 Tada je $2 + 3 + 5 + 7 = 17$. 1 BOD
 Da bi broj bio djeljiv brojem 9, mora biti $x = 1$. 1 BOD
 Broj $\overline{1abcd}$ je djeljiv brojem 8, pa samim tim i brojem 2. To jedino vrijedi za $d = 2$. 1 BOD
 Da bi broj bio djeljiv brojem 8, troznamenkasti završetak $\overline{bc2}$ mora biti djeljiv brojem 8, pri čemu b i c mogu imati vrijednost 3, 5 ili 7. 1 BOD
 Postoji 6 mogućnosti: 352, 372, 532, 572, 732 i 752. 1 BOD
 Dijeljenjem brojem 8 provjeri se da djeljivost vrijedi samo za 352 i 752. 1 BOD
 Za 352 je $a = 7$, a za 752 je $a = 3$. 1 BOD
 Postoje dva tražena broja: 13 752 i 17 352. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Provjera djeljivosti brojem 9 i otkrivanje prve znamenke broja može se napraviti i nakon određivanja četveroznamenkastog završetka broja.

3. Površina pravokutne ploče 7×12 jednaka je $7 \cdot 12 = 84$. 1 BOD
 Kako bismo je popločali sa 7 sukladnih pravokutnika, površina svakog od tih pravokutnika mora biti jednaka 12. 2 BODA
 Dimenzije pravokutnika čije su duljine prirodni brojevi mogu biti samo jedne od sljedećih: 1×12 , 2×6 ili 3×4 . 2 BODA

Pravokutnicima dimenzija 1×12 možemo popločati ploču dimenzija 7×12 , jer 7 takvih pravokutnika možemo složiti jednog do drugog, kao na slici:

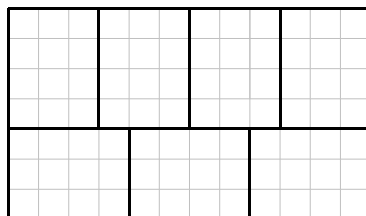


Međutim, stranice tih pravokutnika nisu prirodni brojevi veći od jedan, pa to nije rješenje. 1 BOD

Popločavanje dimenzije pravokutnika 2×6 nije moguće jer se takvim pravokutnicima može popločiti samo ploča kojoj su širina i dužina parni brojevi, a naša ploča nije takva. 2 BODA

Pravokutnicima dimenzija 3×4 možemo popločati ploču 7×12 , jer ih možemo složiti tako da 4 stavimo jednog do drugog po duljini ploče, a preostala 3 okomito na njih, kao na slici:

2 BODA



..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Za popločavanje pravokutnicima dimenzija 3×4 učenik mora dati primjer, ali taj je primjer dovoljno ili nacrtati ili opisati riječima (nije potrebno oboje).

Napomena 2: Učenici mogu pokazati da popločavanje pravokutnicima dimenzija 2×6 nije moguće i na neki drugačiji način od gore navedenog, a svaki ispravan način zaključivanja da takve dimenzije nisu moguće treba, kao i u gornjem slučaju, bodovati s 2 BODA.

4. Prvi način:

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.

To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.

U ulici ima $21 \cdot 3 = 63$ kuće s parnim i $21 \cdot 2 = 42$ kuće s neparnim kućnim brojem. 3 BODA

S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126.

Dakle, 4 su kuće s jednoznamenkastim brojevima (od 2 do 8),

45 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 10 do 98),

te 14 kuća s troznamenkastim brojevima (od 100 do 126).

Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 136$ znamenaka. 3 BODA

S neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83.

Dakle, 5 je kuća s jednoznamenkastim brojevima (od 1 do 9),

a 37 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 11 do 83).

Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $5 \cdot 1 + 37 \cdot 2 = 79$ znamenaka. 3 BODA

Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $136 + 79 = 215$ znamenaka. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.

To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.

1 BOD

S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126, a s neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83.

1 BOD

Do broja 84 pojavljuju se svi prirodni brojevi redom, a od 86 do 126 samo parni.

1 BOD

Za prvih 9 jednoznamenkastih prirodnih brojeva upotrijebljeno je $9 \cdot 1 = 9$ znamenaka.

1 BOD

Za dvoznamenkaste brojeve od 10 do 84 upotrijebljeno je $75 \cdot 2 = 150$ znamenaka.

2 BODA

Za parne brojeve 86, 88, 90, 92, 94, 96 i 98 upotrijebljeno je $7 \cdot 2 = 14$ znamenaka.

1 BOD

Za troznamenkaste parne brojeve 100, 102, ..., 126 upotrijebljeno je $14 \cdot 3 = 42$ znamenke.

2 BODA

Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $9 + 150 + 14 + 42 = 215$ znamenaka.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Zbroj umnožaka u 1. retku / 1. stupcu jednak je

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78.$$

2 BODA

Zbroj umnožaka u 2. retku / 2. stupcu je

$$2 + 4 + 6 + \dots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78.$$

2 BODA

Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku / 3. stupcu je $3 \cdot 78$ i dalje redom do $12 \cdot 78$.

3 BODA

Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima / stupcima je

$$78 + 2 \cdot 78 + 3 \cdot 78 + \dots + 10 \cdot 78 + 11 \cdot 78 + 12 \cdot 78 =$$

$$= 78 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12)$$

2 BODA

$$= 78 \cdot 78 = 6084.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Zbroj umnožaka u 1. retku je

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78.$$

2 BODA

Zbroj umnožaka u 2. retku je

$$2 + 4 + 6 + \dots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78 = 156.$$

2 BODA

Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku je $3 \cdot 78 = 234$, u 4. retku 312,

u 5. retku 390, u 6. retku 468, u 7. retku 546, u 8. retku 624,

u 9. retku 702, u 10. retku 780, u 11. retku 858 i u 12. retku 936.

5 BODOVA

(po 1 BOD za dva zbroja)

Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima je

$$78 + 156 + 234 + 312 + 390 + 468 + 546 + 624 + 702 + 780 + 858 + 936 = 6084.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Broj ptica u jatu označimo s x .

$$\text{Onda je } \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x. \quad 4 \text{ BODA}$$

$$\text{Dalje, } \frac{3x+5x}{15} + 3 \cdot \frac{5x-3x}{15} + 1 = x, \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{odnosno } \frac{8x}{15} + \frac{6x}{15} + 1 = x. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Slijedi: } \frac{14x}{15} + 1 = x. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Oдавde slijedi da je } \frac{1}{15}x = 1, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odnosno } x = 15. \text{ U jatu je bilo 15 ptica.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Broj ptica u jatu označimo s x .

Prvo stablo

Drugo stablo

Treće stablo

$$\frac{1}{5}x$$

$$\frac{1}{3}x$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) = 3 \cdot \frac{2}{15}x$$

4 BODA

(1 BOD)

(1 BOD)

(1 BOD)

(1 BOD)

$$\text{Onda je } \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 1 = x. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{Dalje je } \frac{14}{15}x + 1 = x. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{Oдавde slijedi da je } \frac{1}{15}x = 1, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odnosno } x = 15. \text{ U jatu je bilo 15 ptica.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

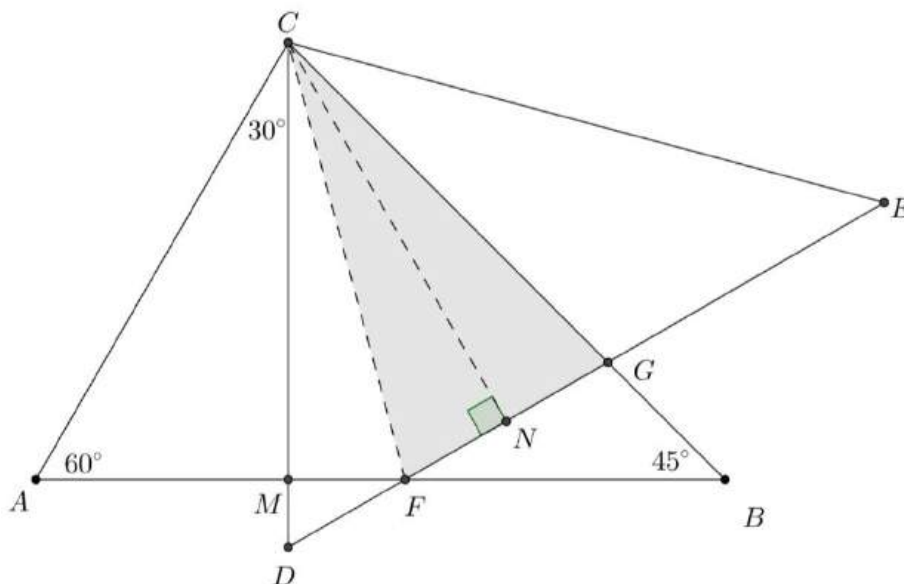
Na prvo stablo sletjela je $\frac{1}{5}$ jata, a na drugo $\frac{1}{3}$ jata.

$$\text{Razlika između ta dva dijela jata iznosi } \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \text{ jata.} \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{Trostruka razlika iznosi } 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \text{ jata.} \quad 1 \text{ BOD}$$

- Na treće stablo sletjelo je, dakle, $\frac{2}{5}$ jata. 1 BOD
- Na sva tri stabla zajedno sletjelo je $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3+5+6}{15} = \frac{14}{15}$ jata. 3 BODA
- Preostala je jedna ptica u zraku, a ona predstavlja $1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}$ jata. 2 BODA
- Dakle, u jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD
- UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



- Kut $\angle AMD$ je pravi kut, tj. $|\angle AMD| = 90^\circ$. 1 BOD
- Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{DE}$.
- Veličina kuta $\angle NCM$ iznosi $|\angle NCM| = 30^\circ$ (slijedi iz $\triangle DNC$, jer je $|\angle CDE| = 60^\circ$). 1 BOD
- Veličina kuta $\angle GCN$ iznosi $|\angle GCN| = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ (slijedi iz $\triangle BMC$, $|\angle BCM| = 45^\circ$). 1 BOD
- Veličina kuta $\angle FGC$ iznosi $|\angle FGC| = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. 1 BOD
- Veličina kuta $\angle CGE$ iznosi $|\angle CGE| = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = |\angle BGF|$. 1 BOD
- Veličina kuta $\angle GFB$ iznosi $|\angle GFB| = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$. 1 BOD
- Veličina kuta $\angle MFN$ iznosi $|\angle MFN| = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
- Trokuti AMC i DNC su sukladni (KSK ili SSK[>]), pa je $|MC| = |NC|$. 1 BOD
- Trokuti MFC i FNC su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC| = |NC|$, pa su sukladni po poučku SSK[>]). 1 BOD
- Stoga veličina kuta $\angle CFG$ iznosi $|\angle CFG| = 150^\circ : 2 = 75^\circ$. 1 BOD
- Nasuprot sukladnih kutova $\angle FGC$ i $\angle CFG$ su sukladne stranice, odnosno $|CF| = |CG|$, pa je trokut CFG jednakokračan. 1 BOD
- UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kut $\angle AMD$ ($\angle AMC$) je pravi kut, tj. $|\angle AMD| = 90^\circ$. 1 BOD

Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{DE}$.

Trokuti ABC i CDE su sukladni pa imaju jednake površine, dužine $\overline{CN}$ i $\overline{CM}$ su visine na sukladne stranice pa su njihove duljine jednake, odnosno $|MC| = |NC|$. 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi i $|\angle ECD| = |\angle ACB| = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. 1 BOD

Trokuti MFC i FNC su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC| = |NC|$, pa su sukladni po poučku SSK²). 1 BOD

Veličina kuta $\angle MFD$ iznosi $|\angle MFD| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = |\angle GFB|$ (slijedi iz pravokutnog trokuta MFD). 1 BOD

Kut $\angle CGN$ je vanjski kut trokuta FGB pa je $|\angle CGN| = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta CNG slijedi $|\angle GCN| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Veličina kuta $\angle DCN$ iznosi $|\angle DCN| = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ (jer je $|\angle BCM| = 45^\circ$). 1 BOD

Iz sukladnosti trokuta MFC i FNC slijedi $|\angle MCF| = |\angle NCF| = 30^\circ : 2 = 15^\circ$. 1 BOD

Nadalje, trokuti CFN i CGN su sukladni po poučku KSK (kutovi veličina 15° i 90° uz zajedničku stranicu $\overline{CN}$). 1 BOD

Iz njihove sukladnosti slijedi $|NG| = |NF|$ i $|FC| = |GC|$.

Dakle, trokut CFG je jednakokračan. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{28}{255} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{255}{28}} \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{3}{28}} \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{\frac{28}{3}}} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}} \quad 1 \text{ BOD}$$

Prirodni brojevi koji zamjenjuju nepoznanice su $a = 9$, $b = 9$, $c = 3$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$$

Slijedi $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{283}{255} - 1 = \frac{283 - 255}{255} = \frac{28}{255}$. 3 BODA

Dalje je $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{255}{28} = 9 + \frac{3}{28}$. 2 BODA

Dakle, $a = 9$. 1 BOD

Iz $\frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{28}$ slijedi $b + \frac{1}{c} = \frac{28}{3} = 9 + \frac{1}{3}$. 2 BODA

Slijedi $b = 9, c = 3$. 2 BODA
 UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je x početna duljina čarobnog saga.

Početna širina saga bila je $1.8 \text{ m} = 18 \text{ dm}$. 1 BOD

Nakon ispunjenja prve želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}x$, a širina $18 - \frac{1}{3} \cdot 18 = 18 - 6 = 12 \text{ dm}$. 2 BODA

Nakon ispunjenja druge želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$, a širina $12 - \frac{1}{3} \cdot 12 = 12 - 4 = 8 \text{ dm}$. 2 BODA

Nakon ispunjenja treće želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x$, a širina $8 - \frac{1}{3} \cdot 8 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ dm}$. 2 BODA

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su a i b duljine susjednih stranica.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$\frac{1}{8}x \cdot \frac{16}{3} = 18, \text{ odnosno } \frac{2}{3}x = 18, \text{ pa slijedi } x = 27 \text{ dm} = 2.7 \text{ m}. \quad \text{2 BODA}$$

Početna površina čarobnog saga bila je $P = 1.8 \text{ m} \cdot 2.7 \text{ m} = 4.86 \text{ m}^2$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su a i b duljine susjednih stranica.

Neka je x početna duljina saga, a y početna širina saga.

Nakon ispunjenja svake želje duljina saga se prepolovi.

Nakon ispunjenja tri želje duljina saga se 3 puta prepolovi, pa je jednaka $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}x$.

2 BODA

Nakon ispunjenja svake želje širina saga se umanjuje za $\frac{1}{3}$ širine, što znači da preostane $\frac{2}{3}$ širine.

Nakon ispunjenja tri želje širina saga je $b = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} y = \frac{8}{27} y$. 2 BODA

Površina saga nakon tri ispunjene želje jednaka je

$$P_3 = \frac{1}{8} x \cdot \frac{8}{27} y = \frac{1}{27} xy. \quad 2 \text{ BODA}$$

Prema uvjetima zadatka je $P_3 = 18 \text{ dm}^2$, a $y = 1.8 \text{ m} = 18 \text{ dm}$. 1 BOD

Slijedi

$$18 = \frac{1}{27} x \cdot 18, \quad 1 \text{ BOD}$$

što daje $x = 27 \text{ dm} = 2.7 \text{ m}$. 1 BOD

Početna površina čarobnog saga bila je $P = 1.8 \text{ m} \cdot 2.7 \text{ m} = 4.86 \text{ m}^2$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena:

Duljina i površina saga mogu se izraziti i u decimetrima, odnosno dm^2 .

5. Prvi način:

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$. 1 BOD

Dalje slijedi:

$$10 \cdot \overline{abcde} + 2 = 3 \cdot (200000 + \overline{abcde}) \quad 2 \text{ BODA}$$

$$10 \cdot \overline{abcde} + 2 = 600000 + 3 \cdot \overline{abcde} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$7 \cdot \overline{abcde} = 600000 - 2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\overline{abcde} = 599998 : 7 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\overline{abcde} = 85714 \quad 1 \text{ BOD}$$

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$. 1 BOD

Broj $3 \cdot e$ mora završavati znamenkom 2, što je moguće jedino ako je $e = 4$. 1 BOD

Sada je $\overline{abcd42} = 3 \cdot \overline{2abcd4}$. To je moguće jedino ako je $d = 1$. 1 BOD

Imamo, dakle, $\overline{abc142} = 3 \cdot \overline{2abc14}$.

Broj $3 \cdot c$ mora završavati znamenkom 1, a to je moguće jedino ako je $c = 7$. 1 BOD

Dalje, imamo $\overline{ab7142} = 3 \cdot \overline{2ab714}$. To je moguće jedino ako je $b = 5$. 1 BOD

Sada je $\overline{a57142} = 3 \cdot \overline{2a5714}$. To je moguće jedino ako je $a = 8$. 1 BOD

Provjerom množenja zaista vrijedi $857142 = 3 \cdot 285714$.

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x iznos novca prije plaćanja poreza.

Oporezuje se $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x = \frac{11}{15}x$, 2 BODA

a ne oporezuje $\frac{4}{15}x$. 1 BOD

Iz $\frac{4}{15}x = 100\,000$ dobiva se $x = 375\,000$. Tvrtka je imala 375 000 kuna. 2 BODA

Od toga se po stopi 20 % oporezuje $\frac{2}{5} \cdot 375\,000 = 150\,000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je $150\,000 \cdot 0.2 = 30\,000$ kn. 1 BOD

Zatim se po stopi 10 % oporezuje $\frac{1}{3} \cdot 375\,000 = 125\,000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je $125\,000 \cdot 0.1 = 12\,500$ kn. 1 BOD

Za porez je ukupno plaćeno $30\,000 + 12\,500 = 42\,500$ kuna. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. **Prvi način:** Neka je α veličina unutarnjeg, a α_1 veličina susjednog vanjskog kuta zadanog pravilnog mnogokuta.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $\alpha = 9\alpha_1$ i $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$.

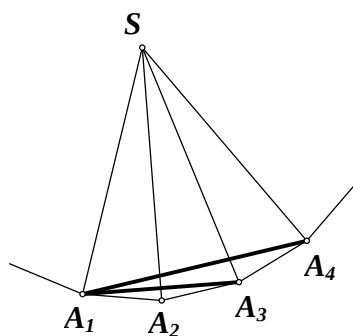
Slijedi da je $10\alpha_1 = 180^\circ$, pa je $\alpha_1 = 18^\circ$. 1 BOD

Tada je $\alpha = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$. 1 BOD

U pravilnom mnogokutu svi su vanjski kutovi jednakih veličina, a zbroj im je 360° .

Iz $18^\circ \cdot n = 360^\circ$ izračuna se da je $n = 20$, dakle riječ je o dvadeseterokutu. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s traženim kutom izgleda ovako: 1 BOD



Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2| = 360^\circ : 20 = 18^\circ$, pa je $|\angle A_1SA_3| = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$ i

$|\angle A_1SA_4| = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta A_1A_3S se izračuna

$|\angle A_3A_1S| = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 144^\circ : 2 = 72^\circ$. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta A_1A_4S se izračuna

$$|\angle A_4 A_1 S| = (180^\circ - 54^\circ) : 2 = 126^\circ : 2 = 63^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

Nadalje, $|\angle A_3 A_1 A_4| = |\angle A_3 A_1 S| - |\angle A_4 A_1 S|$, pa je 1 BOD

$$|\angle A_3 A_1 A_4| = 72^\circ - 63^\circ = 9^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Prvi dio identičan je postupku u prvom načinu uključujući i skicu (ukupno 4 BODA).

Dalje slijedi:

$$\text{Vrijedi da je } |\angle A_1 S A_2| = 360^\circ : 20 = 18^\circ, \text{ pa je } |\angle A_1 S A_4| = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

Iz jednakokračnog trokuta $A_1 A_2 A_3$ vrijedi da je

$$|\angle A_3 A_1 A_2| = (180^\circ - \alpha) : 2 = (180^\circ - 162^\circ) : 2 = 18^\circ : 2 = 9^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz jednakokračnog trokuta $A_1 A_4 S$ se izračuna

$$|\angle A_4 A_1 S| = (180^\circ - 54^\circ) : 2 = 126^\circ : 2 = 63^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Nadalje, } |\angle A_3 A_1 A_4| = \frac{\alpha}{2} - (|\angle A_2 A_1 A_3| + |\angle A_4 A_1 S|), \text{ pa je} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|\angle A_3 A_1 A_4| = 81^\circ - (9^\circ + 63^\circ) = 81^\circ - 72^\circ = 9^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

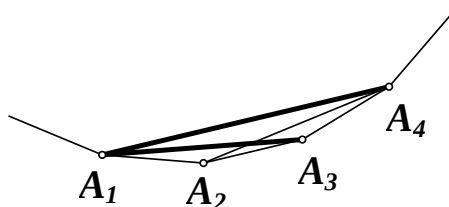
Treći način: Ako je α veličina unutarnjeg kuta mnogokuta, onda je veličina njegovog vanjskog kuta $180^\circ - \alpha$.

$$\text{Iz uvjeta zadatka } 9 \cdot (180^\circ - \alpha) = \alpha, \text{ izračuna se } \alpha = 162^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

Koristeći formulu za veličinu unutarnjeg kuta n -terokuta

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 162^\circ \text{ izračuna se da je } n = 20. \quad 1 \text{ BOD}$$

Skica dijela dvadeseterokuta s prikazom traženog kuta izgleda ovako: 1 BOD



Duljine stranica i veličine kutova pravilnog mnogokuta su jednake,

pa prema SKS poučku vrijedi: $\triangle A_1 A_2 A_3 \cong \triangle A_2 A_3 A_4$.

$$\text{Tada je } |A_1 A_3| = |A_2 A_4|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Onda je, prema SSS poučku: $\triangle A_1 A_3 A_4 \cong \triangle A_4 A_2 A_1$.

$$\text{Zbog toga vrijedi } |\angle A_3 A_4 A_1| = |\angle A_2 A_1 A_4|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Zbroj veličina kutova svakog četverokuta je 360° , a u četverokutu $A_1 A_2 A_3 A_4$ dva kuta imaju po 162° , dok su druga dva jednakih veličina.

$$\text{Onda je: } |\angle A_2 A_1 A_4| = (360^\circ - 2 \cdot 162^\circ) : 2 = 18^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{U jednakokračnom trokutu } A_1 A_2 A_3 \text{ je: } |\angle A_2 A_1 A_3| = (180^\circ - 162^\circ) : 2 = 9^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Konačno je: } |\angle A_3 A_1 A_4| = |\angle A_2 A_1 A_4| - |\angle A_2 A_1 A_3| = 18^\circ - 9^\circ = 9^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način: Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 9, tj. $6 + 3a + 3b = 9k$, $k \in \mathbb{N}$. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 3, tj. $3a + 2b = 3l$, $l \in \mathbb{N}$. 1 BOD

Kako su pribrojnik $3a$ i zbroj $3l$ djeljivi brojem 3, onda i drugi pribrojnik $2b$ mora biti djeljiv brojem 3. To vrijedi za $b = 0, 3, 6$, i 9. 1 BOD

Kako je znamenka b već uvjetovana djeljivošću brojem 2, znamenka b može biti 0 ili 6. 1 BOD

Uvrštavanjem broja b u izraz $6 + 3a + 3b = 9k$ slijedi:

a) $b = 0$

$$6 + 3a = 9k$$

Za $k = 1$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 2$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 3$ slijedi $a = 7$.

b) $b = 6$

$$24 + 3a = 9k$$

Za $k = 3$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 4$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 5$ slijedi $a = 7$.

U oba slučaja, zbog uvjeta djeljivosti brojem 2, znamenka a može biti samo 4. 2 BODA

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka $6 + 3a + 3b$ mora biti djeljiv brojem 9. 1 BOD

Najveća vrijednost za a i b je 9, pa $6 + 3a + 3b$ može imati najveću vrijednost 60.

Zbroj $6 + 3a + 3b$ može imati vrijednost: 9, 18, 27, 36, 45 i 54.

Dijeljenjem brojem 3 dobije se da je $2 + a + b = 3, 6, 9, 12, 15$ ili 18, odnosno $a + b = 1, 4, 7, 10, 13$ ili 16. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka koji je $3a + 2b$ mora biti djeljiv brojem 3. 1 BOD

Vidjeli smo da a može imati vrijednost 2, 4, 6 ili 8, dok b može biti 0, 2, 4, 6, ili 8.

Budući je zbroj dva parna broja opet parni broj, vrijednost zbroja $a + b$ može biti 4, 10 ili 16. Sve moguće kombinacije prikazane su u tablici (uključujući i vrijednost izraza $3a + 2b$): 2 BODA

a	b	$a + b$	$3a + 2b$
2	2	4	10
2	8	10	22
4	0	4	12
4	6	10	24

6	4	10	26
8	2	10	28
8	8	16	40

Od svih brojeva u zadnjem stupcu, brojem 3 su djeljivi samo 12 i 24.

1 BOD

Njih dobijemo za $a = 4$ i $b = 0$, odnosno $a = 4$ i $b = 6$.

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način: Peteroznamenasti broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenast).

1 BOD

Imamo brojeve oblika $\overline{2b2b2}$, $\overline{4b4b4}$, $\overline{6b6b6}$ i $\overline{8b8b8}$.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 3.

Imamo sljedeće mogućnosti:

a	2	4	6	8
b	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9

2 BODA

Ako je broj $\overline{gababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{gababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8, pa od u tablici navedenih mogućnosti za b ostaju $b = 0$ ili $b = 6$.

2 BODA

Zbog djeljivosti broja $\overline{gababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 9. Ispitujemo mogućnosti:

Za $a = 2$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 202 020 i 6 262 626 koji nisu djeljivi brojem 9.

Za $a = 4$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 404 040 i 6 464 646 koji jesu djeljivi brojem 9.

Za $a = 6$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 606 060 i 6 666 666 koji nisu djeljivi brojem 9.

Za $a = 8$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 808 080 i 6 868 686 koji nisu djeljivi brojem 9.

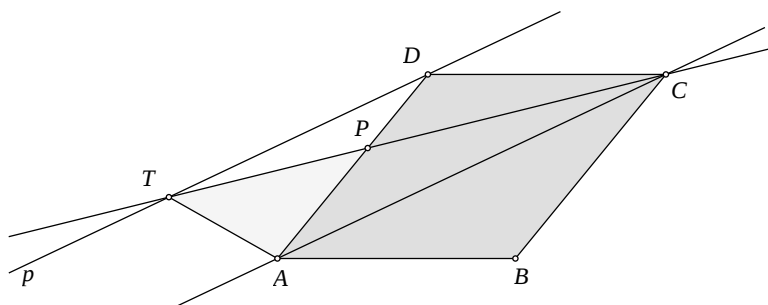
3 BODA

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



skica: 1 BOD

$p_{\triangle ACD} = p_{\triangle ACP}$ jer ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$ i jednake duljine visina na tu stranicu.

1 BOD

Kako je $p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta PCD}$ i $p_{\Delta ACT} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta APT}$

slijedi da je $p_{\Delta APT} = p_{\Delta PCD}$.

2 BODA

Vrijedi $|DP| = \frac{2}{5}|DA|$, a duljina visine na stranicu $\overline{DP}$ u trokutu PCD jednaka je duljini

visine na stranicu $\overline{DA}$ u trokutu ACD .

Zbog toga je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$.

2 BODA

S obzirom da dijagonala dijeli romb na dva sukladna trokuta, $p_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$,

pa je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} p_{ABCD} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$, što znači da je i $p_{\Delta APT} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$.

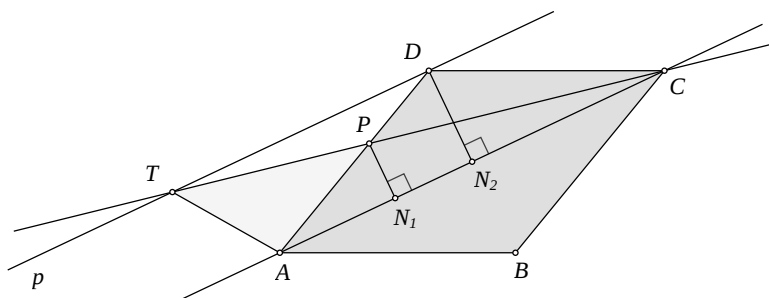
3 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1:5$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

(Napomena: Dokazati da je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$ može se i ovako:



Označimo s N_1 i N_2 nožišta visina iz vrhova P i D u trokutima ΔACP i ΔACD .

Trokut ΔAN_1P sličan je trokutu ΔAN_2D po KK-poučku (zajednički kut kod vrha A i jedan pravi kut).

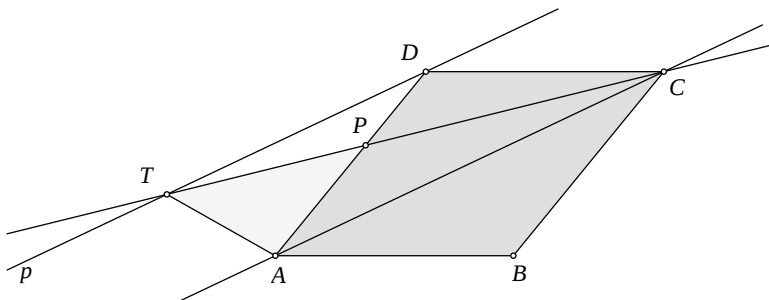
Kako je $|AP| = \frac{3}{5}|AD|$, zbog sličnosti trokuta će biti $|N_1P| = \frac{3}{5}|N_2D|$,

pa je i površina $p_{\Delta ACP} = \frac{3}{5} p_{\Delta ACD}$ (imaju zajedničku stranicu).

Dakle, $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$.

2 BODA)

Drugi način:



skica: 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu PDT

jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu APT .

Zbog toga je $p_{\Delta PDT} = \frac{2}{3} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Trokuti ACP i DPT su slični jer su im kutovi iste veličine (dva vršna kuta, odnosno šiljasti kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi je $p_{\Delta ACP} : p_{\Delta DPT} = 9 : 4$, odnosno $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} p_{\Delta DPT}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} p_{\Delta APT} = \frac{3}{2} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu PDC

jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu APC .

Zbog toga je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} p_{\Delta APC}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} p_{\Delta APT} = p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli romb na dva jednaka dijela, pa je površina romba

$$p_{ABCD} = 2(p_{\Delta APC} + p_{\Delta PCD}) = 2\left(\frac{3}{2} p_{\Delta PDC} + p_{\Delta PDC}\right) = 5p_{\Delta PDC} = 5p_{\Delta APT}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1 : 5$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način: Uvedimo oznake Aninih i Ivanovih godina kao u tablici. 1 BOD

	Ana	Ivan
Prije	y	x
Sada	$1.2x$	y
Poslije	$150 - 1.2x$	$1.2x$

Razlika godina između sada i prije jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$$1.2x - y = y - x, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{iz čega je } y = 1.1x \quad 1 \text{ BOD}$$

Razlika godina između poslije i sada jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$$150 - 1.2x - 1.2x = 1.2x - y \quad 1 \text{ BOD}$$

$$y = 3.6x - 150 \quad 1 \text{ BOD}$$

Zato je:

$$3.6x - 150 = 1.1x, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{iz čega je } x = 60 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Onda je } 1.2x = 1.2 \cdot 60 = 72 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$y = 1.1 \cdot 60 = 66 \quad 1 \text{ BOD}$$

Ana ima 72, a Ivan 66 godina. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Iz teksta se može zaključiti da je Ana starija od Ivana.

Neka Ivan sada ima x godina, a Ana $x + y$ godina (Ana je starija za y godina).

Ana je imala godina kao Ivan sada (x) prije y godina. Ivan je tada imao $x - y$ godina. 1 BOD

Prvi uvjet zadatka daje jednadžbu:

$$1.2 \cdot (x - y) = x + y, \quad 1 \text{ BOD}$$

iz čega se sređivanjem dobije:

$$x = 11y \quad 1 \text{ BOD}$$

Ako Ivan sada ima x godina, a Ana $x + y$ godina, Ivan će za y godina imati godina kao Ana sada.

Ivan će tada imati $x + y$ godina, a Ana će imati $x + 2y$ godina. 1 BOD

Iz drugog uvjeta zadatka slijedi:

$$x + y + x + 2y = 150 \text{ tj.}$$

$$2x + 3y = 150 \quad 1 \text{ BOD}$$

Uvrštavanjem $x = 11y$ dobije se:

$$22y + 3y = 150, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{pa je } y = 6. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Tada je } x = 11 \cdot 6 = 66, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{a } x + y = 66 + 6 = 72. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ivan ima 66 godina, a Ana 72 godine.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način: Označimo s A Anine, a s I Ivanove trenutne godine.

Neka je Ana je imala godina koliko Ivan sada prije x godina.

$$\text{Vrijedi } A - x = I, \text{ tj. } x = A - I. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ivan je tada imao } I - x \text{ godina, pa vrijedi } A = 1.2 \cdot (I - x) \quad 1 \text{ BOD}$$

Uvrštavanjem nepoznanice x iz prve u drugu jednadžbu dobije se:

$$A = 1.2 \cdot (I - A + I),$$

$$\text{iz čega je } 11A = 12I \quad 1 \text{ BOD}$$

Za y godina Ivan će imati godina koliko Ana sada.

$$\text{Vrijedi } I + y = A, \text{ tj. } y = A - I. \quad 1 \text{ BOD}$$

Ana će tada imati $A + y$ godina, a zajedno će imati 150 godina.

$$\text{Vrijedi: } I + y + A + y = 150, \text{ tj. } I + A + 2y = 150 \quad 1 \text{ BOD}$$

Uvrštavanjem nepoznanice y u drugu jednadžbu dobije se:

$$I + A + 2A - 2I = 150$$

$$3A - I = 150 \quad 1 \text{ BOD}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$11A = 12I \text{ i } 3A - I = 150 \text{ dobije se:}$$

$$I = 3A - 150$$

$$11A = 36A - 1800 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$25A = 1800$$

$$A = 72 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Onda je: } I = 3 \cdot 72 - 150 = 66 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Ana ima 72 godine, a Ivan 66 godina.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom mora također biti prirodan. 1 BOD

Vrijedi:

$$\frac{a+64}{a-64} = 1 + \frac{128}{a-64}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Broj $a - 64$ mora biti djelitelj broja 128. Negativne djelitelje ne treba ni promatrati, jer će za njih promatrani broj biti ili negativan ili jednak 0, pa korijeni ili ne postoje ili su jednaki 0 što nije prirodan broj. 2 BODA

Pogledajmo tablicu:

$a - 64$	1	2	4	8	16	32	64	128
a	65	66	68	72	80	96	128	192
$\frac{128}{a-64}$	128	64	32	16	8	4	2	1
$1 + \frac{128}{a-64}$	129	65	33	17	9	5	3	2

3 BODA

Dakle, 9 je jedini kvadrat broja,

tj. postoji samo jedan broj $a = 80$ za koji je $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ također prirodan broj. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom također mora biti prirodan. 1 BOD

Označimo $x = \frac{a+64}{a-64}$ i iz toga izrazimo a .

$$ax - 64x = a + 64$$

$$ax - a = 64x + 64$$

$$a \cdot (x - 1) = 64x + 64$$

$$a = \frac{64x + 64}{x - 1} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a = \frac{64x - 64 + 128}{x - 1}$$

$$a = 64 + \frac{128}{x - 1} \quad 1 \text{ BOD}$$

Broj $x - 1$ mora biti djelitelj broja 128. Budući da su brojevi x i a prirodni brojevi, promatramo samo djelitelje broja 128 koji su također prirodni brojevi. 2 BODA

Djelitelji broja 128 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 i 128. 2 BODA

Ako $x - 1$ poprima te vrijednosti, onda je x (redom) 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65 i 129. 1 BOD

Među njima je jedino korijen broja 9 prirodan broj.

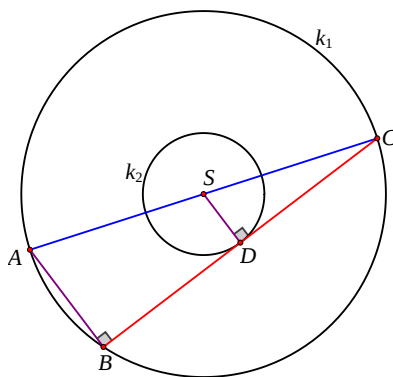
1 BOD

Onda je $a = 64 + \frac{128}{8} = 80$ jedini broj s traženim svojstvom.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Skica:

1 BOD

S je središte kružnica, a točka D diralište tangente $\overline{BC}$ i kružnice k_2 .

Duljine polumjera kružnica k_1 i k_2 označimo redom sa r_1 i r_2 . Iz uvjeta zadatka slijedi omjer $r_1 : r_2 = 3 : 1$, odnosno $r_1 = 3r_2$.

1 BOD

Prema Talesovom poučku obodni kut $\angle ABC$ nad promjerom $\overline{AC}$ je pravi kut.

Prema tome, trokut $\triangle ABC$ je pravokutan.

1 BOD

Tetiva $\overline{BC}$ kružnice k_1 je i tangenta kružnice k_2 , te je okomita na polumjer $\overline{SD}$.

Prema tome, i $\triangle SDC$ je pravokutan.

1 BOD

Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle SDC$ su slični po poučku KK (trokuti imaju jedan zajednički kut pri vrhu C i oba imaju jedan pravi kut).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle SDC$ slijedi proporcionalnost duljina njihovih stranica:

$$\frac{|AB|}{|SD|} = \frac{|AC|}{|SC|} \Rightarrow \frac{12}{r_2} = \frac{6r_2}{3r_2} \Rightarrow r_2 = 6 \text{ cm},$$

2 BODA

a $r_1 = 18 \text{ cm}$.

1 BOD

Površina kružnog vijenca računa se po formuli $P = (r_1^2 - r_2^2)\pi$, gdje su r_1 i r_2 duljine polumjera

kružnica k_1 i k_2 .

1 BOD

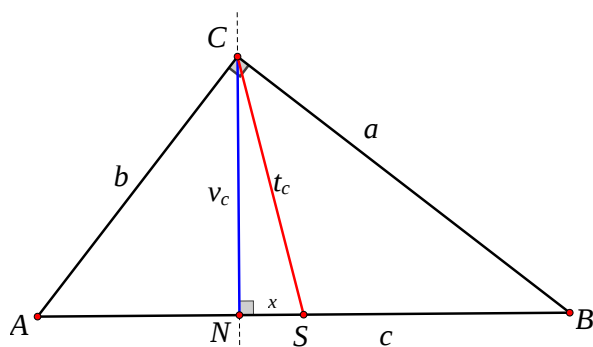
Prema tome, površina kružnog vijenca je $P = (324 - 36)\pi \text{ cm}^2 = 288\pi \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Površina kružnog vijenca može se dobiti tako da se posebno izračunaju površine krugova omeđenih kružnicama k_1 i k_2 , a zatim se te vrijednosti oduzmu.

3.



Skica:

1 BOD

(Napomena: Ako na skici nisu nacrtane dužine visina v_c i težišnica t_c , ne bodovati 1 BODOM.)

Prema uvjetu zadatka je $v_c : t_c = 12 : 13$ pa postoji realan broj k takav da je $v_c = 12k$ i $t_c = 13k$.

Označimo sa N nožište visine nacrtane vrhom C , a sa S polovište hipotenuze c .

Kako je trokut ABC pravokutan, točka S je središte opisane kružnice trokuta,

1 BOD

pa je $\frac{c}{2} = t_c = 13k$.

1 BOD

Označimo $|NS| = x$. U pravokutnom trokutu NSC vrijedi $x^2 = t_c^2 - v_c^2 = 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$.

Zato je $x = 5k$.

2 BODA

Slijedi da je $|AN| = \frac{c}{2} - x = 13k - 5k = 8k$.

1 BOD

Dalje možemo na dva načina.

Prvi način:

Uz oznake $|\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$ je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Budući da su trokuti ANC i CNB pravokutni, slijedi da je $|\angle NCA| = \beta$ i $|\angle BCN| = \alpha$.

1 BOD

Zato su trokuti ANC i CNB slični po poučku KK, pa vrijedi

1 BOD

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{\frac{c}{2} - x} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Trokuti ABC i ACN imaju jedan zajednički kut ($\angle BAC$, odnosno $\angle NAC$) i oba imaju jedan pravi kut, pa su slični po poučku KK.

2 BODA

Tada vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{|AN|} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$

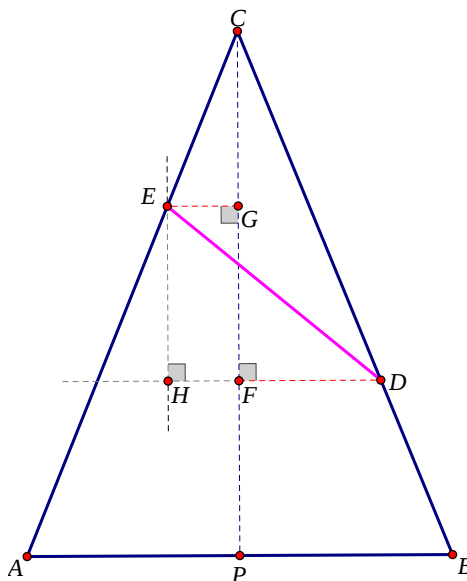
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je P polovište osnovice $\overline{AB}$. Budući da je trokut ABC jednakokrakan, to je $\overline{CP}$ je okomita na $\overline{AB}$. Točkama D i E nacrtajmo okomice na $\overline{CP}$ i nožišta tih okomica označimo redom kao točke F

i G. Produljimo dužinu $\overline{FD}$ preko točke F i na tom pravcu označimo točku H takvu da je $HFGE$ pravokutnik. Tada je $\triangle HDE$ pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{DE}$.



Skica:

1 BOD

(Napomena: Ako na skici nisu nacrtani polupravac $\overrightarrow{DF}$ (produžetak dužine $\overline{DF}$) i okomica točkom E na dužinu $\overline{DF}$, **ne bodovati 1 BODOM.**)

Iz uvjeta koje zadovoljavaju točke E i D, $|CE|:|EA|=1:2$ i $|BD|:|DC|=1:2$, slijedi $|CE|:|CA|=1:3$ i $|DC|:|BC|=2:3$ (tj. $|CE|=\frac{13}{3}\text{ cm}$ i $|DC|=\frac{26}{3}\text{ cm}$) te $|AP|=5\text{ cm}$.

Iz pravokutnog trokuta APC slijedi da je $|PC|=\sqrt{|AC|^2-|AP|^2}=12\text{ cm}$.

1 BOD

Trokuti EGC i APC su slični (po poučku KK),

1 BOD

pa je $|EG|:|AP|=|CE|:|CA|=1:3$, odnosno $|EG|=\frac{|AP|}{3}=\frac{5}{3}\text{ cm}$

1 BOD

i $|GC|:|PC|=1:3$, odnosno $|GC|=\frac{|PC|}{3}=4\text{ cm}$.

1 BOD

Trokuti DFC i PBC su slični (po poučku KK),

1 BOD

pa je $|FD|:|PB|=|DC|:|BC|=2:3$, odnosno $|FD|=\frac{2|PB|}{3}=\frac{10}{3}\text{ cm}$

1 BOD

i $|FC|:|PC|=2:3$, odnosno $|FC|=\frac{2|PC|}{3}=8\text{ cm}$.

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut EHD dobivamo

$$|DE|=\sqrt{|HD|^2+|EH|^2}=$$

$$=\sqrt{(|HF|+|FD|)^2+|FG|^2}=$$

$$=\sqrt{(|EG|+|FD|)^2+(|FC|-|GC|)^2}=$$

1 BOD

$$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}\text{ cm}.$$

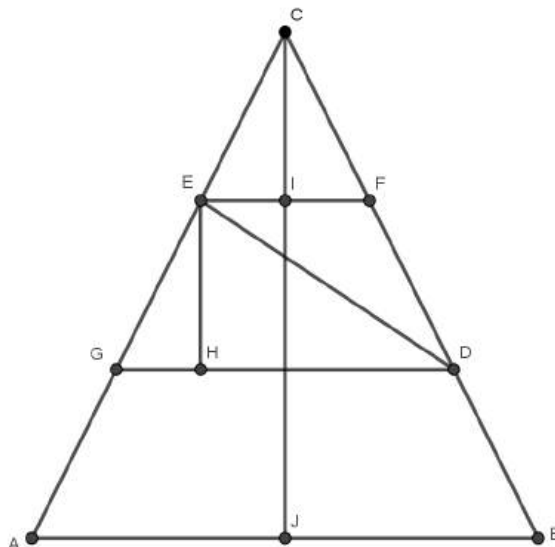
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nadopunimo sliku na sljedeći način:

Iz točaka D i E povuku se usporednice s osnovicom trokuta AB (dobiju se točke F i G), a zatim se povuku okomice iz točaka C i E (te se označe točke H , I i J). 1 BOD



Prema Talesovom poučku, usporedni pravci na krakovima odsijecaju proporcionalne dužine.

Zbog $|BC| = |AC|$ je $|AG| = |BD| = \frac{1}{3}|AC|$ i $|CE| = \frac{1}{3}|AC|$, te je i $|GE| = \frac{1}{3}|AC|$. 1 BOD

Točka J je polovište jednakokraknog trokuta ABC , pa je $|AJ| = 5$ cm. Iz pravokutnog trokuta AJC slijedi da je $|CJ|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, odnosno $|CJ| = 12$ cm. 1 BOD

Trokuti CEI i CAJ su slični (po poučku KK) pa je, zbog $|CE| : |CA| = 1 : 3$,

$|CE| = \frac{13}{3}$ cm, $|EI| = \frac{5}{3}$ cm i $|CI| = 4$ cm. 2 BODA

Po istom poučku slični su trokuti GDC i ABC .

Zbog $|CD| : |CB| = 2 : 3$ je $|GD| = \frac{2}{3} \cdot |AB| = \frac{20}{3}$ cm. 1 BOD

Trokuti CEI i EGH su sukladni (KSK poučak) pa je $|GH| = \frac{5}{3}$ cm i $|EH| = 4$ cm. 1 BOD

Tada je $|HD| = |GD| - |GH| = \frac{20}{3} - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$ cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta EHD slijedi:

$|ED|^2 = |EH|^2 + |HD|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. 1 BOD

Dakle, $|ED| = \sqrt{41}$ cm. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo broj točaka na drugom pravcu s x .

Na prvom je pravcu 8 točaka, koje čine $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ dužina. 1 BOD

Svaka od tih dužina sa svakom od x točaka na drugom pravcu čini jedan trokut.

Takvih je trokuta $28x$. 1 BOD

Ako je na drugom pravcu x točaka, one određuju $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$ dužina.	1 BOD
Svaka dužina sa svakom od 8 točaka na prvom pravcu također čine trokut.	
Takvih je trokuta $4x^2 - 4x$.	1 BOD
Ukupan broj trokuta je 640. Vrijedi:	
$28x + 4x^2 - 4x = 640$	1 BOD
$4x^2 + 24x - 640 = 0 \quad / : 4$	
$x^2 + 6x - 160 = 0$	1 BOD
Dobivena kvadratna jednadžba riješi se rastavljanjem srednjeg člana i izlučivanjem (prvi način):	
$x^2 + 16x - 10x - 160 = 0$	
$x \cdot (x + 16) - 10 \cdot (x + 16) = 0$	
$(x + 16) \cdot (x - 10) = 0$	2 BODA
Iz $x + 16 = 0$ slijedi $x_1 = -16$, a iz $x - 10 = 0$ slijedi $x_2 = 10$.	1 BOD
Budući da broj točaka mora biti prirodni broj, na drugom je pravcu 10 točaka.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Jednadžba $x^2 + 6x - 160 = 0$ se može riješiti i na sljedeća dva načina:

Drugi način:

$x^2 + 6x - 160 = 0$	
$(x + 3)^2 - 9 - 160 = 0$	
$(x + 3)^2 = 169$	1 BOD
$x + 3 = \sqrt{169}$	
$x_1 + 3 = 13 \quad x_2 + 3 = -13$	
$x_1 = 10 \quad x_2 = -16$	2 BODA
Broj točaka mora biti prirodan broj, dakle na drugom je pravcu 10 točaka.	1 BOD

Treći način:

Iz $x^2 + 6x = 160$ slijedi $x(x + 6) = 160$.	
Kako je x prirodan broj, zaključujemo da x mora biti djelitelj broja $160 = 2^5 \cdot 5$.	1 BOD
Za svaku mogućnost da je x djelitelj broja 160 provjerimo je li $x(x + 6) = 160$	2 BODA
i ustanovimo da je jedino rješenje $x = 10$.	1 BOD

Napomena 2: Ukoliko učenik na prvom pravcu pogrešno prebroji 56, a na drugom $x \cdot (x-1)$ dužina, zadatak treba bodovati s 0 BODOVA.

Ukoliko učenik točno prebroji 28 dužina na prvom pravcu, a na drugom pravcu prebroji $x \cdot (x-1)$

dužina (umjesto $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$) ili ukoliko učenik točno prebroji $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$ dužina na drugom pravcu, a na prvom 56 (umjesto 28), onda treba bodovati dio rješenja do dobivanja kvadratne jednadžbe (koja onda nema cjelobrojna rješenja), slijedeći tu pogrešku i učenik, u tom slučaju, na zadatku najviše može dobiti 5 BODOVA.