

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve cijele brojeve x za koje izraz $x^4 - 101x^2 + 100$ ima negativnu vrijednost.

Rješenje.

Rješavamo nejednadžbu $x^4 - 101x^2 + 100 < 0$ u skupu cijelih brojeva.

Lijevu stranu nejednadžbe rastavimo na faktore:

$$\begin{aligned}x^4 - 101x^2 + 100 &< 0 \\x^4 - 100x^2 - x^2 + 100 &< 0 \\x^2(x^2 - 100) - (x^2 - 100) &< 0 \\(x^2 - 1)(x^2 - 100) &< 0 & 2 \text{ boda} \\(x - 1)(x + 1)(x - 10)(x + 10) &< 0. & 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

Koristeći tablicu predznaka možemo dobiti rješenje u skupu $\mathbb{R}$: $\langle -10, -1 \rangle \cup \langle 1, 10 \rangle$. 2 boda

Cijeli brojevi iz dobivenih intervala su $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1 bod

Zadatak B-1.2.

Neka je n prirodan broj i neka je

$$A = 0.1^n \cdot 0.01^n \cdot 0.001^n \cdot 0.0001^n \cdot \dots \cdot \underbrace{0.00\dots 01^n}_{199 \text{ nula}}.$$

Broj A^{-1} ima 140701 znamenku. Odredite broj n .

Rješenje.

$$A = 10^{-n} \cdot 10^{-2n} \cdot 10^{-3n} \cdot 10^{-4n} \cdot \dots \cdot 10^{-200n} = 10^{-n(1+2+3+\dots+200)} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Tada je } A^{-1} = 10^{n \cdot \frac{200 \cdot 201}{2}} = 10^{20100n}. \quad 2 \text{ boda}$$

Ovaj broj ima u svom dekadskom zapisu vodeću znamenku jedan i $20100n$ nula.

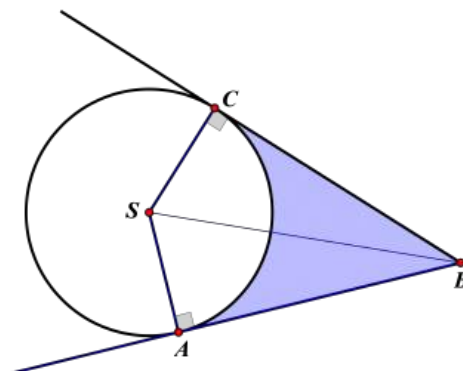
$$\text{Slijedi } 20100n + 1 = 140701. \quad 2 \text{ boda}$$

$$\text{Tada je } n = 7. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-1.3.

Tangente povučene iz točke B na kružnicu polumjera r dodiruju kružnicu u točkama A i C . Odredite površinu lika omeđenog tangentama BC , BA i manjim kružnim lukom $\widehat{AC}$, ako mjera kuta $\sphericalangle ABC$ iznosi 60° .

Rješenje.



Tražena površina je jednaka površini četverokuta $ABCS$ umanjenoj za površinu kružnog isječka. Površina tog četverokuta jednaka je dvostrukoj površini pravokutnog trokuta ABS , koji je polovica jednakokraničnog trokuta (kutovi su mu 30° , 60° i 90°).

1 bod

Odatle duljine stranice trokuta ABS su $|AS| = r$, $|AB| = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

1 bod

$$2 \cdot P_{\triangle ABS} = 2 \cdot \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}.$$

1 bod

Kut $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ pa je središnji kut kružnog isječka $\sphericalangle ASC = 120^\circ$.

1 bod

Površina kružnog isječka čiji je središnji kut 120° je trećina površine danog kruga, odnosno $P_i = \frac{1}{3}r^2\pi$.

1 bod

Tražena je površina $P = r^2\sqrt{3} - \frac{1}{3}r^2\pi$.

1 bod

Zadatak B-1.4.

U svako polje tablice 4×4 upisan je jedan broj. Za svako je polje zbroj brojeva u njemu susjednim poljima jednak istom prirodnom broju x (dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu). Odredite broj x tako da zbroj svih brojeva u tablici iznosi 282.

Prvo rješenje.

Označimo polja ovako:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

Traženi ćemo zbroj izračunati grupiranjem brojeva iz polja u disjunktne skupine. 1 bod

Grupirat ćemo redom za neko polje iz tablice njemu susjedne članove i paziti da ne brojimo dvaput isti broj:

$$\begin{aligned} & A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L + M + N + O + P \\ &= (A + F + C) + (B + D + G) + (E + J + M) + (H + K + P) + (I + N) + (L + O) \\ &= x + x + x + x + x + x = 6x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ boda} \\ 1 \text{ bod} \end{array}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $6x = 282$, odnosno $x = 47$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uz isti početak kao u prvom rješenju, grupiranje članova može se i drugačije napraviti, primjerice:

$$\begin{aligned} & A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L + M + N + O + P \\ &= (B + E) + (C + H) + (D + G + L) + (A + F + I) + (M + J + O) + (N + K + P) \\ &= x + x + x + x + x + x = 6x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ boda} \\ 1 \text{ bod} \end{array}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $6x = 282$, odnosno $x = 47$. 1 bod

Napomena: Zadatak se boduje sa 6 bodova ako je učenik ispisao točnih 16 jednadžbi sa 16 nepoznanica i dobio točan rezultat. Ako je u tom sustavu napravio neku pogrešku, sustav točnih jednadžbi bodovati s 2 boda, a zamjenu zbroja brojeva u susjednim poljima s x s 1 bod. Ako je samo jedna računska greška, bez koje bi učenik svojim postupkom došao do točnog rješenja, oduzeti 1 bod.

Zadatak B-1.5.

Odredite dvije posljednje znamenke broja $7^{2016^{2017}}$.

Rješenje.

Broj $7^{2016^{2017}}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$7^{2016^{2017}} = 7^{2016 \cdot 2016 \cdot 2016 \cdots 2016} \quad 1 \text{ bod}$$

Eksponent danog broja je djeljiv s 8 jer je 2016 djeljiv s 8 pa vrijedi:

$$7^{2016^{2017}} = 7^{8x} = (7^4)^{2x} \quad 2 \text{ boda}$$

gdje je x neki cijeli broj. Dalje slijedi

$$7^{2016^{2017}} = (7^4)^{2x} = (2400 + 1)^{2x} = (2400^2 + 4800 + 1)^x = (100y + 1)^x \quad 1 \text{ bod}$$

pri čemu i y označava neki cijeli broj.

Zadnje dvije znamenke danog broja su 01. 2 boda

Napomena: Učenici mogu promatrati potencije broja 7 i zaključiti da uvijek završavaju redom na 7, 9, 3 i 1, a kako je eksponent danog broja djeljiv s 4, mora imati zadnju znamenku 1. (3 boda)

Kako je $7^{2016^{2017}} = 7^{4k} = 2401 \cdots 2401 \cdot 2401$, dani će umnožak zasigurno završiti s 0 na predzadnjem mjestu (što vrijedi preostala 3 boda), što je potrebno obrazložiti kao u prvom rješenju. Priznati i ako je učenik obrazložio koristeći dio pismenog množenja sa zadnjim brojem 2401.

Zadatak B-1.6.

Tri su brata rođena jedan za drugim s istom razlikom u godinama. Kad se najmlađi brat rodio, najstariji je imao šest godina manje nego što srednji ima danas. Razlika kvadrata broja godina najstarijega i najmlađega brata je 432. Koliko godina ima svaki od tri brata danas?

Rješenje.

Označimo broj godina srednjeg brata s x , a razliku u godinama s a . Tada najmlađi brat ima $x - a$ godina, a najstariji $x + a$. 1 bod

Kada se najmlađi rodio, najstariji je imao $x + a - (x - a) = 2a$ godina, što je za 6 manje od x . 1 bod

$$2a = x - 6 \Rightarrow x = 2a + 6 \quad 1 \text{ bod}$$

$$(x + a)^2 - (x - a)^2 = 432 \quad 1 \text{ bod}$$

$$ax = 108 \quad 1 \text{ bod}$$

$$a(2a + 6) = 108$$

$$a^2 + 3a - 54 = 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$a^2 + 9a - 6a - 54 = 0$$

$$a(a + 9) - 6(a + 9) = 0$$

$$(a + 9)(a - 6) = 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$a = 6 \quad 1 \text{ bod}$$

Razlika u godinama je 6.

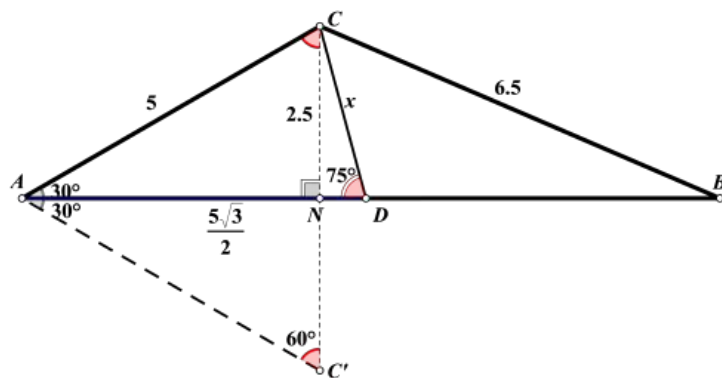
$$x = 2a + 6 = 18$$

Najmlađi brat ima 12 godina, srednji brat 18 godina, a najstariji 24 godine. 2 boda

Zadatak B-1.7.

U trokutu ABC duljina stranice $\overline{AC}$ iznosi 5 cm, a duljina stranice $\overline{BC}$ je 6.5 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D tako da su kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ADC$ sukladni, a njihova mjera iznosi 75° . Odredite duljinu dužine $\overline{CD}$ i duljinu dužine $\overline{AB}$.

Rješenje.



Uočimo da je trokut ACD jednakokračan, odnosno $|AD| = 5$ cm.

1 bod

Povucimo visinu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Trokut ANC ima kutove 30° , 90° , 60° i pola je jednakokraničnog trokuta ACC' kojemu je duljina stranice 5 cm.

1 bod

Slijedi $|CN| = 2.5$ cm, $|AN| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

2 boda

Po Pitagorinom poučku je

$$|NB|^2 = |BC|^2 - |CN|^2 = 6.5^2 - 2.5^2 = 36 \text{ pa je } |NB| = 6 \text{ cm.}$$

2 boda

$$\text{Tada je } |AB| = |AN| + |NB| = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + 6\right) \text{ cm}$$

1 bod

$$|ND| = |AD| - |AN| = \left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \text{ cm.}$$

1 bod

Duljinu $x = |CD|$ ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta CND , također koristeći Pitagorin poučak.

$$|CD|^2 = |CN|^2 + |ND|^2 = 2.5^2 + \left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + 25 - 25\sqrt{3} + \frac{75}{4} = 50 - 25\sqrt{3}$$

$$|CD| = \sqrt{50 - 25\sqrt{3}} \text{ cm (što se može zapisati i kao } 5\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ ili } \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)).$$

2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Koliko ima cijelih brojeva a za koje su oba rješenja jednadžbe $(x - 20)(x + 17) = \frac{1}{4}a$ pozitivni realni brojevi?

Prvo rješenje.

$$(x - 20)(x + 17) = \frac{1}{4}a \Leftrightarrow x^2 - 3x - 340 - \frac{1}{4}a = 0.$$

Oba rješenja jednadžbe će biti pozitivni realni brojevi ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. $D \geq 0 \Leftrightarrow 9 + 4(340 + \frac{1}{4}a) \geq 0 \Rightarrow a \geq -1369.$ 2 boda
2. $x_1 + x_2 > 0$, a kako je $x_1 + x_2 = 3$ to vrijedi za svaki realan broj a . 1 bod
3. $x_1 x_2 > 0 \Rightarrow -340 - \frac{1}{4}a > 0 \Rightarrow a < -1360.$ 2 boda

Dakle, za $a \in [-1369, -1360)$ oba rješenja dane jednadžbe su pozitivni realni brojevi, a u tom intervalu ima 9 cijelih brojeva.

1 bod

Drugo rješenje.

Dana je jednadžba ekvivalentna s $x^2 - 3x - 340 - \frac{1}{4}a = 0$. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je $D = 1369 + a$, a rješenja $x_1 = \frac{3 + \sqrt{1369 + a}}{2}$ i $x_2 = \frac{3 - \sqrt{1369 + a}}{2}$.

Kako dana jednadžba mora imati pozitivna realna rješenja, rješavamo sljedeći sustav nejednadžbi:

$$(1) \quad D = 1369 + a \geq 0. \quad 1 \text{ bod}$$

$$(2) \quad \frac{3 + \sqrt{1369 + a}}{2} > 0 \text{ i } \frac{3 - \sqrt{1369 + a}}{2} > 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz (1) slijedi $a \geq -1369.$ 1 bod

Prva nejednadžba u (2) je ispunjena za sve realne brojeve a . 1 bod

Iz druge slijedi:

$$3 - \sqrt{1369 + a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1369 + a} < 3 \Leftrightarrow 1369 + a < 9 \Leftrightarrow a < -1360. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, za $a \in [-1369, -1360)$ oba rješenja dane jednadžbe su pozitivni realni brojevi, a u tom intervalu ima 9 cijelih brojeva.

1 bod

Zadatak B-2.2.

Izračunajte aritmetičku sredinu svih četveroznamenastih brojeva zapisanih znamenka 1, 3, 5, 7, ako su sve znamenke upotrijebljene i to samo jednom.

Rješenje.

Postoji $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ takva četveroznamenasta broja.

1 bod

Primjerice, ako je znamenka 1 na prvom mjestu imamo 6 različitih brojeva s danim svojstvom: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735, 1753.

Analogno se mogu ispisati preostali brojevi.

Važno je uočiti da će se na mjestu tisućica, stotica, desetica i jedinica svaka od četiri znamenke pojaviti točno 6 puta.

2 boda

Zbroj svih takvih brojeva je:

$$\begin{aligned} &6(1000 + 3000 + 5000 + 7000) + 6(100 + 300 + 500 + 700) + 6(10 + 30 + 50 + 70) + 6(1 + 3 + 5 + 7) \\ &= (6000 + 600 + 60 + 6)(1 + 3 + 5 + 7) = 6666 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 6666 \cdot 16. \end{aligned}$$

2 boda

Aritmetička sredina traženog niza brojeva je $\frac{6666 \cdot 16}{24} = 4444$.

1 bod

Napomena: Traženi zbroj možemo izračunati na sljedeći način:

Ako zbrojimo sve znamenke na mjestu jedinica dobit ćemo $6(1 + 3 + 5 + 7) = 96$.

Isti zbroj dobijemo zbrajanjem desetica, stotica i tisućica.

Zato je ukupan zbroj svih 24 brojeva jednak $96 + 960 + 9600 + 96000 = 106656$.

Zadatak B-2.3.

Dora, Magdalena i Luka igraju "igru riječi". Dora je započela igru tako da je rekla jednu riječ. Magdalena je ponovila ono što je rekla Dora i dodala novu riječ. Luka je ponovio riječi koje su Dora i Magdalena izgovorile, te dodao novu riječ. I tako su dalje, redom Dora, Magdalena i Luka nastavili igru sve dok jedna osoba nije pogriješila. Ta je osoba, došavši na red za igru, uspješno ponovila 10 riječi, a onda zaboravila koja je sljedeća, tako da nije nastavila rečenicu. Odredite tko je pogriješio i koliko je ukupno riječi trebao točno ponoviti da bi se igra mogla nastaviti, ako je ukupan broj točno izrečenih riječi za vrijeme ove igre bio 4960.

Rješenje.

Neka je n broj riječi koje je trebala izgovoriti osoba koja je pogriješila (ponoviti $n - 1$ riječ i dodati jednu novu).

Dora, Magdalena i Luka su redom točno izgovorili $1, 2, \dots, n - 1$ riječi prije nego je netko pogriješio i rekao 10 od ukupno n riječi koje je trebao reći da se igra nastavi.

Tada je ukupan broj riječi $1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + 10 = 4960$.

2 boda

Odatle je

$$\frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} - 4950 = 0$$

1 bod

$$n^2 - n - 9900 = 0$$

$$n^2 - 100n + 99n - 9900 = 0$$

$$(n - 100)(n + 99) = 0.$$

1 bod

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $n = 100$.

Dakle, osoba koja je pogriješila trebala je točno ponoviti 99 riječi, odnosno izgovoriti ukupno 100 riječi.

1 bod

Kako je $100 = 33 \cdot 3 + 1$ zaključujemo da je Dora osoba koja je pogriješila.

1 bod

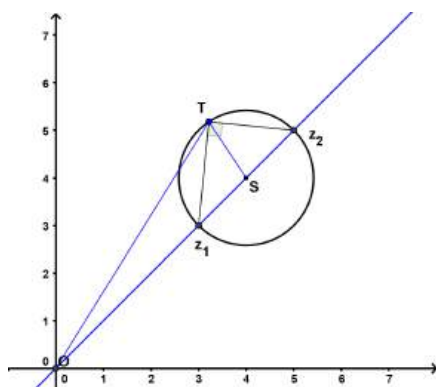
Zadatak B-2.4.

Među kompleksnim brojevima koji zadovoljavaju uvjet $|z - 4 - 4i| = \sqrt{2}$ odredite onaj koji ima najmanju apsolutnu vrijednost i onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost.

Rješenje.

$z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Iz $|z - 4 - 4i| = \sqrt{2}$ dobivamo $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

Skicirajmo skup rješenja u kompleksnoj ravnini.



1 bod

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ predstavlja udaljenost točke $Z(x, y)$ od ishodišta. Stoga na danoj kružnici tražimo najbližu i najudaljeniju točku od ishodišta. One se nalaze na pravcu OS koji prolazi kroz ishodište i središte kružnice, odnosno na pravcu $y = x$. Označimo ih sa Z_1 i Z_2 . Ukoliko je $T(a, b)$, $a \neq b$ proizvoljna točka na kružnici, zbog nejednakosti trokuta vrijedi:

$$|OS| \leq |OT| + |TS| \Leftrightarrow |OZ_1| + r \leq |OT| + r \Leftrightarrow |OZ_1| \leq |OT|.$$

To znači da je točka Z_1 najbliža ishodištu.

Točka Z_2 ima najveću udaljenost od ishodišta jer je $\overline{OZ_2}$ stranica nasuprot najvećeg kuta u trokutu OZ_2T ($\angle OTZ_2 = \angle OTZ_1 + 90^\circ$).

1 bod

Tražene kompleksne brojeve dobivamo rješavanjem sustava jednačbi

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

1 bod

Rješenja tog sustava su $(3, 3)$ i $(5, 5)$.

2 boda

Kompleksan broj koji zadovoljava uvjet $|z - 4 - 4i| = \sqrt{2}$ i ima najmanju apsolutnu vrijednost je $z_1 = 3 + 3i$, a onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost je broj $z_2 = 5 + 5i$.

1 bod

Napomena: Jedan bod učenik može dobiti:

- ako je samo točno nacrtao kružnicu direktno iz uvjeta $|z - 4 - 4i| = \sqrt{2}$, bez njezine jednačbe.
- ako nema skice, a napisana je jednačba kružnice.
- ako ima i jedno i drugo.

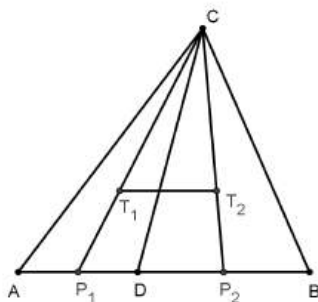
Učenici će intuitivno sa slike zaključiti da se rješenja nalaze na pravcu $y = x$. Ako se učenik pozove na nacrtanu sliku na kojoj se vidi da je uspoređivao udaljenost s još nekom točkom, da su najmanja i najveća udaljenost upravo u točkama Z_1 i Z_2 , ne treba inzistirati na detaljno navedenom argumentiranju. Ukoliko ima samo nacrtani pravac $y = x$, bez ikakvog komentara, a sve ostalo je točno izračunato, oduzeti 1 bod.

Zadatak B-2.5.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka D . Neka su T_1 i T_2 redom težišta trokuta CAD i CDB . Odredite duljinu dužine $\overline{T_1T_2}$ ako je $|AB| = 6$ cm.

Rješenje.

Neka su P_1 i P_2 redom polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$.



1 bod

Težište trokuta dijeli težišnicu trokuta u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta pa vrijedi

$$\frac{|CT_1|}{|CP_1|} = \frac{|CT_2|}{|CP_2|} = \frac{2}{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Prema poučku SKS o sličnim trokutima, trokuti CT_1T_2 i CP_1P_2 su slični s koeficijentom sličnosti $\frac{2}{3}$ (imaju zajednički kut, a stranice koje zatvaraju taj kut su proporcionalne).

1 bod

$$\text{Tada je } \frac{|T_1T_2|}{|P_1P_2|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |T_1T_2| = \frac{2}{3}|P_1P_2|.$$

1 bod

$$|P_1P_2| = |P_1D| + |DP_2| = \frac{|AD|}{2} + \frac{|DB|}{2} = \frac{|AB|}{2}.$$

1 bod

$$|T_1T_2| = \frac{2}{3}|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AB| = 2\text{cm}.$$

1 bod

Zadatak B-2.6.

Za koje vrijednosti koeficijenta c nultočke x_1, x_2 funkcije $f(x) = x^2 + x + c$ zadovoljavaju uvjet $\frac{2x_1^3}{2+x_2} + \frac{2x_2^3}{2+x_1} = -1$?

Rješenje.

Primjenom Vieteovih formula dobivamo $x_1 + x_2 = -1, x_1x_2 = c$.

1 bod

Pomnožimo li jednakost $\frac{2x_1^3}{2+x_2} + \frac{2x_2^3}{2+x_1} = -1$ s $(2+x_1)(2+x_2)$ dobivamo

$$4(x_1^3 + x_2^3) + 2(x_1^4 + x_2^4) + 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 4 = 0. \quad (*) \quad 2 \text{ boda}$$

Svaku zagradu u ovom izrazu prikazat ćemo pomoću zbroja i umnoška nultočaka kako bismo mogli primijeniti Vieteove formule.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -1 + 3c. \quad (**) \quad 2 \text{ boda}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 \quad 1 \text{ bod}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2(x_1x_2)^2 = 2c^2 - 4c + 1. \quad (***) \quad 2 \text{ boda}$$

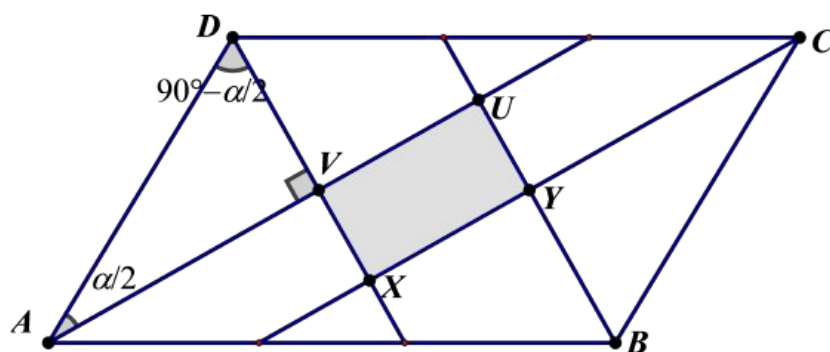
Uvrstimo li (**) i (***) u (*) dobivamo $4c^2 + 5c = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ i $c_2 = -\frac{5}{4}$.

2 boda

Zadatak B-2.7.

Neka je $ABCD$ paralelogram sa stranicama duljina $|AB| = a$ cm i $|BC| = b$ cm ($a > b$) i šiljastim kutom α . Površina četverokuta koji nastaje kao presjek simetrala unutarnjih kutova paralelograma iznosi 48cm^2 , a $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$. Izračunajte razliku $a - b$.

Rješenje.



1 bod

U trokutu AVD je $\angle VAD = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ADV = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Stoga je trokut AVD pravokutan, a kut $\angle UVX = 90^\circ$. Iz istog razloga su i ostali kutovi četverokuta $XYUV$ pravi kutovi, pa je taj četverokut pravokutnik.

1 bod

Iz trokuta AVD je $|DV| = b \sin \frac{\alpha}{2}$, $|AV| = b \cos \frac{\alpha}{2}$.

2 boda

Iz trokuta DXC je $|DX| = a \sin \frac{\alpha}{2}$.

1 bod

Iz trokuta ABU je $|AU| = a \cos \frac{\alpha}{2}$.

1 bod

Tada su duljine stranica pravokutnika:

$$|VX| = a \sin \frac{\alpha}{2} - b \sin \frac{\alpha}{2} = (a - b) \sin \frac{\alpha}{2} \text{ i } |VU| = a \cos \frac{\alpha}{2} - b \cos \frac{\alpha}{2} = (a - b) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

1 bod

$$\text{Površina pravokutnika je } P = |VX| \cdot |VU| = (a - b)^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

1 bod

$$\text{Kako je } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}, \text{ slijedi } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

1 bod

Traženu razliku računamo iz:

$$48 = (a - b)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow (a - b)^2 = 100 \Rightarrow a - b = 10 \text{ cm}.$$

1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu

$$8 \sin x \cos x \cos 2x > 1.$$

Rješenje.

$$4 \cdot 2 \cdot \sin x \cos x \cdot \cos 2x > 1 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x > 1 \Leftrightarrow$$

1 bod

$$2 \sin 4x > 1 \Leftrightarrow \sin 4x > \frac{1}{2}$$

2 boda

Posljednja nejednakost vrijedi ako je $4x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$,

2 boda

odnosno, $x \in \left\langle \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$.

1 bod

Zadatak B-3.2. (*vidi ispravak rješenja na kraju dokumenta)

Neka je $A = \frac{\cos 3 + \cos 5}{\cos 3 - \cos 5}$ i $B = \frac{\sin 5 + \sin 7}{\cos 5 - \cos 7}$.

Odredite realni broj x tako da je $A + Bx = 0$.

Rješenje.

$$A = \frac{\cos 3 + \cos 5}{\cos 3 - \cos 5} = \frac{2 \cos \frac{3+5}{2} \cos \frac{3-5}{2}}{-2 \sin \frac{3+5}{2} \sin \frac{3-5}{2}} = \frac{2 \cos 4 \cos (-1)}{-2 \sin 4 \sin (-1)} = \frac{2 \cos 4 \cos 1}{2 \sin 4 \sin 1} = \operatorname{ctg} 4 \operatorname{ctg} 1$$

2 boda

$$B = \frac{\sin 5 + \sin 7}{\cos 5 - \cos 7} = \frac{2 \sin \frac{5+7}{2} \cos \frac{5-7}{2}}{-2 \sin \frac{5+7}{2} \sin \frac{5-7}{2}} = \frac{2 \sin 6 \cos (-1)}{-2 \sin 6 \sin (-1)} = \frac{\cos 1}{\sin 1} = \operatorname{ctg} 1$$

2 boda

Iz $A + Bx = 0$ slijedi $\operatorname{ctg} 4 \operatorname{ctg} 1 + x \operatorname{ctg} 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\operatorname{ctg} 4 \operatorname{ctg} 1}{\operatorname{ctg} 4} = -\operatorname{ctg} 1$.

2 boda

Zadatak B-3.3.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^3 - 10n^2 + 28n - 19$ prost broj.

Rješenje.

Dani ćemo izraz rastaviti na faktore:

$$\begin{aligned} n^3 - 10n^2 + 28n - 19 &= \\ &= n^3 - n^2 - 9n^2 + 19n + 9n - 19 = \\ &= n^2(n - 1) - 9n(n - 1) + 19(n - 1) = \\ &= (n - 1)(n^2 - 9n + 19) \end{aligned}$$

2 boda

Ovaj umnožak može biti prost broj samo ako je jedan od faktora 1, a drugi faktor prost broj.

1 bod

Ako je $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$. Tada je $n^2 - 9n + 19 = 4 - 18 + 19 = 5$ što je prost broj.

1 bod

Ako je $n^2 - 9n + 19 = 1$, tada je $n^2 - 9n + 18 = 0 \Rightarrow (n - 3)(n - 6) = 0$

$\Rightarrow n = 3$ ili $n = 6$.

1 bod

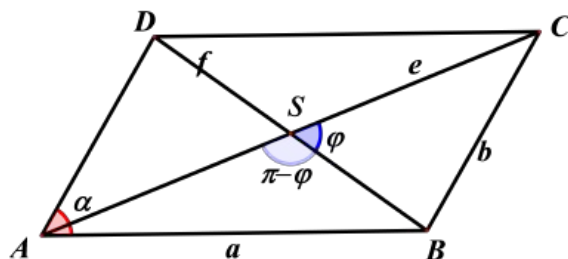
Za ove brojeve je prvi faktor $3 - 1 = 2$, odnosno $6 - 1 = 5$, što su prosti brojevi.

1 bod

Prema tome, rješenje su brojevi 2, 3 i 6.

Zadatak B-3.4.

Dokažite da je razlika kvadrata duljina stranica paralelograma uvijek manja od umnoška duljina dijagonala tog paralelograma.

Prvo rješenje.

Neka su a i b ($a \geq b$) duljine stranica, e i f ($e \geq f$) duljine dijagonala paralelograma $ABCD$. Šiljasti kut između stranica a i b označimo s α .

Po poučku o kosinusu je $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$, $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$.

2 boda

$$e \cdot f = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab \cos \alpha)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}$$

1 bod

Kako je $\cos^2 \alpha < 1$, izraz $-4a^2b^2 \cos^2 \alpha > -4a^2b^2$, pa je

1 bod

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha > a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2,$$

te vrijedi $e \cdot f > \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}$ odnosno

1 bod

$$e \cdot f > \sqrt{(a^2 - b^2)^2} = a^2 - b^2.$$

1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a, b duljine stranica paralelograma i neka je $a \geq b$, duljina veće dijagonale neka je e , a manje f , te neka je φ šiljasti kut između dijagonala.

U trokutu ABS vrijedi: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(\pi - \varphi).$ 1 bod

U trokutu BCS vrijedi: $b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos \varphi.$ 1 bod

Kako je $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, oduzimanjem gornjih jednakosti imamo: 1 bod
 $a^2 - b^2 = ef \cos \varphi.$ 1 bod

Kut φ je šiljasti, pa je $0 < \cos \varphi < 1$ što nam daje 1 bod
 $a^2 - b^2 < ef$, što smo i trebali dobiti. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $2016 \cdot x^{\log_{2017} x} = x^{2016}.$

Rješenje.

Izračunajmo logaritam po bazi 2017 od obje strane jednadžbe.

$\log_{2017}(2016 \cdot x^{\log_{2017} x}) = \log_{2017}(x^{2016}) \Rightarrow$
 $\log_{2017} 2016 + \log_{2017} x \cdot \log_{2017} x = 2016 \log_{2017} x$ 1 bod

Uvedimo supstituciju $t = \log_{2017} x. \Rightarrow t^2 - 2016t + \log_{2017} 2016 = 0 \quad (*)$. 1 bod

Iz $t = \log_{2017} x$ slijedi $x = 2017^t$, 1 bod
pa je umnožak rješenja početne jednadžbe

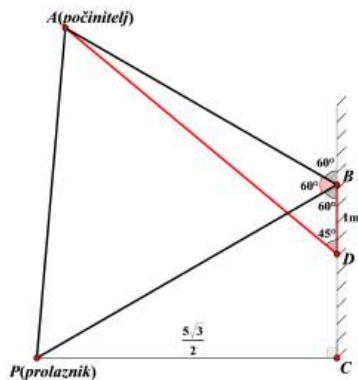
$$x_1 \cdot x_2 = 2017^{t_1} \cdot 2017^{t_2} = 2017^{t_1+t_2}.$$
 1 bod

Iz jednadžbe (*) prema Vièteovim formulama računamo $t_1 + t_2 = 2016$, 1 bod
pa je traženi umnožak jednak 2017^{2016} . 1 bod

Zadatak B-3.6.

Tijekom novogodišnjeg slavlja neodgovorna je osoba ispalila dva hica. Jednim je hicem lakše ozlijeđen slučajni prolaznik. Forenzičari moraju otkriti s kojeg su mjesta ispaljena ta dva hica. Otkrili su u zidu obližnje zgrade trag metka (crna točka) koji se odbio i pogodio prolaznika $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ metra udaljenog od zida. Prema tragu, zaključili su da je putanja metka zatvarala 60° sa zidom i da se metak pod istim kutom odbio. Drugi je metak ostao u zidu 1 metar udaljen od traga prvog metka, a njegova je putanja zatvarala 45° sa zidom. Metak je u odnosu na počinitelja s iste strane kao i prolaznik. Koliko je prolaznik bio udaljen od počinitelja? (Putanje oba metka su u istoj ravnini, paralelnoj s pločnikom, a zid je okomit na pločnik.)

Rješenje.



1 bod

Iz pravokutnog trokuta PCB računamo: $\sin 60^\circ = \frac{|PC|}{|PB|} \Rightarrow |PB| = 5$.

1 bod

$\sphericalangle DAB = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$.

1 bod

Sada iz trokuta ADB koristeći poučak o sinusima možemo izračunati $|AB|$.

$$\frac{|AB|}{\sin 45^\circ} = \frac{|BD|}{\sin 15^\circ}$$

1 bod

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

2 boda

$$|AB| = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{ili } \sqrt{3} + 1$$

1 bod

Nadalje, iz trokuta BAP pomoću poučka o kosinusu slijedi:

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= |AB|^2 + |PB|^2 - 2|AB| \cdot |PB| \cdot \cos 60^\circ \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 + 25 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot 5 \cdot 0.5 \\ &= 4 + 2\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3} - 5 \end{aligned}$$

2 boda

$$|AP| = \sqrt{24 - 3\sqrt{3}}$$

1 bod

Zadatak B-3.7.

Neka su α , β i γ kutovi trokuta. Ako je

$$\frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \sqrt{3},$$

odredite kut α .

Prvo rješenje.

Neka su a, b i c stranice trokuta, redom nasuprot kutova α, β i γ . Primijenimo poučak o sinusima.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2R}, \\ \frac{b}{\sin \beta} &= 2R \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{2R}, \\ \frac{c}{\sin \gamma} &= 2R \Rightarrow \sin \gamma = \frac{c}{2R}.\end{aligned}$$

2 boda

Tada početna jednakost prelazi u

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2} &= \sqrt{3} \Rightarrow \\ \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} & \\ \frac{c^2 + b^2 - a^2}{bc} &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

2 boda

1 bod

Slijedi $c^2 + b^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. 1 bod

Prema poučku o kosinusu $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow$ 1 bod

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 boda

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.

Zapišimo $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$. 1 bod

$$\frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} =$$

1 bod

$$\frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} =$$

2 boda

Ako u brojniku grupiramo prvi i četvrti pribrojnik, te drugi i treći pribrojnik, dobivamo

$$\frac{\sin^2 \gamma \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} =$$

2 boda

$$\frac{2 \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} = -2 \cos (\beta + \gamma)$$

1 bod

Iz uvjeta zadatka slijedi $-2 \cos (\beta + \gamma) = \sqrt{3}, \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{5\pi}{6}$. 2 boda

Mjera traženog kuta α je $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Realni brojevi x, y su rješenja sustava jednadžbi

$$2\sqrt{2}x \cos t + 3y \sin t = 6\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}x \sin t - 3y \cos t = 0.$$

Za koje je vrijednosti parametra $t \in \langle 0, \pi \rangle$ umnožak xy jednak 3?

Rješenje.

$$2\sqrt{2}x \cos t + 3y \sin t = 6\sqrt{2} / \cdot \cos t$$

$$2\sqrt{2}x \sin t - 3y \cos t = 0 / \cdot \sin t$$

$$2\sqrt{2}x \cos^2 t + 3y \sin t \cos t = 6\sqrt{2} \cos t$$

$$2\sqrt{2}x \sin^2 t - 3y \cos t \sin t = 0.$$

Zbrajanjem ovih dviju jednadžbi dobijemo $x = 3 \cos t$.

1 bod

Primijetimo da vrijedi $\cos t \neq 0$, jer u protivnom je $x = 0$ i $x \cdot y \neq 3$.

1 bod

Nakon toga iz druge jednadžbe slijedi:

$$6\sqrt{2} \cos t \sin t - 3y \cos t = 0 / : 3 \cos t$$

$$y = 2\sqrt{2} \sin t$$

1 bod

$$x \cdot y = 3 \Rightarrow 3 \cos t \cdot 2\sqrt{2} \sin t = 3$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} \sin 2t = 3 \Rightarrow \sin 2t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1 bod

Dakle, $2t = \frac{\pi}{4}$ ili $2t = \frac{3\pi}{4}$, odnosno $t \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right\}$.

2 boda

Zadatak B-4.2.

Odredite koeficijent uz a^4 u izrazu $2 + a + (a + 1)^2 + (a + 1)^3 + \dots + (a + 1)^{2017}$.

Prvo rješenje.

Izraz predstavlja zbroj geometrijskog niza kod kojeg je $a_1 = 1$, $q = a + 1$.

2 boda

$$1 + (a + 1) + (a + 1)^2 + (a + 1)^3 + \cdots + (a + 1)^{2017} = \frac{(a + 1)^{2018} - 1}{a}.$$

2 boda

Koeficijent uz a^4 bit će onaj koji u izrazu $(a + 1)^{2018}$ stoji uz a^5 , a to je

1 bod

$$\binom{2018}{2017-4} = \binom{2018}{2013} = \binom{2018}{5}.$$

1 bod

Drugo rješenje.

Koeficijenti uz a^4 se pojavljuju u izrazima $(a + 1)^4, (a + 1)^5, \dots, (a + 1)^{2017}$ i to su redom brojevi:

$$\binom{4}{0}, \binom{5}{1}, \binom{6}{2}, \dots, \binom{2017}{2013}.$$

1 bod

Koristeći svojstvo $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ računamo traženi zbroj.

1 bod

Pritom na početku primijenimo $\binom{4}{0} = \binom{5}{0}$.

1 bod

$$\begin{aligned} & \underbrace{\binom{5}{0} + \binom{5}{1}}_{\binom{6}{1}} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} = \\ & \underbrace{\binom{6}{1} + \binom{6}{2}}_{\binom{7}{2}} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} = \\ & \underbrace{\binom{7}{2} + \binom{7}{3}}_{\binom{8}{3}} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} = \cdots = \\ & \underbrace{\binom{2016}{2011} + \binom{2016}{2012}}_{\binom{2017}{2012}} + \binom{2017}{2013} = \binom{2017}{2012} + \binom{2017}{2013} = \binom{2018}{2013} \end{aligned}$$

1 bod

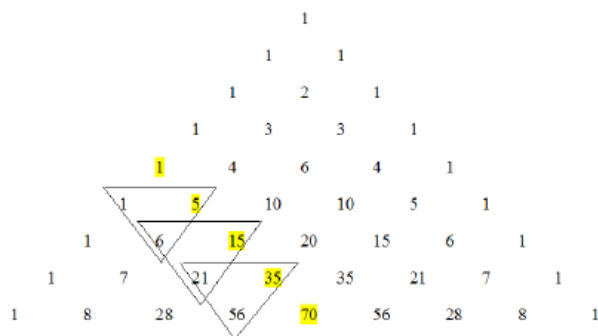
2 boda

Traženi je zbroj jednak $\binom{2018}{2013}$ ili $\binom{2018}{5}$.

Treće rješenje.

Učenici su mogli promatrati Pascalov trokut i uočiti da je traženi zbroj jednak zbroju binomnih koeficijenata koji su na dijagonali u Pascalovom trokutu:

$$\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{2017}{2013} = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + \cdots + \binom{2017}{2013}. \quad 1 \text{ bod}$$



2 boda

Uočavamo da je zbroj prvih k danih koeficijenata na označenoj dijagonali jednak k -tom koeficijentu u sljedećem redu Pascalovog trokuta, što je posljedica svojstva zbrajanja binomnih koeficijenata. Iz toga se lako zaključuje da je traženi zbroj jednak $\binom{2018}{2013}$ ili $\binom{2018}{5}$.

3 boda

Zadatak B-4.3.

Niz brojeva definiran je s $a_n = n^4 - 360n^2 + 400$. Izračunajte zbroj svih članova toga niza koji su prosti brojevi.

Rješenje.

Opći član možemo prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} a_n &= n^4 - 360n^2 + 400 = (n^4 + 40n^2 + 400) - 400n^2 \\ &= (n^2 + 20)^2 - (20n)^2 = (n^2 - 20n + 20)(n^2 + 20n + 20). \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Ovaj izraz će biti prost broj jedino ako je jedna od zagrada za neki prirodan broj n jednaka jedan, a druga je za taj isti n jednaka nekom prostom broju.

Ako je $n^2 - 20n + 20 = 1$, onda je $n^2 - 20n + 19 = 0$. Ta jednadžba ima dva pozitivna rješenja, $n = 1$ i $n = 19$. 1 bod

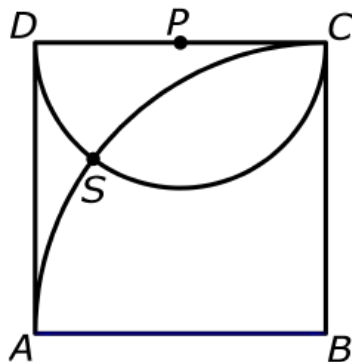
Za $n = 1$ izraz $n^2 + 20n + 20 = 1 + 20 + 20 = 41$, a to je prost broj. 1 bod

Za $n = 19$ izraz $n^2 + 20n + 20 = 19^2 + 20 \cdot 19 + 20 = 761$, a to je prost broj. 1 bod

Ako je $n^2 + 20n + 20 = 1$, onda je $n^2 + 20n + 19 = 0$. Ta jednadžba ima negativna rješenja, pa su jedini prosti članovi niza 41 i 761. Njihov je zbroj 802. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 2, a točka P je polovište stranice $\overline{CD}$. Točka S je sjecište kružnice sa središtem P polumjera 1 i kružnice sa središtem B polumjera 2. Odredite udaljenost točke S od pravca AD .

Prvo rješenje.

Smjestimo li kvadrat u koordinatni sustav tako da je ishodište u točki A , a apscisa pravca AB , tražena je udaljenost apscisa točke S .

Vrhovi kvadrata s $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ i $D(0,2)$, a točka P ima koordinate $(1,2)$. 1 bod

Koordinate točke S dobit ćemo kao presjek kružnica, odnosno rješenje sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + y^2 &= 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

2 boda

Oduzimanjem jednadžbi sustava slijedi $y = \frac{1}{2}x + 1$. 1 bod

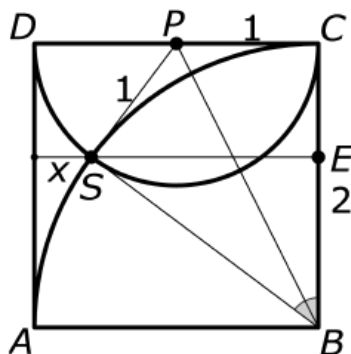
Iz prve jednadžbe sustava tada dobivamo:

$$\frac{5}{4}x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ili } x = \frac{2}{5}.$$

1 bod

$x = 2$ je apscisa točke C , a tražena apscisa točke S , odnosno njena udaljenost od pravca AD je $\frac{2}{5}$. 1 bod

Drugo rješenje.



Neka je kut $\alpha = \angle PBC$. Kako je $|PS| = |PC| = 1$ i $|BS| = |BC| = 2$, trokuti PSB i PCB su sukladni te je kut $\angle SBC = 2\alpha$.

2 boda

Iz trokuta PBC je $|BP| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

1 bod

Iz trokuta SBE je $\sin 2\alpha = \frac{2-x}{2}$.

1 bod

Odnosno, $2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 2 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$.

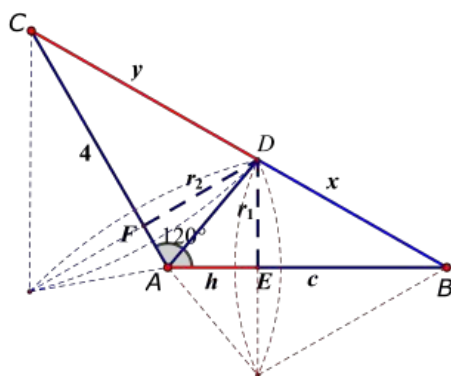
1 bod

Napomena: Ista se jednadžba kao i u prvom rješenju može dobiti koristeći Pitagorin poučak u pravokutnim trokutima STP i SRB , gdje je točka T nožište okomice iz S na CD , a točka R nožište te okomice na AB .

Zadatak B-4.5. (*vidi ispravak rješenja na kraju dokumenta)

U trokutu ABC je $a = |BC| = \sqrt{21}\text{cm}$, $b = |AC| = 4\text{cm}$ i $\alpha = \angle BAC = 120^\circ$. Na stranici $\overline{BC}$ odredite točku D tako da obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ABD oko stranice AB bude jednak obujmu rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ACD oko stranice AC . U kojem omjeru točka D dijeli stranicu a ?

Rješenje.



Obujam koji nastaje pri rotaciji trokuta ABD oko pravca AB je

$$V_1 = \frac{r_1^2 \pi h}{3} + \frac{r_1^2 \pi (c - h)}{3} = \frac{r_1^2 c \pi}{3}.$$

Analogno, $V_2 = \frac{r_2^2 b \pi}{3}$ je obujam koji nastaje pri rotaciji trokuta ACD oko pravca AC .

1 bod

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{r_2^2 c \pi}{3} = \frac{r_2^2 b \pi}{3} \Rightarrow \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{c}{b} \text{ ili } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}}. \quad (*) \quad 1 \text{ bod}$$

Po poučku o kosinusu izračunamo duljinu stranice c .

$$21 = 16 + c^2 + 4c \Rightarrow c^2 + 4c - 5 = 0 \Rightarrow c = 1 \text{ cm.}$$

1 bod

$$\text{Sada je } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}} = \frac{2}{1} \text{ ili } \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{c}{b}} = \frac{1}{2}.$$

1 bod

Iz pravokutnih trokuta DEB i CFD računamo traženi omjer:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{r_1}{\sin \beta}}{\frac{r_2}{\sin \gamma}} = \frac{r_1 \sin \gamma}{r_2 \sin \beta}. \quad 1 \text{ bod}$$

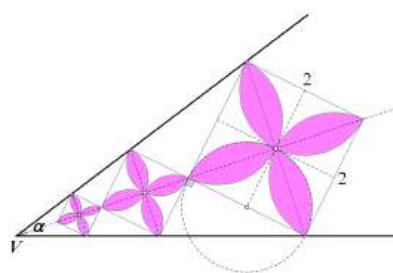
Zatim primijenimo poučak o sinusu i omjer (*):

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1 \sin \gamma}{r_2 \sin \beta} = \frac{r_1 \cdot c}{r_2 \cdot b} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

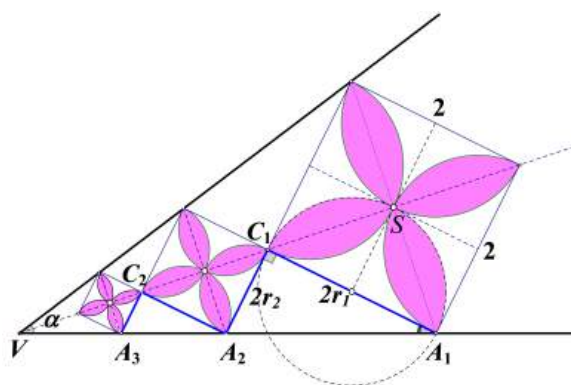
Dakle, točka D dijeli stranicu a u omjeru $1 : 2$.

Zadatak B-4.6.

U kut α upisan je beskonačan niz kvadrata. Svakom je kvadratu upisan cvjetić s četiri jednake latice kao na slici. Dva nasuprotna vrha kvadrata su na krakovima kuta, a preostala dva na simetrali kuta α . Duljina stranice početnog, najvećeg kvadrata iznosi 2. Odredite mjeru kuta α ako je zbroj površina svih upisanih cvjetića $3(\pi - 2)$.



Rješenje.



Površina jedne latice početnog cvjetića je dvostruka površina kružnog odsječka od četvrtine kruga:

$$P_{lat} = 2 \left(\frac{r_1^2 \pi}{4} - \frac{r_1^2}{2} \right) = \frac{r_1^2}{2} (\pi - 2). \quad 1 \text{ bod}$$

Površina početnog cvjetića je $P_1 = 4P_{lat} = 2r_1^2(\pi - 2) = 2(\pi - 2)$. 1 bod

Trokut VSA_1 je pravokutan, pa je $\sphericalangle VA_1S = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 1 bod

a kut $\sphericalangle A_2A_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Analogno zaključujemo i za niz kutova u pravokutnim trokutima koji slijede:

$$\sphericalangle A_3A_2C_2 = \sphericalangle A_4A_3C_3 = \dots = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Stoga su trokuti $\triangle A_2A_1C_1$, $\triangle A_3A_2C_2$, $\triangle A_4A_3C_3, \dots$ slični s koeficijentom sličnosti $\frac{2r_2}{2r_1} = \frac{r_2}{r_1} < 1$. 1 bod

Ako su svi polumjeri latica u omjeru $\frac{r_2}{r_1} < 1$, njihove su površine u omjeru $q = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. 1 bod

To znači da površine cvjetića čine geometrijski red s kvocijentom $q < 1$ čiji je zbroj $P = \frac{P_1}{1-q}$. 1 bod

Tada je

$$3(\pi - 2) = \frac{2(\pi - 2)}{1 - q} \Rightarrow 1 - q = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz pravokutnog trokuta $A_2A_1C_1$ imamo:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2r_2}{2r_1} = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

$$45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-4.7.

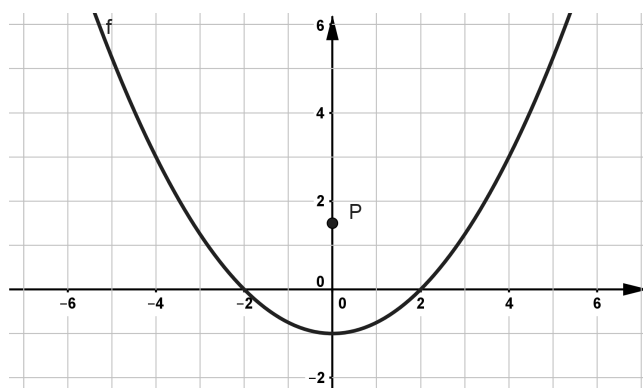
Neka je S skup svih kompleksnih brojeva za koje vrijedi $|z| = \operatorname{Im}(z + 2i)$. Prikažite skup S u kompleksnoj ravnini i odredite površinu trokuta kojemu je jedan vrh točka $P(0, \frac{3}{2})$, a druga dva vrha su točke skupa S koje su najbliže točki P .

Rješenje.

Uvrstimo $z = x + yi$ u $|z| = \operatorname{Im}(z + 2i)$. Tada je

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \operatorname{Im}(x + yi + 2i) \\ x^2 + y^2 &= (y + 2)^2 \\ x^2 &= 4y + 4. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, skup točaka koje zadovoljavaju dani uvjet leže na paraboli $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.



2 boda

Odredimo koje su točke $T(x, y) = (x, \frac{1}{4}x^2 - 1)$ na paraboli najbliže točki $P(0, \frac{3}{2})$.

Udaljenost točke T od točke P je

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}}. \quad 1 \text{ bod}$$

Tražimo x za koji funkcija $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}$ poprima najmanju vrijednost.

$$x^2 = -\frac{b}{2a} = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 = -\frac{1}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Točke parabole najbliže točki P su: $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $B\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 1 bod

$$|AB| = 2\sqrt{2}, \quad v = |y_P - y_A| = 2. \quad 2 \text{ boda}$$

$$P = \frac{|AB| \cdot v}{2} = 2\sqrt{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-3.2.*Rješenje*

treba pisati kao što je označeno žuto. (U originalu se pojavljuje na tri mjesta $\text{ctg } 4$ umjesto $\text{ctg } 1$: kod x i u nazivniku razlomka, pa naravno i u rješenju)

$$B = \frac{\sin 5 + \sin 7}{\cos 5 - \cos 7} = \frac{2 \sin \frac{5+7}{2} \cos \frac{5-7}{2}}{-2 \sin \frac{5+7}{2} \sin \frac{5-7}{2}} = \frac{2 \sin 6 \cos(-1)}{-2 \sin 6 \sin(-1)} = \frac{\cos 1}{\sin 1} = \text{ctg } 1 \quad 2 \text{ boda}$$

Iz $A + Bx = 0$ slijedi $\text{ctg } 4 \cdot \text{ctg } 1 + x \cdot \text{ctg } 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\text{ctg } 4 \cdot \text{ctg } 1}{\text{ctg } 1} = -\text{ctg } 4.$ 2 boda

Zadatak B-4.5. u rj dva puta piše iza strelice r_2 , a treba prvi put r_1 .

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{r_2^2 c \pi}{3} = \frac{r_2^2 b \pi}{3} \Rightarrow \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{c}{b} \text{ ili } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}}.$$