

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

$$\begin{aligned} 1. & 209 \cdot (8 + 2 \cdot 6) - 972 : 9 + (432 + 209 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 0) : 4 - 2163 = \\ & = 209 \cdot (8 + 12) - 972 : 9 + (432 + 0) : 4 - 2163 & 2 \text{ BODA} \\ & = 209 \cdot 20 - 972 : 9 + 432 : 4 - 2163 & 2 \text{ BODA} \\ & = 4180 - 108 + 108 - 2163 & 3 \text{ BODA} \\ & = 4072 + 108 - 2163 & 1 \text{ BOD} \\ & = 4180 - 2163 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2017 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik pogriješio u nekom dijelu postupka, ne dobiva bodove za taj dio postupka i za konačno rješenje, a ostalo se boduje slijedeći grešku.

2. Prvi način:

Svakih 200 skokova Skočko napreduje 100 m ($100 \cdot 3 - 100 \cdot 2 = 300 - 200 = 100$). 3 BODA
 $1574 : 200 = 7$ 1 BOD
174

U 1400 skokova napraviti će 7 serija naprijed-natrag skokova, odnosno prijeći će 700 m. 1 BOD
Ostatak od 174 skoka napraviti će na sljedeći način: 100 skokova naprijed i 74 natrag,
a to su 152 m ($100 \cdot 3 - 74 \cdot 2 = 300 - 148 = 152$). 3 BODA

Nakon 1574 skoka Skočko se nalazi 852 m ($700 + 152 = 852$) od mjesta A. 2 BODA
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Niz skokova (naprijed ili natrag)	Udaljenost od mjesta A (m)	Broj skokova	
100 naprijed	$100 \cdot 3 = 300$	100	1 BOD
100 natrag	$300 - 100 \cdot 2 = 300 - 200 = 100$	200	1 BOD
100 naprijed	$100 + 300 = 400$	300	
100 natrag	$400 - 200 = 200$	400	1 BOD
100 naprijed	$200 + 300 = 500$	500	
100 natrag	$500 - 200 = 300$	600	1 BOD
100 naprijed	$300 + 300 = 600$	700	
100 natrag	$600 - 200 = 400$	800	1 BOD
100 naprijed	$400 + 300 = 700$	900	
100 natrag	$700 - 200 = 500$	1000	
100 naprijed	$500 + 300 = 800$	1100	
100 natrag	$800 - 200 = 600$	1200	
100 naprijed	$600 + 300 = 900$	1300	
100 natrag	$900 - 200 = 700$	1400	1 BOD
100 naprijed	$700 + 300 = 1000$	1500	1 BOD
74 natrag	$1000 - 74 \cdot 2 = 1000 - 148 = 852$	1574	2 BODA

Klokan Skočko je nakon 1574 skoka bio udaljen 852 m od mjesta A.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno rješenje bez postupka boduje se s 4 boda.

3. Prvi način:

Marija je na prodanim jabukama zaradila 434 kn, znači da je prodala $434 : 7 = 62$ kg.

2 BODA

Prije početka prodaje Marija je imala $62 + 102 = 164$ kg jabuka.

2 BODA

Ljiljana je na prodanim jabukama zaradila 875 kn, znači da je prodala $875 : 7 = 125$ kg.

2 BODA

Prije početka prodaje Ljiljana je imala $125 + 76 = 201$ kg jabuka.

2 BODA

Urod jabuka iz njihovog voćnjaka bio je 164 kg + 201 kg = 365 kg.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Marija je na prodanim jabukama zaradila 434 kn, znači, prodala je $434 : 7 = 62$ kg.

2 BODA

Ljiljana je na prodanim jabukama zaradila 875 kn, znači, prodala je $875 : 7 = 125$ kg.

2 BODA

Obje su prodale ukupno 62 kg + 125 kg = 187 kg.

2 BODA

Nisu uspjele prodati 102 kg + 76 kg = 178 kg.

2 BODA

Urod jabuka iz njihovog voćnjaka bio je 187 kg + 178 kg = 365 kg.

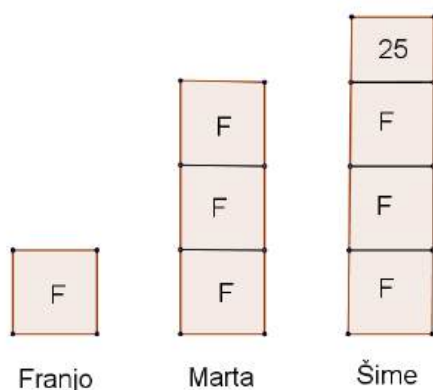
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Prikažimo rješenje grafički:

2 BODA



Nadalje, $7 \cdot F + 25 = 186$.

2 BODA

pa je $7 \cdot F = 186 - 25 = 161$.

2 BODA

Dakle, $F = 161 : 7 = 23$.

1 BOD

Franjo je skupio 23 kune.

1 BOD

Marta je skupila $3 \cdot 23 = 69$ kuna.

1 BOD

Šime je skupio $69 + 25 = 94$ kune.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je x novčani iznos koji je skupio Franjo.

Tada je Marta skupila novčani iznos $3x$, a Šime $3x + 25$.

2 BODA

Svi troje skupili su 186 kn pa vrijedi $x + 3x + 3x + 25 = 186$.

1 BOD

Dalje je $7x + 25 = 186$

1 BOD

$7x = 186 - 25$

1 BOD

$$7x = 161$$

1 BOD

$$x = 161 : 7 = 23$$

1 BOD

Franjo je skupio 23 kn, Marta $3 \cdot 23 = 69$ kn, a Šime $69 + 25 = 94$ kn.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Samo rješenja za pojedinačne iznose, bez ikakvog postupka, boduju se 3 boda.

Ako je učenik do rješenja došao uzastopnim približavanjem, a iz njegovog zapisa je vidljiv pravilan postupak rješavanja, dobiva svih 10 bodova.

5. U četveroznamenkastom broju mogu se pojaviti:

2 znamenke 4 i 2 znamenke 3 ili

3 znamenke 4 i jedna znamenka 3 ili

3 znamenke 3 i jedna znamenka 4.

2 BODA

Mogući brojevi su:

3344, 3443, 3434, 4433, 4343, 4334

3 BODA

4443, 4344, 4434, 3444

2 BODA

3334, 3433, 3343, 4333

2 BODA

Takvih brojeva ima 14.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

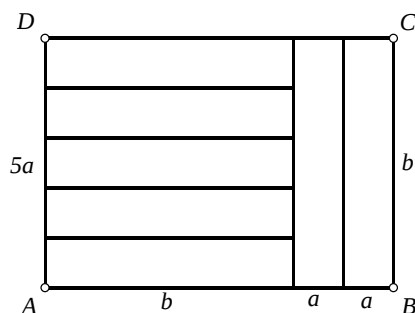
Napomena: Ispisivanjem svih 14 brojeva i dobrim prebrojavanjem dobiva se 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:



Neka je duljina kraće stranice sukladnih pravokutnika jednaka a , a duljina dulje stranice neka je b .
Tada u pravokutniku $ABCD$ vrijedi:

$$|BC| = |AD|, \text{ tj. } b = 5a \quad 1 \text{ BOD}$$

i

$$|AB| = b + a + a = 5a + a + a = 7a. \quad 2 \text{ BODA}$$

Površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je 560 cm^2 , a možemo ju izračunati kao umnožak duljina stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, tj. vrijedi:

$$|AB| \cdot |AD| = 560 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$7a \cdot 5a = 560 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$35 \cdot a \cdot a = 560 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a \cdot a = 560 : 35 \quad 1 \text{ BOD}$$

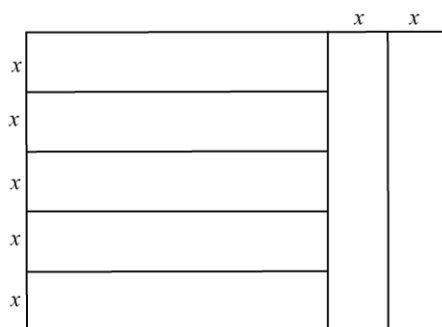
$$a \cdot a = 16, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odakle je } a = 4 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Tada je } b = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



$$\text{Površina svakog od 7 sukladnih pravokutnika je } 560 \text{ cm}^2 : 7 = 80 \text{ cm}^2. \quad 3 \text{ BODA}$$

Neka je x duljina kraće stranice sukladnih pravokutnika.

$$\text{Druga, dulja stranica ima duljinu } 5x. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina pravokutnika se računa kao umnožak duljina susjednih stranica pa vrijedi:

$$x \cdot 5x = 80 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$x \cdot x = 80 : 5 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x \cdot x = 16, \quad 1 \text{ BOD}$$

odakle je $x = 4 \text{ cm}$. 1 BOD

Tada je duljina dulje stranice sukladnih pravokutnika $5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako se na skici ili u rješenju ne pojavljuje objašnjenje što je x , treba oduzeti 1 bod.

2. Može se uočiti da se u nizu ciklički ponavlja skupina sastavljena od šest simbola $\diamond, \clubsuit, \blacktriangle, \heartsuit, \spadesuit, \odot$.

3 BODA

Budući da je $208 : 6 = 34$ i ostatak 4, zaključujemo da je skupina simbola $\diamond, \clubsuit, \blacktriangle, \heartsuit, \spadesuit, \odot$ u tom dijelu niza sadržana 34 puta. 3 BODA

Nakon 34 skupine napisana su još 4 simbola; $\diamond, \clubsuit, \blacktriangle, \heartsuit$. 2 BODA

Dakle, 208. simbol u nizu je $\diamond$ (napisan nakon simbola $\blacktriangle$). 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Za zapisivanje jedinog jednoznamenkastog višekratnika broja 7 potrebna je jedna znamenka.

1 BOD

Za zapisivanje 13 dvoznamenkastih višekratnika broja 7 (14, 21, 28, ..., 91, 98) potrebno je

$$13 \cdot 2 = 26 \text{ znamenaka.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Za zapisivanje 128 troznamenkastih višekratnika broja 7 (105, 112, ..., 987, 994) potrebne su

$$128 \cdot 3 = 384 \text{ znamenke.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Za zapisivanje četveroznamenkastih višekratnika broja 7 (1001, 1008, ..., 9989, 9996) potrebne su

$$1286 \cdot 4 = 5144 \text{ znamenke.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Ukupan zbroj znamenaka jednoznamenkastih, dvoznamenkastih, troznamenkastih i četveroznamenkastih višekratnika broja 7 premašuje broj 2017 ($1 + 26 + 384 + 5144 = 5555$), a

zbroj znamenaka jednoznamenkastih, dvoznamenkastih i troznamenkastih višekratnika broja 7

iznosi $1 + 26 + 384 = 411$ pa je 2017. znamenka u nizu jedna od znamenaka nekog

četveroznamenkastog višekratnika broja 7. 1 BOD

$2017 - 411 = 1606$ je broj preostalih znamenaka odnosno ukupan broj znamenaka napisanih

četveroznamenkastih višekratnika. 1 BOD

$$1606 : 4 = 401$$

00

6

2

2017. znamenka je 2. znamenka u 402. četveroznamenkastom višekratniku broja 7. 1 BOD

402. četveroznamenkasti višekratnik broja 7 je ukupno 544. ($402 + 1 + 13 + 128 = 544$) višekratnik broja 7 i to je broj $544 \cdot 7 = 3808$, a njegova druga znamenka je 8. 2 BODA

2017. znamenka u zadanom nizu je znamenka 8. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Za zapisivanje jedinog jednoznamenkastog višekratnika broja 7 potrebna je jedna znamenka.

1 BOD

Za zapisivanje 13 dvoznamenkastih višekratnika broja 7 (14, 21, 28, ..., 91, 98) potrebno je

$$13 \cdot 2 = 26 \text{ znamenaka.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Za zapisivanje 128 troznamenkastih višekratnika broja 7 (105, 112, ..., 987, 994) potrebne su
 $128 \cdot 3 = 384$ znamenke. 1 BOD

Za zapisivanje četveroznamenkastih višekratnika broja 7 (1001, 1008, ..., 9989, 9996) potrebne su
 $1286 \cdot 4 = 5144$ znamenke. 1 BOD

Ukupan zbroj znamenaka jednoznamenkastih, dvoznamenkastih, troznamenkastih i
 četveroznamenkastih višekratnika broja 7 premašuje broj 2017 ($1 + 26 + 384 + 5144 = 5555$), a
 zbroj znamenaka jednoznamenkastih, dvoznamenkastih i troznamenkastih višekratnika broja 7
 iznosi $1 + 26 + 384 = 411$ pa je 2017. znamenka u nizu jedna od znamenaka nekog
 četveroznamenkastog višekratnika broja 7. 1 BOD

$2017 - 411 = 1606$ je broj preostalih znamenaka odnosno ukupan broj znamenaka napisanih
 četveroznamenkastih višekratnika. 1 BOD

$$1606 : 4 = 401$$

00

6

2

2017. znamenka je 2. znamenka u 402. četveroznamenkastom višekratniku broja 7. 1 BOD

401. četveroznamenkasti višekratnik broja 7 je ukupno 543. ($401 + 1 + 13 + 128 = 543$) višekratnik
 broja 7 i to je broj $543 \cdot 7 = 3801$, sljedeći višekratnik je 3808 i njegova druga znamenka je 8.

2 BODA

2017. znamenka u zadanom nizu je znamenka 8. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Jabuke su najjeftinije pa vrijedi sljedeće:

1 kg jabuka košta kn.

1 kg krušaka košta kn + 1 kn i 50 lp.

1 kg jagoda košta kn. 2 BODA

3 kg jabuka košta kn.

2 kg krušaka košta kn + 3 kn.

Sve ukupno košta 8 + 3 kn. 3 BODA

$$8 \text{ } + 3 = 59 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8 \text{ } = 59 - 3 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8 \text{ } = 56 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{} = 56 : 8 = 7 \quad 1 \text{ BOD}$$

Kilogram krušaka košta 7 kn + 1 kn 50 lp = 8 kn 50 lp. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Jabuke su najjeftinije pa vrijedi sljedeće:

1 kg jabuka košta x kuna.

1 kg krušaka košta x kn + 1 kn i 50 lp.

1 kg jagoda košta $3x$ kuna. 2 BODA

3 kg jabuka košta $3x$ kuna.

2 kg krušaka košta $2x + 3$ kuna.

Sve ukupno košta $8x + 3$ kuna. 3 BODA

$$8x + 3 = 59 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8x = 59 - 3 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8x = 56 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 56 : 8 = 7$$

1 BOD

Kilogram krušaka košta 7 kn + 1 kn 50 lp = 8 kn 50 lp.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Jabuke su najjeftinije pa vrijedi sljedeće:

1 kg jabuka košta x lipa1 kg krušaka košta $(x + 150)$ lp.1 kg jagoda košta $3x$ lp.

2 BODA

Tada vrijedi: $3x + 2 \cdot (x + 150) + 3x = 5900$

1 BOD

$$3x + 2x + 300 + 3x = 5900$$

2 BODA

$$8x + 300 = 5900$$

1 BOD

$$8x = 5900 - 300$$

1 BOD

$$8x = 5600$$

1 BOD

$$x = 5600 : 8 = 700$$

1 BOD

Kilogram krušaka košta 700 lp + 150 lp = 850 lp = 8 kn 50 lp.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Trokut se dobije ako krajnje točke bilo koje dužine s jednog pravca povežemo s bilo kojom točkom na drugom pravcu.

Na prvom pravcu je šest točaka i one određuju $6 \cdot 5 : 2 = 15$ dužina.

2 BODA

Svaka od tih dužina može se spojiti sa svakom od pet točaka s drugog pravca. Trokuta čija je jedna stranica na prvom, a treći vrh na drugom pravcu ima $15 \cdot 5 = 75$.

2 BODA

Na drugom je pravcu pet točaka i one određuju $5 \cdot 4 : 2 = 10$ dužina.

2 BODA

Ako njih povežemo sa šest točaka na prvom pravcu, dobijemo $10 \cdot 6 = 60$ trokuta čija je stranica na drugom, a treći vrh na prvom pravcu.

2 BODA

Ukupan broj trokuta je $75 + 60 = 135$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Jani je nedostajala $\frac{1}{3}$ cijene šešira, Danieli $\frac{1}{4}$, a Hani $\frac{1}{5}$ cijene šešira, 2 BODA

što znači da im je ukupno nedostajalo

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$ cijene jednoga šešira. 3 BODA

Kad je šešir pojeftinio 94 kn, to je sestrama pokrilo nedostatnu svotu, tj.

vrijedi da je $\frac{47}{60}$ cijene šešira jednako $3 \cdot 94 = 282$ kn. 2 BODA

Tada je $\frac{1}{60}$ cijene šešira jednaka $282 : 47 = 6$ kn, 2 BODA

a cijena šešira je $60 \cdot 6 = 360$ kn. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je x cijena šešira (u kunama) prije sniženja.

Jana ima $\frac{2}{3}x$, Daniela $\frac{3}{4}x$, a Hana $\frac{4}{5}x$ kuna. 3 BODA

Nakon sniženja cijena tri šešira je $3(x - 94)$. 1 BOD

Vrijedi: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x - 94)$ 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo redom:

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3x - 282$$

$$\frac{40}{60}x + \frac{45}{60}x + \frac{48}{60}x = \frac{180}{60}x - 282 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{47}{60}x = 282 \quad / : 47 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{60}x = 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 360 \quad 1 \text{ BOD}$$

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je x cijena šešira (u kunama) prije sniženja.

Jana ima $\frac{2}{3}x$, Daniela $\frac{3}{4}x$, a Hana $\frac{4}{5}x$ kuna. 3 BODA

Nakon sniženja cijena tri šešira je $3(x - 94)$. 1 BOD

Vrijedi: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x - 94)$ 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo redom:

$\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3x - 282 \quad / \cdot 60$ 1 BOD

$40x + 45x + 48x = 180x - 16\,920$ 1 BOD

$47x = 16\,920 \quad / : 47$ 1 BOD

$x = 360$ 1 BOD

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Jedan šešir je pojeftinio za 94 kn, pa su sva tri šešira pojeftinila za 282 kn. 1 BOD

Jani je nedostajala $\frac{1}{3}$ cijene šešira, Danieli $\frac{1}{4}$, a Hani $\frac{1}{5}$ cijene šešira, 2 BODA

Trima sestrama ukupno je nedostajalo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$ cijene jednoga šešira. 3 BODA

Označimo li s x cijenu jednog šešira, vrijedi jednadžba $\frac{47}{60}x = 282$. 1 BOD

Njenim rješavanjem nalazimo

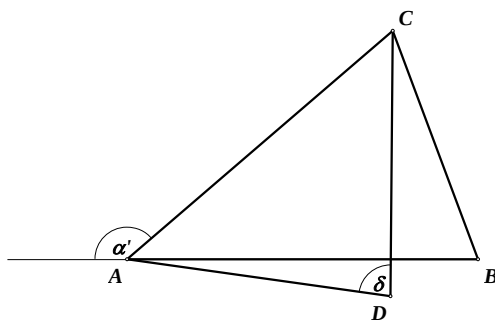
$47x = 16\,920 / : 47$ 1 BOD

$x = 360$ 1 BOD

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



$\triangle ABC$ je jednakokračan, pa su kutovi uz osnovicu $\overline{BC}$ sukladni, 1 BOD

a α' je veličina vanjskog kuta tog trokuta pa slijedi $|\angle ABC| = |\angle ACB| = \frac{\alpha'}{2}$. 2 BODA

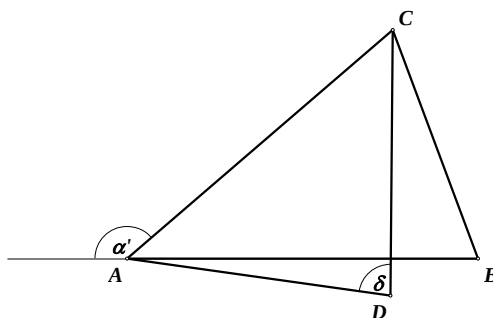
$\triangle ADC$ je jednakokračan, pa su kutovi uz osnovicu $\overline{AC}$ sukladni i vrijedi

$|\angle DAC| = |\angle ACD| = \frac{180^\circ - \delta}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$. 3 BODA

Kako je $|\angle ACB| = |\angle ACD| + |\angle BCD|$, slijedi $\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2} + |\angle BCD|$, 2 BODA

a odatle je $|\angle BCD| = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\delta}{2} - 90^\circ = \frac{\alpha' + \delta}{2} - 90^\circ = 100^\circ - 90^\circ = 10^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Zbog $|AB| = |AC|$ zaključujemo da je trokut $\triangle ABC$ jednakokratan s osnovicom $\overline{BC}$,
pa vrijedi $\beta = \gamma$. 2 BODA

Zbog $|AD| = |DC|$ zaključujemo da je trokut $\triangle ADC$ jednakokratan s osnovicom $\overline{AC}$,
pa vrijedi $|\angle CAD| = |\angle ACD| = (180^\circ - \delta) : 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\delta$. 3 BODA

Budući da je $\alpha' = \beta + \gamma = 2\beta$, onda je prema uvjetu zadatka $2\beta + \delta = 200^\circ$,
pa je $\delta = 200^\circ - 2\beta$. 1 BOD

Uz oznake kao na slici vrijedi $|\angle ACD| + |\angle BCD| = \beta$, 1 BOD

pa nakon uvrštavanja dobivamo redom $90^\circ - \frac{1}{2}\delta + |\angle BCD| = \beta$, 1 BOD

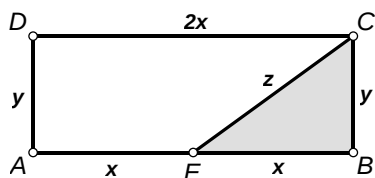
$90^\circ - 100^\circ + \beta + |\angle BCD| = \beta$, 1 BOD

$|\angle BCD| = 10^\circ$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Uz oznake kao na slici, opseg trokuta EBC jednak je $x + y + z = 36$ cm,

opseg četverokuta $ECDA$ je $z + 2x + y + x = 60$ cm,

a opseg pravokutnika $ABCD$ je $4x + 2y = 66$ cm 3 BODA

Uvrstimo li u izraz $z + 2x + y + x = 60$ podatak da je $x + y + z = 36$,

dobivamo da je $2x = 24$ cm, tj. $x = 12$ cm. 2 BODA

Iz uvjeta $4x + 2y = 66$ i činjenice da je $x = 12$ dobivamo da je $y = 9$ cm 2 BODA

Površina trokuta EBC jednaka je polovini umnoška duljina njegovih kateta,

tj. $p(EBC) = xy : 2$.

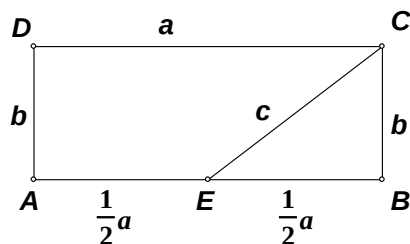
Uvrštavanjem podataka dobivamo da je $p(EBC) = 54$ cm². 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Uvjeta zadatka, uz oznake kao na slici, možemo pisati u obliku:

$$2a + 2b = 66, \text{ odnosno } a + b = 33;$$

$$\frac{1}{2}a + b + c = 36;$$

$$a + b + \frac{1}{2}a + c = 60.$$

3 BODA

$$\text{Dalje je } a + b + \frac{1}{2}a + c = a + \left(b + \frac{1}{2}a + c\right) = a + 36 = 60,$$

1 BOD

odakle je $a = 24$ cm i

1 BOD

$$b = 33 - 24 = 9 \text{ cm.}$$

2 BODA

Površina trokuta ABC jednaka je $p = \frac{1}{2} \cdot |EB| \cdot |EC|$, tj.

$$p = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:Decimalni zapis razlomka $\frac{11}{700}$ je $0.01571428571428... = 0.01\overline{571428}$

2 BODA

Sastoji se od pretperioda 01

i šesteroznamenkastog perioda 571428 koji se ponavlja.

1 BOD

Zbroj prve dvije decimale je 1.

1 BOD

Treba izračunati zbroj preostalih 448. Budući da je $448 = 74 \cdot 6 + 4$,

skupina od 6 znamenaka će se pojaviti 74 puta,

2 BODA

te će slijediti još prve četiri znamenke perioda.

1 BOD

Zbroj znamenaka u periodu je 27,

1 BOD

pa je traženi zbroj $1 + 74 \cdot 27 + 5 + 7 + 1 + 4 = 2016$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:Decimalni zapis zadanog razlomka je $\frac{11}{700} = 0.01571428571428...$

2 BODA

Nakon prvih dviju decimala (0 i 1), čiji je zbroj jednak 1,

1 BOD

ciklički se ponavlja skupina od 6 znamenaka 571428,

1 BOD

čiji je zbroj jednak 27.

1 BOD

Budući da je $448 : 6 = 74$ i ostatak 4, u nizu od 448 decimala

2 BODA

skupina od 6 znamenaka javlja se 74 puta,

a napisane su još prve četiri decimale sljedeće skupine.

1 BOD

Traženi zbroj znamenaka jednak je:

$$1 + 74 \cdot 27 + (5 + 7 + 1 + 4) = 1 + 1998 + 17 = 2016.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Na engleski jezik ide ukupno 40 učenika. Od njih 40, 24 učenika se bavi i nekom sportskom aktivnošću, 10 učenika ide i na njemački jezik, a 4 učenika su uključena u sve tri aktivnosti.

Samo engleskim jezikom se bave $40 - 24 - 10 + 4 = 10$ učenika.

2 BODA

Analognim zaključivanjem dolazimo do broja učenika koji su uključeni

- samo na njemački jezik: $27 - 12 - 10 + 4 = 9$,

2 BODA

- samo u sportske aktivnosti: $60 - 24 - 12 + 4 = 28$.

2 BODA

Samo jednom aktivnosti se bavi $10 + 9 + 28 = 47$ učenika.

1 BOD

Nekom od ovih aktivnosti bavi se

$$40 + 28 + 9 + (12 - 4) = 40 + 28 + 9 + 8 = 85 \text{ učenika.}$$

2 BODA

Nijednom od ovih aktivnosti ne bavi se

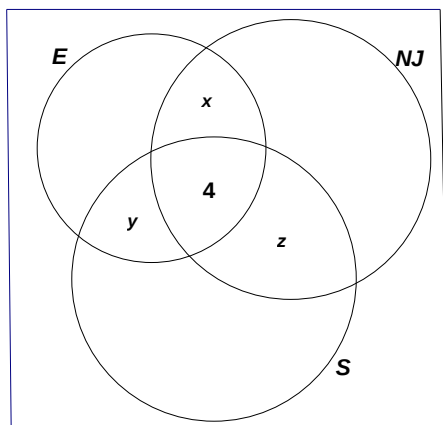
$$94 - (40 + 9 + 28 + 8) = 94 - 85 = 9 \text{ učenika.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Učenike šestog razreda dijelimo u tri skupine (koje imaju zajedničkih članova) pri čemu postoje i učenici koji ne pripadaju ni jednoj od tih skupina. Prikažimo te skupine grafički, krugovima koji imaju zajedničkih dijelova. U središnji dio, zajednički svim trima krugovima, upisujemo broj 4 jer se toliko učenika bavi sa sve tri aktivnosti.



1 BOD

Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka redom vrijedi:

$$x + 4 = 10, \text{ tj. } x = 6$$

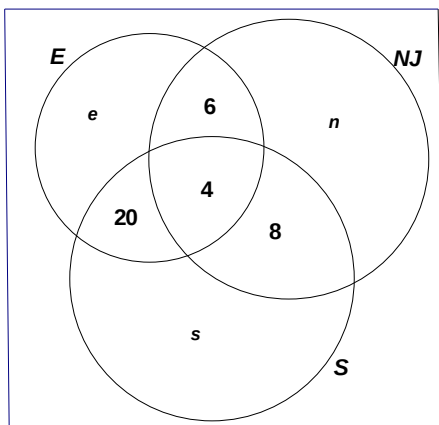
1 BOD

$$y + 4 = 24, \text{ tj. } y = 20$$

1 BOD

$$z + 4 = 12, \text{ tj. } z = 8$$

1 BOD



Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka dalje vrijedi:

$$e + 6 + 4 + 20 = 40, \text{ tj. } e = 10$$

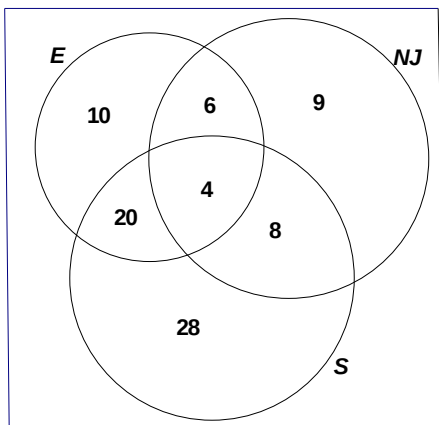
1 BOD

$$n + 6 + 4 + 8 = 27, \text{ tj. } n = 9$$

1 BOD

$$s + 20 + 4 + 8 = 60, \text{ tj. } s = 28$$

1 BOD



Samo jednom aktivnošću bavi se $10 + 9 + 28 = 47$ učenika.

1 BOD

Nekom od ovih aktivnosti bavi se $10 + 20 + 4 + 6 + 9 + 8 + 28 = 85$ učenika.

1 BOD

Niti jednom od ovih aktivnosti ne bavi se $94 - 85 = 9$ učenika.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je Vennov dijagram točno ispunjen, ali nema popratnih obrazloženja, umanjiti broj bodova za 2.

Treći način:

Neka je E skup svih učenika koji uče engleski jezik, N skup svih učenika koji uče njemački jezik, a S skup svih učenika koji se bave sportom.

Pri tome vrijedi $k(E) = 40$, $k(N) = 27$, $k(S) = 60$,

1 BOD

$k(E \cap S) = 24$, $k(E \cap N) = 10$ i $k(N \cap S) = 12$

1 BOD

$k(E \cap N \cap S) = 4$

1 BOD

Tada vrijedi formula uključivanja i isključivanja:

$$k(E \cup N \cup S) = k(E) + k(N) + k(S) - (k(E \cap N) + k(E \cap S) + k(N \cap S)) + k(E \cap N \cap S)$$

1 BOD

Uvrštavanjem i računanjem redom dobivamo:

$$k(E \cup N \cup S) = 40 + 27 + 60 - (10 + 24 + 12) + 4 = 127 - 46 + 4 = 85$$

1 BOD

Nekom od ovih aktivnosti bavi se 85 učenika, a niti jednom se na bavi $94 - 85 = 9$ učenika.

1 BOD

Samo engleski uči $40 - (24 + 10) + 4 = 10$ učenika,

1 BOD

samo njemački uči $27 - (10 + 12) + 4 = 9$ učenika, 1 BOD
samo sportom bavi se $60 - (24 + 12) + 4 = 28$ učenika. 1 BOD
Dakle, samo jednom od aktivnosti bavi se $10 + 9 + 28 = 47$ učenika. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

28. veljače 2017.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$. 1 BOD
 Iz $\alpha = 4k$ i $\beta = 5k$ redom slijedi: $4k + 5k = 90^\circ$, $9k = 90^\circ$, i konačno $k = 10^\circ$, 1 BOD
 odakle je $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 50^\circ$. 2 BODA
 Kut α se smanjio za 8 % od 40° , što iznosi $3.2^\circ = 3^\circ 12'$, 1 BOD
 pa je sada $\alpha_1 = 40^\circ - 3^\circ 12' = 36^\circ 48'$. 1 BOD
 Onda je kut $\beta_1 = 90^\circ - 36^\circ 12' = 53^\circ 12'$ (ili $\beta_1 = 50^\circ + 3^\circ 12' = 53^\circ 12'$). 1 BOD
 Kut β se, dakle, povećao za $3^\circ 12'$. 1 BOD
 Kako je $3.2 : 50 = 0.064$, 1 BOD
 zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz omjera $\alpha : \beta = 4 : 5$ dobije se $5\alpha = 4\beta$ i $\alpha = \frac{4}{5}\beta$. 1 BOD
 Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$, odnosno $\frac{4}{5}\beta + \beta = 90^\circ$. 1 BOD
 Dalje je $\frac{9}{5}\beta = 90^\circ$, iz čega se izračuna $\beta = 50^\circ$. 1 BOD
 Tada je $\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. 1 BOD
 Kut α se smanjio za 8 % od 40° , što iznosi $3.2^\circ = 3^\circ 12'$, 1 BOD
 pa je sada $\alpha_1 = 40^\circ - 3^\circ 12' = 36^\circ 48'$. 1 BOD
 Onda je kut $\beta_1 = 90^\circ - 36^\circ 12' = 53^\circ 12'$ (ili $\beta_1 = 50^\circ + 3^\circ 12' = 53^\circ 12'$). 1 BOD
 Kut β se, dakle, povećao za $3^\circ 12'$. 1 BOD
 Kako je $3.2 : 50 = 0.064$, 1 BOD
 zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$, pa je $\beta = 90^\circ - \alpha$. 1 BOD
 Tada je $\alpha : (90^\circ - \alpha) = 4 : 5$. 1 BOD
 Iz $5\alpha = 360^\circ - 4\alpha$ dobiva se $9\alpha = 360^\circ$ i $\alpha = 40^\circ$. 1 BOD
 Tada je $\beta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. 1 BOD
 Kut α se smanjio za 8 % od 40° , što iznosi $3.2^\circ = 3^\circ 12'$, 1 BOD
 pa je sada $\alpha_1 = 40^\circ - 3^\circ 12' = 36^\circ 48'$. 1 BOD
 Onda je kut $\beta_1 = 90^\circ - 36^\circ 12' = 53^\circ 12'$ (ili $\beta_1 = 50^\circ + 3^\circ 12' = 53^\circ 12'$). 1 BOD
 Kut β se, dakle, povećao za $3^\circ 12'$. 1 BOD
 Kako je $3.2 : 50 = 0.064$, 1 BOD
 zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik točno izračuna traženi postotak, a da pri tom nije izračunao kutove α_1 i β_1 , ne skidaju mu se bodovi.

2. Prvi način:

Prije 6 godina, u prvom razredu, Marko je imao 7 godina, a njegova sestra 8 godina. 1 BOD
 Iznos Markova džeparca bio je 35 kn. Ako sa x označimo mjesečni džeparac Markove sestre, tada vrijedi razmjer $35 : x = 7 : 8$. 1 BOD
 Iz tog se razmjera izračuna $7x = 280$ i $x = 40$. Te godine sestrin džeparac iznosio je 40 kn, a roditelji su im ukupno davali 75 kn mjesečno. 1 BOD
 U sljedećih šest godina taj se iznos povećavao za 10 kn svake godine, pa sad iznosi $75 + 10 \cdot 6 = 135$ kuna, 1 BOD
 pri čemu ga Marko i sestra i dalje dijele u omjeru svojih godina, sada 13 : 14. 1 BOD
 Ako traženi iznos Markovog džeparca označimo s y , onda sestri pripada $135 - y$, te vrijedi razmjer $y : (135 - y) = 13 : 14$ 1 BOD
 Vrijedi $14y = 13 \cdot (135 - y)$, $14y = 1755 - 13y$, 1 BOD
 te dalje $27y = 1755$ i $y = 65$. 1 BOD
 U sedmom razredu Marko dobiva 65 kuna mjesečno. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Prije šest godina Marko je imao 7 godina, a njegova sestra 8 godina. 1 BOD
 Džeparac su dijelili u omjeru svojih godina. Ako je Marko dobivao $7k$ kuna, a sestra $8k$ kuna, onda su zajedno dobivali $15k$ kuna. 1 BOD
 Budući da je poznat iznos Markova džeparca, 35 kn, tada iz $7k = 35$ slijedi $k = 5$, 1 BOD
 tj. ukupan iznos džeparca bio je 75 kn. 1 BOD
 Tijekom šest godina taj se iznos povećao za 60 kn, pa sad iznosi 135 kn. 1 BOD
 Oni ga i dalje dijele u omjeru svojih godina: Marko ima 13, a sestra 14 godina. 1 BOD
 Marko ima $13k$ kn, a sestra $14k$ kn, što je ukupno $27k$ kn. 1 BOD
 Iz $27k = 135$ kn, 1 BOD
 izračuna se $k = 5$. 1 BOD
 Markov sadašnji džeparac iznosi $13 \cdot 5 = 65$ kuna. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Iz početne jednadžbe izrazi se nepoznanica x :
 $10x - 15k + 5k = 4x - 32 + k$ 1 BOD
 $10x - 4x = 15k - 5k - 32 + k$ 1 BOD
 $6x = 11k - 32$ 1 BOD
 $x = \frac{11k - 32}{6}$ 1 BOD
 Iz uvjeta $x > 0$ slijedi $11k - 32 > 0$, odnosno 1 BOD
 $11k > 32$ i $k > \frac{32}{11}$. 1 BOD
 Iz $\frac{32}{11} = 2\frac{10}{11}$ 1 BOD
 se zaključuje da je traženi najmanji prirodni broj $k = 3$. 1 BOD
 Rješenje jednadžbe za $k = 3$ dobije se uvrštavanjem te vrijednosti u već izračunati izraz
 $x = \frac{11k - 32}{6}$, dobivamo da je $x = \frac{11 \cdot 3 - 32}{6}$. 1 BOD
 Rješenje je $x = \frac{1}{6}$. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Početak rješavanja identičan je prethodnom postupku do izračuna $k = 3$ (za ukupno 8 BODOVA).

Ako se $k = 3$ uvrsti u početnu jednadžbu dobije se $5 \cdot (2x - 9) + 15 = 4 \cdot (x - 8) + 3$. 1 BOD

Rješenje te jednadžbe je $x = \frac{1}{6}$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je zadani razlomak $\frac{x}{y}$.

Ako se brojnik x smanji za 8 %, brojnik novog razlomka bit će $0.92x$. 1 BOD

Ako se nazivnik y poveća za 8 %, nazivnik novog razlomka bit će $1.08y$. 1 BOD

Novi razlomak je oblika $\frac{0.92x}{1.08y}$. 1 BOD

Dalje je $\frac{0.92x}{1.08y} = \frac{92x}{108y} = \frac{23x}{27y}$. 1 BOD

Treba riješiti jednadžbu $\frac{x}{y} - \frac{0.92x}{1.08y} = 2$ 1 BOD

$\frac{x}{y} \cdot \left(1 - \frac{23}{27}\right) = 2$ 1 BOD

$\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{27} = 2$ 1 BOD

$\frac{x}{y} = 2 : \frac{4}{27}$ 1 BOD

$\frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{27}{4}$ 1 BOD

$\frac{x}{y} = \frac{27}{2}$ 1 BOD

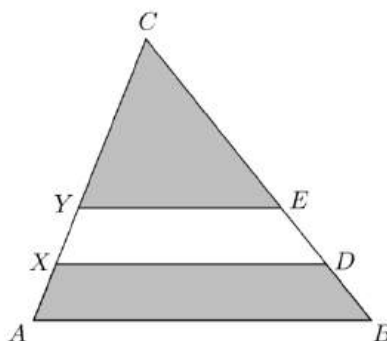
..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Jednadžbu $\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{27} = 2$ moguće je rješavati i na druge načine, npr. nakon dijeljenja

brojem 4 dobiva se $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{4}$, odnosno $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{2}$, pa množenjem brojem 27 dobivamo $\frac{x}{y} = \frac{27}{2}$.

I taj način rješavanja boduje se s 3 boda.

5. Neka je D druga krajnja točka dužine paralelne s dužinom $\overline{AB}$ točkom X i E druga krajnja točka dužine paralelne s dužinom $\overline{AB}$ točkom Y .



Promatramo trokute $\triangle XDC$ i $\triangle ABC$. Vrijedi da je $|\angle XCD| = |\angle ACB|$ (zajednički kut kod vrha C) i

$|\angle CXD| = |\angle CAB|$ (kutovi s usporednim kracima ili kutovi uz presječnicu). Prema KK poučku, trokuti $\triangle XDC$ i $\triangle ABC$ su slični. 1 BOD

Iz $|CX| : |XA| = 4 : 1$ zaključujemo da je omjer $|CX| : |CA| = 4 : 5$, tj. koeficijent sličnosti tih trokuta

je $k = \frac{4}{5}$. 2 BODA

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati $(k \cdot k)$ duljina odgovarajućih stranica, dakle vrijedi

$$p_{\triangle XDC} : p_{\triangle ABC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}, \text{ odnosno } p_{\triangle XDC} = \frac{16}{25} p_{\triangle ABC}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Izrazimo površinu osjenčanog dijela tj. površinu četverokuta $ABDX$.

$$p_{ABDX} = p_{\triangle ABC} - p_{\triangle XDC} = p_{\triangle ABC} - \frac{16}{25} p_{\triangle ABC} = \frac{9}{25} p_{\triangle ABC}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz uvjeta zadatka je $p_{\triangle YEC} = p_{ABDX} = \frac{9}{25} p_{\triangle ABC}$. 1 BOD

Trokuti $\triangle YEC$ i $\triangle ABC$ su također slični prema poučku KK (zajednički kut kod vrha C i sukladni kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Iz omjera površina tih trokuta $p_{\triangle YEC} : p_{\triangle ABC} = 9 : 25$, slijedi da je koeficijent proporcionalnosti

$$k = |CY| : |CA| = 3 : 5. \quad 2 \text{ BODA}$$

Tada je $|CY| : |YA| = 3 : 2$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj lubenica, a y broj dinja u Jurinom vrtu.

Za prodaju četvrtinu broja lubenica i polovine broja dinja Jure će dobiti $\left(\frac{x}{4} \cdot 8 + \frac{y}{2} \cdot 6\right)$ kn. 1 BOD

Za prodaju dvanaestine broja lubenica i tri četvrtine broja dinja Jure će dobiti $\left(\frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6\right)$ kn.
1 BOD

Prema uvjetima zadataka vrijede dvije jednačbe:

$$\frac{x}{4} \cdot 8 + \frac{y}{2} \cdot 6 = \frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{i } 8x - 6y = 192. \quad 1 \text{ BOD}$$

Pojednostavljuvanjem prve jednačbe dobivamo:

$$2x + 3y = \frac{2}{3}x + \frac{9}{2}y \quad / \cdot 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$12x + 18y = 4x + 27 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8x - 9y = 0 \quad 1 \text{ BOD}$$

Rješavanjem sustava

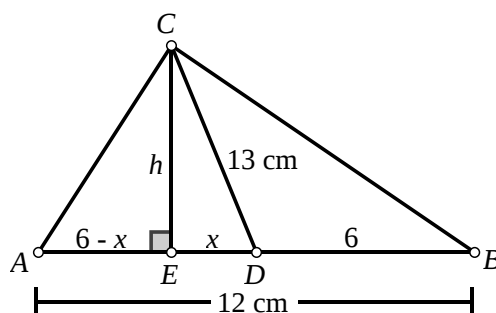
$$\begin{cases} 8x - 9y = 0 \\ 8x - 6y = 192 \end{cases}$$

dobivamo $x = 72$, $y = 64$. 2 BODA

Jure u vrtu ima 72 lubenice i 64 dinje. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Dužina $\overline{CE}$ je visina na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC .

Označimo s D polovište stranice $\overline{AB}$. Tada je $\overline{CD}$ težišnica na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC i vrijedi

$$|AD| = |DB| = \frac{1}{2} |AB| = 6 \text{ cm}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina trokuta ABC je 72 cm^2 , pa uz oznake kao na slici vrijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CE| = 72, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 72,$$

$$h = 12 \text{ cm.}$$

1 BOD

Trokut CED je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$$x^2 = 13^2 - h^2,$$

1 BOD

$$x^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$$

$$\text{tj. } x = 5 \text{ cm.}$$

1 BOD

Tada je $|AE| = 6 - x = 1 \text{ cm}$ i $|EB| = x + 6 = 11 \text{ cm}$.

1 BOD

Trokut CEB je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |EB|^2,$$

1 BOD

$$|BC|^2 = 12^2 + 11^2 = 265,$$

$$|BC| = \sqrt{265} \text{ cm.}$$

1 BOD

Trokut CEA je pravokutan, pa primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$$|AC|^2 = |CE|^2 + |AE|^2,$$

1 BOD

$$|AC|^2 = 12^2 + 1^2 = 145,$$

$$\text{tj. } |AC| = \sqrt{145} \text{ cm.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} =$

$$= 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a +$$

$$+ 100c + 10a + b + 100c + 10b + a =$$

2 BODA

$$= 222a + 222b + 222c =$$

2 BODA

$$= 222 \cdot (a + b + c) =$$

1 BOD

$$= 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$$

2 BODA

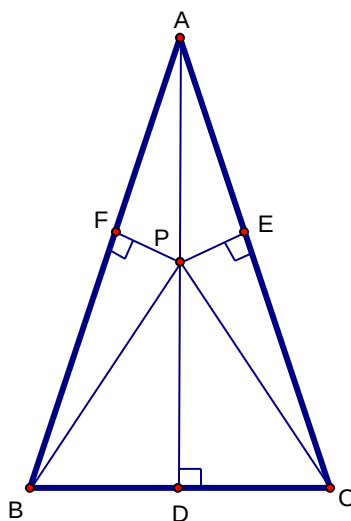
Da bi zadani zbroj bio kvadrat nekog prirodnog broja, zbroj $a + b + c$ mora biti najmanje jednak umnošku $2 \cdot 3 \cdot 37$.

To je nemoguće jer najveći zbroj triju znamenaka iznosi 27 ($9 + 9 + 9 = 27$).

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.

Neka su točke E i F nožišta okomica iz točke P na krakove $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Trokuti AFP i APE sukladni su po poučku o sukladnosti trokuta KSK ($\overline{AP}$ je zajednička stranica, $|\angle PAF| = |\angle PAE|$ jer je trokut ABC jednakokratan, $|\angle PFA| = |\angle AEP| = 90^\circ$, pa je i $|\angle APF| = |\angle EPA|$).

2 BODA

Neka je $|PE| = |PF| = k$, $k > 0$. Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|PD| = 3k$, odnosno duljina visine na osnovicu je $v_a = |AD| = 6k$.

1 BOD

Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta BCP , CAP i ABP . Vrijedi:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BCP} + P_{\triangle CAP} + P_{\triangle ABP}$$

$$\frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{|BC| \cdot |PD|}{2} + \frac{|AC| \cdot |PE|}{2} + \frac{|AB| \cdot |PF|}{2}$$

2 BODA

$$\frac{a \cdot 6k}{2} = \frac{a \cdot 3k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} \quad / \cdot 2$$

$$6ak = 3ak + 2bk$$

$$3a = 2b$$

1 BOD

$$a = \frac{2}{3} \cdot b = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ cm}$$

1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo duljinu visine:

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |DC|^2$$

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2$$

$$v_a^2 = (2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2$$

1 BOD

$$v_a^2 = 8 - \frac{8}{9}$$

$$v_a^2 = \frac{64}{9}$$

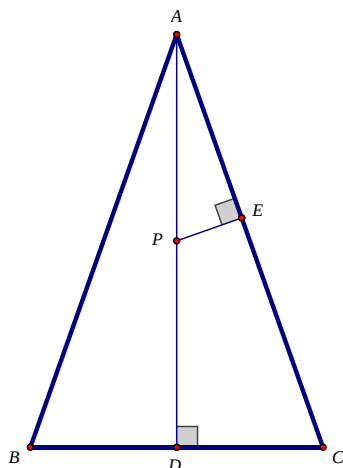
$$v_a = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

1 BOD

$$\text{Konačno je } P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.

Neka je točka E nožište okomice iz točke P na krak $\overline{AC}$.

Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Ako je v_a duljina visine na osnovicu, onda iz uvjeta zadatka slijedi $|AP| = |PD| = \frac{v_a}{2}$ i $|PE| = \frac{v_a}{6}$.

1 BOD

Trokuti ADC i APE su slični (imaju iste kutove; oba su trokuta pravokutna i imaju isti kut $\angle PAE$).

2 BODA

Iz sličnosti trokuta ADC i APE slijedi:

$$\frac{a}{2} : b = \frac{v_a}{6} : \frac{v_a}{2},$$

2 BODA

$$\text{odnosno } a = \frac{2}{3}b.$$

1 BOD

$$\text{Slijedi } a = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm.}$$

1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo duljinu visine:

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8 - \frac{8}{9} = \frac{64}{9},$$

1 BOD

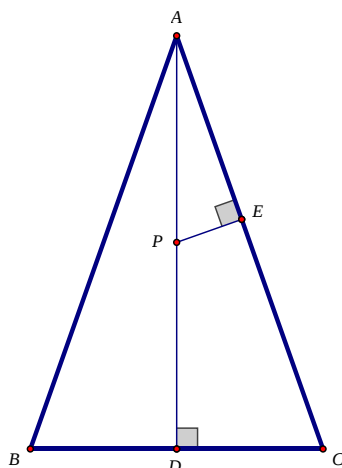
$$v_a = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$

1 BOD

$$\text{Konačno je } P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je točka D je nožište visine na osnovicu trokuta. Točka P je polovište visine $\overline{AD}$.

Neka je točka E nožište okomice iz točke P na krak $\overline{AC}$.

Neka je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b = 2\sqrt{2}$ cm.

Ako je v_a duljina visine na osnovicu, onda iz uvjeta zadatka slijedi $|AP| = |PD| = 3 \cdot |PE|$.

Neka je $|PE| = k$, $k > 0$. Tada je $|AP| = 3k$, a $v_a = 6k$.

1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut APE slijedi:

$$|AE|^2 = |AP|^2 - |PE|^2 = (3k)^2 - k^2 = 8k^2,$$

$$|AE| = 2\sqrt{2}k.$$

1 BOD

Trokuti ADC i APE su slični (pravokutni trokuti kojima je kut $\angle PAE$ zajednički).

2 BODA

Iz sličnosti trokuta ADC i APE slijedi:

$$|AP| : |AC| = |AE| : |AD|,$$

1 BOD

$$3k : 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}k : 6k,$$

$$\text{odnosno } k = \frac{4}{9}.$$

1 BOD

$$\text{Slijedi da je } v_a = 6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$

1 BOD

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ADC izračunamo osnovicu:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v_a^2,$$

1 BOD

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9},$$

$$\frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$a = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm.}$$

1 BOD

$$\text{Konačno je } P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{16}{9}\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

a) Za svaku od pet znamenki imamo pet mogućnosti.

Stoga ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$ takvih brojeva. 3 BODA

b) Da bi se svaka od znamenki koristila barem jednom, jedna znamenka se mora koristiti dvaput, a sve ostale po jednom.

Za to imamo 5 mogućnosti – dvaput se može pojaviti znamenka 1, 2, 3, 4 ili 5. 1 BOD

Za odabrani izbor znamenki (npr. 1, 1, 2, 3, 4, 5) za znamenku koja se pojavljuje dvaput možemo na $\frac{6 \cdot 5}{2}$ načina odabrati mjesta na kojima će se pojaviti.

Nakon toga preostale znamenke možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2$ načina.

To možemo načiniti na ukupno $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 360$ načina. 4 BODA

Imamo 5 mogućnosti za izbor znamenke koje se pojavljuje dvaput, pa ukupno imamo $5 \cdot 360 = 1800$ takvih brojeva. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

a) Za svaku od pet znamenki imamo pet mogućnosti.

Stoga ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$ takvih brojeva. 3 BODA

b) Da bi se svaka od znamenki koristila barem jednom, jedna znamenka se mora koristiti dvaput, a sve ostale po jednom.

Za to imamo 5 mogućnosti – dvaput se može pojaviti znamenka 1, 2, 3, 4 ili 5. 1 BOD

Za odabrani izbor znamenki (npr. 1, 1, 2, 3, 4, 5) te znamenke možemo raspoređivati na

$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 360$ načina.

(Obrazloženje: Najprije zamislimo da raspoređujemo šest različitih znamenaka na šest mjesta.

Prvu možemo rasporediti na šest načina, drugu na pet, treću na četiri, itd...

Takvim raspoređivanjem dobit ćemo dvaput više željenih brojeva, jer za svaki raspored dvije iste znamenke na dva fiksna mjesta, imamo još jedan takav raspored.) 4 BODA

Konačno, ukupno imamo $5 \cdot 360 = 1800$ takvih brojeva. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA