

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Za koje je vrijednosti realnog parametra a rješenje jednadžbe

$$7(a + x) - 16 = (a + 3)(a - 3) + 3(x + 1)$$

negativno?

Rješenje.

Rješenje dane jednadžbe je

$$x = \frac{a^2 - 7a + 10}{4}.$$

2 boda

Da bi bilo $x < 0$, mora biti $\frac{a^2 - 7a + 10}{4} < 0$,

1 bod

odnosno $(a - 2)(a - 5) < 0$,

1 bod

iz čega slijedi $a \in \langle 2, 5 \rangle$ ili $2 < a < 5$.

2 boda

Zadatak B-1.2.

Odredite zadnje tri znamenke broja

$$2^{2015} - 2^{2013} + 2^{2010}.$$

Rješenje.

Nakon izlučivanja zajedničkog faktora dobivamo:

$$\begin{aligned} 2^{2015} - 2^{2013} + 2^{2010} &= 2^{2010}(2^5 - 2^3 + 1) = 2^{2010} \cdot 25 \\ &= 2^{2008} \cdot 2^2 \cdot 25 = 2^{2008} \cdot 100. \end{aligned}$$

2 boda

1 bod

Potencije broja dva (veće od 1) imaju zadnju znamenku redom 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...

1 bod

Dakle, ako im je eksponent djeljiv s 4, zadnja znamenka je 6. Tada je zadnja znamenka broja 2^{2008} jednaka 6, a množenjem sa 100 dobivamo da su zadnje tri znamenke 6, 0, 0.

2 boda

Zadatak B-1.3.

Ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ koliko je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}?$$

Prvo rješenje.

Ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, postoji neki $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tako da je $a = kc$ i $b = kd$.

2 boda

Tada je

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{c(1+k)d(1+k)}{c(1+k)+d(1+k)} - \frac{kckd}{k(c+d)} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{cd(1+k)}{c+d} - \frac{kcd}{c+d} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{cd(1+k-k-1)}{c+d} = 0. \end{aligned}$$

1 bod

2 boda

1 bod

Drugo rješenje.

Ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onda je $ad = bc$.

1 bod

Pomnožimo brojnik i nazivnik prva dva razlomka u danom izrazu s d , a zatim primjenimo $ad = bc$.

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{(ad+cd)(b+d)}{ad+bd+cd+d^2} - \frac{abd}{ad+bd} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{(bc+cd)(b+d)}{bc+bd+cd+d^2} - \frac{bbc}{bc+bd} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{c(b+d)(b+d)}{b(c+d)+d(c+d)} - \frac{bc}{c+d} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{c(b+d)(b+d)}{(b+d)(c+d)} - \frac{bc}{c+d} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{bc+cd-bc-cd}{c+d} = 0 \end{aligned}$$

1 bod

1 bod

1 bod

1 bod

1 bod

Zadatak B-1.4.

Koliko ima pravokutnih trokuta kojima su duljine kateta cijeli brojevi a, b , a duljina hipotenuze $b+1$, gdje je $b < 100$?

Rješenje.

Za pravokutni trokut vrijedi $(b+1)^2 = a^2 + b^2$, odnosno $b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2$, iz čega slijedi $2b = a^2 - 1$, tj. $b = \frac{a^2 - 1}{2}$. 1 bod

Kako je $b < 100$, vrijedi $\frac{a^2 - 1}{2} < 100$, $a^2 < 201$. 1 bod

Kvadrati cijelih brojeva manji od 201 su 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196. 1 bod

Kako je $b \in \mathbb{N}$, iz $b = \frac{a^2 - 1}{2}$ slijedi da je a^2 neparan. 1 bod

Tada je $a \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Slijedi $b \in \{4, 12, 24, 40, 60, 84\}$. 1 bod

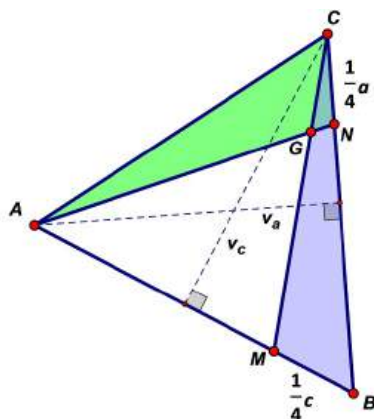
Dakle, ima 6 trokuta sa stranicama $(a, b, b+1)$ i danim svojstvom: 1 bod

$(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$, $(13, 84, 85)$.

Zadatak B-1.5. (*vidi ispravak rješenja na dnu dokumenta)

Površina trokuta ABC iznosi 32 cm^2 . Na stranicama AB i BC odabrane su točke M i N takve da je $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 3 : 1$. Točka G je sjecište pravaca AN i CM . Odredite omjer površina likova AGC i $MBNG$.

Rješenje.



Odredimo površine trokuta ANC i BCM .

$$P_{ANC} = \frac{1}{2}v_a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{4}P_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno dobijemo

$$P_{AMB} = \frac{1}{2}v_c \cdot \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}P_{ABC} = 8 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ boda}$$

Ako trokuti ANC i AMB imaju istu površinu, tada trokut AGC i četverokut $BNGM$ imaju istu površinu, pa je traženi omjer $1 : 1$. 2 boda

Zadatak B-1.6. (*vidi dodatno rješenje na dnu dokumenta)

Luka i Pero odlučili su posjetiti prijatelja i krenuti iz mjesta A u 170 km udaljeno mjesto B . Luka je krenuo pješice, a Peru je poveo vozač na motociklu. Nakon nekog vremena vozač se vratio po Luku, a Pero je nastavio pješice, tako da su obojica stigla u isto vrijeme u mjesto B . Oba pješaka hodaju istom brzinom od 5 km/h, a motociklist vozi brzinom od 85 km/h. Na kojoj se udaljenosti od mjesta B i poslije koliko vremena vozač zaustavio i vratio po Luku? Koliko je vremena trebalo da Luka i Pero stignu iz mjesta A u mjesto B ?

Rješenje.

Kako su obojica stigli u isto vrijeme krećući se istom brzinom znači da su prešli jednake dijelove puta pješice i jednake dijelove na motoru.



Uvedimo neke oznake: s = udaljenost $|AB|$ (od mjesta A do mjesta B).

$|AD| = |CB| = x$ je dio puta koji je Luka, odnosno Pero prešao pješice.

Tada je $|AC| = |BD| = s - x$, $|CD| = s - 2x$.

2 boda

Dok je Luka prešao udaljenost $|AD|$, motociklist je prešao udaljenost

$$|AC| + |CD| = s - x + s - 2x = 2s - 3x.$$

2 boda

Odatle je

$$\frac{x}{5} = \frac{2s - 3x}{85} \Rightarrow x = \frac{s}{10} \Rightarrow x = \frac{170}{10} = 17 \text{ km.}$$

2 boda

Iz $|AD| = 17$ km slijedi da je $|AC| = s - x = 153$ km.

1 bod

Vrijeme koje je motociklist vozio Peru je $t_{AC} = \frac{s - x}{85} = \frac{153}{85} = 1 \text{ h i } 48 \text{ min.}$

1 bod

Vrijeme koje je Luka ili Pero pešačio je $t_{CB} = t_{AD} = \frac{x}{5} = \frac{17}{5} = 3 \text{ h i } 24 \text{ min.}$

1 bod

Vrijeme dolaska od mjesta A u mjesto B je $t_{AC} + t_{CB} = \frac{153}{85} + \frac{17}{5} = 5 \text{ h i } 12 \text{ min.}$

1 bod

Zadatak B-1.7.

Izračunajte $\frac{2015A - 2015B}{1008}$ ako je

$$A = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1007^2}{2013}, \quad B = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1007^2}{2015}.$$

Rješenje.

Odredimo prvo razliku brojeva A i B :

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1007^2}{2013} - \left(\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1007^2}{2015} \right) = \\ &= \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} + \frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5} + \cdots + \frac{k^2}{2k-1} - \frac{(k-1)^2}{2k-1} + \cdots \frac{1007^2}{2013} - \frac{1006^2}{2013} - \frac{1007^2}{2015} = \quad 2 \text{ boda} \\ &= \frac{1^2}{1} + \frac{(2-1)(2+1)}{3} + \cdots + \frac{(k-k+1)(k+k-1)}{2k-1} + \cdots + \frac{(1007-1006)(1007+1006)}{2013} - \frac{1007^2}{2015} = \\ &\quad 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{1007-1} - \frac{1007^2}{2015} = && 2 \text{ boda} \\ &= 1007 - \frac{1007^2}{2015} = \frac{2015 \cdot 1007 - 1007^2}{2015} = \\ &= \frac{1007(2015 - 1007)}{2015} = \frac{1007 \cdot 1008}{2015}. && 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

Tada je

$$\frac{2015A - 2015B}{1008} = \frac{2015(A - B)}{1008} = \frac{2015}{1008} \cdot \frac{1007 \cdot 1008}{2015} = 1007. \quad 2 \text{ boda}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-2.1.

Za koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1i^1 + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n = 48 + 49i, \text{ ako je } i = \sqrt{-1}?$$

Prvo rješenje.

Zbroj svaka četiri uzastopna pribrojnika s lijeve strane jednak je $2 - 2i$. 1 bod

Zbrajajući prvih 96 pribrojnika dobit ćemo $24 \cdot (2 - 2i) = 48 - 48i$. 1 bod

Dakle, da bi početna jednakost vrijedila na lijevoj strani mora biti još barem jedna potencija broja i . No bez obzira koliko ih ima, možemo pisati

$$\begin{aligned} 24 \cdot (2 - 2i) + a + bi &= 48 + 49i, \\ 48 + a + (-48 + b)i &= 48 + 49i. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Odatle je

$$48 + a = 48 \Rightarrow a = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

$$-48 + b = 49 \Rightarrow b = 97. \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da je na lijevoj strani 97 pribrojnika.

97. pribrojnik je $97i = 97i^{97}$, pa je traženi $n = 97$. 1 bod

Drugo rješenje.

Računamo li potencije broja i , s lijeve strane dane jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} (i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + (9i - 10 - 11i + 12) + \dots + ni^n &= 48 + 49i \\ (2 - 2i) + (2 - 2i) + \dots + ni^n &= 48 + 49i. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je zbroj svaka četiri uzastopna pribrojnika jednak $2 - 2i$, zbroj na lijevoj strani ovisi o tome koji ostatak pri dijeljenju s 4 daje broj n .

Dakle, imamo 4 mogućnosti: $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3$.

Ako je $n = 4k$, tada je dana jednakost oblika $k(2 - 2i) = 48 + 49i$, a takav k ne postoji.

1 bod

Ako je $n = 4k + 1$, tada je

$$k(2 - 2i) + (4k + 1)i^{4k+1} = 48 + 49i,$$

$$k(2 - 2i) + (4k + 1)i = 48 + 49i, \text{ a odatle je}$$

$$2k = 48, -2k + 4k + 1 = 49 \text{ što daje } k = 24 \text{ i } n = 97.$$

2 boda

Ako je $n = 4k + 2$, tada je

$$k(2 - 2i) + (4k + 1)i + (4k + 2)i^2 = 48 + 49i, \text{ odnosno}$$

$$2k - 4k - 2 = 48, -2k + 4k + 1 = 49,$$

a takav k , koji zadovoljava obje jednakosti, ne postoji.

1 bod

Ako je $n = 4k + 3$, tada je

$$k(2 - 2i) + (4k + 1)i + (4k + 2)i^2 + (4k + 3)i^3 = 48 + 49i, \text{ odnosno}$$

$$2k - 4k - 2 = 48, -2k + 4k + 1 - 4k - 3 = 49,$$

a takav k , koji zadovoljava obje jednakosti, ne postoji.

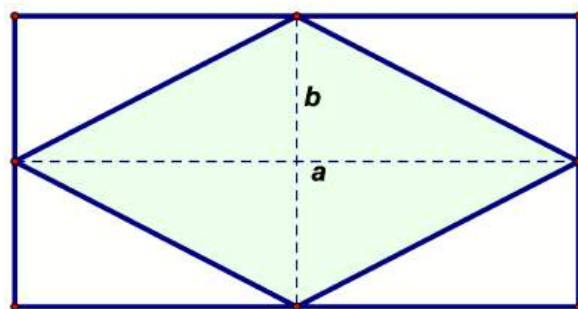
1 bod

Zadatak B-2.2.

U pravokutnoj dvorani nalazi se tepih u obliku romba. Površina tepiha iznosi 54 m^2 , a opseg 30 m . Vrhovi romba su točno u polovištima stranica pravokutnika. Odredite dimenzije dvorane.

Rješenje.

Uočimo da su dimenzije dvorane (stranice pravokutnika a i b) ujedno i dijagonale romba.



Ako je $P = \frac{a \cdot b}{2} = 54$, $o = 4d = 30$, tada su duljine stranica rješenje sljedećeg sustava jednačbi:

$$ab = 108$$

$$a^2 + b^2 = 225.$$

2 boda

Pomnožimo li prvu jednačbu s -2 i dodamo drugoj, slijedi $(a - b)^2 = 9$.

1 bod

Možemo uzeti da je $a > b$, pa je $a = b + 3$ tj. $b^2 + 3b - 108 = 0$.

1 bod

Slijedi $b = 9$ te $a = 12$.

2 boda

Dakle, dimenzije dvorane su 12 i 9 metara.

Zadatak B-2.3.

Jednadžba $y = x^2 + bx + c$ određuje skup parabola kojima su nultočke uzastopni cijeli brojevi. Kojem skupu točaka pripadaju tjemeni ovih parabola? Odredite njegovu jednadžbu.

Rješenje.

Neka su $x_1 = n$ i $x_2 = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$ nultočke parabole iz zadanog skupa. Tada je

$$y = (x - n) \cdot (x - (n + 1)) = x^2 - (2n + 1)x + n^2 + n. \quad 2 \text{ boda}$$

Izračunamo koordinate tjemeni:

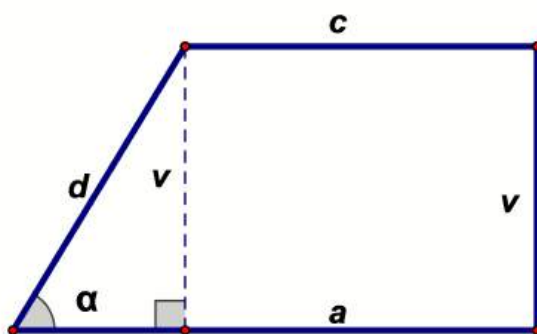
$$x_T = \frac{2n + 1}{2}, y_T = \frac{4 \cdot (n^2 + n) - (4n^2 + 4n + 1)}{4} = \frac{-1}{4}. \quad 2 \text{ boda}$$

Dakle, tjemeni parabola iz danog skupa imaju istu ordinatu, pa se tjemeni svih takvih parabola nalaze na pravcu $y = \frac{-1}{4}$. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Opseg pravokutnog trapeza je 20 cm, a kosinus njegovog šiljastog kuta iznosi $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Koliko bi trebala iznositi visina trapeza kako bi on imao maksimalnu površinu? Kolika je maksimalna površina?

Rješenje.



$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Iz } \sin \alpha = \frac{v}{d} \text{ slijedi } d = \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}v. \quad 1 \text{ bod}$$

Tada iz danog opsega dobivamo

$$o = a + c + v + d \Rightarrow a + c = o - (v + d) = 20 - \frac{5}{2}v. \quad 1 \text{ bod}$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{-5}{4}v + 10v. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je površina trapeza kvadratna funkcija visine, maksimum postiže u tjemenu ($x_0 = \frac{-b}{2a}$).

$$v = \frac{-10}{\frac{-5}{2}} = 4.$$

Trapez će imati maksimalnu površinu za visinu od 4 cm. 1 bod

Maksimalna površina je 20 cm². 1 bod

Zadatak B-2.5.

Zbroj dva peteroznamenakasta broja koji se podudaraju u prve tri znamenke iznosi 123422. Zadnje dvije znamenke jednog broja su 1,2, a drugog 1,0 tim redoslijedom. Odredite te brojeve .

Prvo rješenje.

Brojevi su oblika $\overline{abc12}$ i $\overline{abc10}$

$$\overline{abc12} = \overline{abc00} + 12.$$

$$\overline{abc10} = \overline{abc00} + 10.$$

2 boda

Kako je zbroj tih brojeva 123422 slijedi:

$$\overline{abc12} + \overline{abc10} = 123422$$

$$\overline{abc00} + 12 + \overline{abc00} + 10 = 123422,$$

1 bod

$$2 \cdot \overline{abc00} + 22 = 123422. \text{ Odatle je}$$

$$\overline{abc00} = 61700.$$

1 bod

$$\text{Slijedi } a = 6, b = 1, c = 7,$$

1 bod

odnosno traženi brojevi su 61712 i 61710.

1 bod

Drugo rješenje.

Neka je

$$x = 10000a + 1000b + 100c + 12,$$

$$y = 10000a + 1000b + 100c + 10, \text{ } a, b \text{ i } c \text{ su znamenke te } a \neq 0.$$

2 boda

$$\text{Njihov je zbroj } x + y = 20000a + 2000b + 200c + 22,$$

$$\text{odnosno } 20000a + 2000b + 200c + 22 = 123422,$$

1 bod

$$\text{odnosno } 20000a + 2000b + 200c = 123400.$$

Podijelimo li s 200 dobit ćemo

$$100a + 10b + c = 617.$$

1 bod

$$\text{Dakle, } a = 6, b = 1 \text{ i } c = 7.$$

1 bod

Traženi brojevi su 61712 i 61710.

1 bod

Zadatak B-2.6.

Riješite jednadžbu

$$\sqrt[2015]{16 + 8x + x^2} + \sqrt[2015]{16 - x^2} = 2 \cdot \sqrt[2015]{16 - 8x + x^2}.$$

Rješenje.

Danu jednadžbu pišemo u sljedećem obliku:

$$\sqrt[2015]{(4+x)^2} + \sqrt[2015]{(4-x)(4+x)} = 2 \cdot \sqrt[2015]{(4-x)^2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Podijelimo cijelu jednadžbu s $\sqrt[2015]{(4-x)^2}$ za $x \neq 4$ pa imamo:

$$\sqrt[2015]{\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^2} + \sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = 2. \quad 2 \text{ boda}$$

Uvedimo supstituciju $\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = t$. 1 bod

Jednadžba tada prelazi u $t^2 + t - 2 = 0$. 1 bod

Rješenja su $t_1 = -2$ i $t_2 = 1$. 1 bod

$$\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{4 + 2^{2017}}{2^{2015} - 1}, \quad 2 \text{ boda}$$

$$\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = 1 \Rightarrow x_2 = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-2.7.

U skupu A nalazi se m uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj $2m$, a u skupu B nalazi se $2m$ uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj m . Apsolutna vrijednost razlike najvećih elemenata iz A i B iznosi 99. Odredite m , a zatim skupove A i B .

Rješenje.

Neka je skup

$$\begin{aligned} A &= a, a+1, a+2, a+3, \dots, a+m-1, \\ B &= b, b+1, b+2, b+3, \dots, b+m-1, b+m, \dots, b+2m-1. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} a + a+1 + a+2 + a+3 + \dots + a+m-1 &= 2m, \\ b + b+1 + b+2 + b+3 + \dots + b+m-1 + \dots + b+2m-1 &= m, \\ |b+2m-1 - (a+m-1)| &= 99, \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno rješavamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} ma + (1 + 2 + 3 + \dots + m-1) &= 2m, \\ 2mb + (1 + 2 + 3 + \dots + m-1 + \dots + 2m-1) &= m, \\ |b - a + m| &= 99. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz prve jednadžbe proizlazi

$$ma + \frac{(1+m-1)(m-1)}{2} = 2m, \quad 1 \text{ bod}$$

$$2ma + m(m-1) = 4m,$$

$$a = \frac{5-m}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz druge jednadžbe sustava proizlazi

$$2mb + \frac{(1+2m-1)(2m-1)}{2} = m,$$

$$4mb + 2m(2m-1) = 2m,$$

$$4mb + 4m^2 = 4m,$$

$$b = 1 - m. \quad 1 \text{ bod}$$

Tada iz treće jednadžbe slijedi

$$|b - a + m| = 99,$$

$$\left| 1 - m - \frac{5-m}{2} + m \right| = 99,$$

$$|m - 3| = 198. \quad 1 \text{ bod}$$

Odatle je $m = 201$ ili $m = -195$. Kako je $m > 0$, rješenje je samo $m = 201$. Provjerimo jesu li za taj m brojevi a i b cijeli. 1 bod

$$a = \frac{5-201}{2} = -98, b = -200. \quad 1 \text{ bod}$$

$$A = \{-98, -97, -96, -95, \dots, 102\},$$

$$B = \{-200, -199, -198, -197, \dots, 201\}. \quad 1 \text{ bod}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredite sve cijele brojeve x za koje vrijedi

$$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 \geq 1.$$

Rješenje.

Rješenje dane nejednadžbe x mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$x+12 > 0 \quad \text{i} \quad x > 0, x \neq 1.$$

Kako je $x \in \mathbb{Z}$, tada iz prethodnih uvjeta slijedi da je x prirodan broj veći od 1. 1 bod
Danu nejednadžbu možemo pisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \frac{\log(x+12)}{\log 4} \cdot \frac{\log 2}{\log x} &\geq 1, \\ \frac{\log(x+12)}{\log x} &\geq 2. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $\log x > 0$ za $x > 1$, danu nejednadžbu možemo pomnožiti s $\log x$. 1 bod
Tada je

$$\begin{aligned} \log(x+12) &\geq \log(x^2), \\ x+12 &\geq x^2, \\ x^2 - x - 12 &\leq 0, \quad \text{odnosno} \quad x \in [-3, 4]. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Uz uvjet $x > 1$, $x \in \mathbb{Z}$, rješenje je $x \in \{2, 3, 4\}$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Za kutove α , β i γ šiljastokutnog trokuta ABC vrijedi $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma = 1 : 3 : 12$.
Izračunajte

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Rješenje.

Kako su kutovi trokuta šiljasti, to su njihovi tangensi istog predznaka i vrijedi:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}[\pi - (\alpha + \beta)] = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

1 bod

Kako je $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma = 1 : 3 : 12$, slijedi $\operatorname{tg} \alpha = k, \operatorname{tg} \beta = 3k, \operatorname{tg} \gamma = 12k$.

Tada uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo:

$$16k = 36k^3 \implies k^2 = \frac{4}{9} \implies k = \frac{2}{3},$$

1 bod

te je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = 2, \quad \operatorname{tg} \gamma = 8.$$

1 bod

Slijedi

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{8}{\sqrt{65}},$$

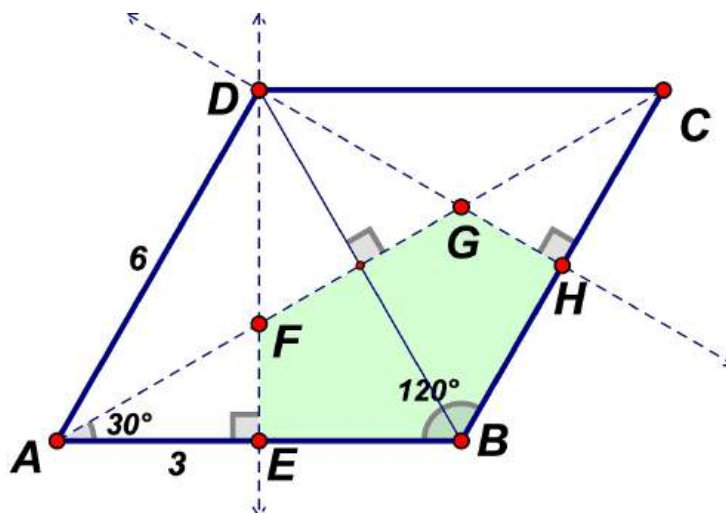
pa je

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{32}{65}.$$

3 boda

Zadatak B-3.3.

Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi 6 cm, a mjera kuta pri vrhu B iznosi 120° . Sve točke unutar romba koje su bliže vrhu B nego ostalim vrhovima nalaze se unutar peterokuta P . Odredite njegovu površinu.

Rješenje.

Pogledajmo područje omeđeno simetralama dužina $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$. Točke na simetrali dužine jednako su udaljene od njezinih rubnih točaka, što su u ovom slučaju vrhovi A, C, D , pa su točke koje su bliže vrhu B unutar peterokuta $BEFGH$.

2 boda

Površinu tog peterokuta dobijemo tako da od površine polovice romba oduzmemo dvije površine trokuta AEF .

Računamo redom:

$$P_{romb} = a^2 \sin \alpha \quad 1 \text{ bod}$$

$$|EF| = 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \text{ cm} \quad 1 \text{ bod}$$

$$P_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |EF| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin 120^\circ - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-3.4.

Odredite zadnju znamenku umnoška prvih sto prirodnih brojeva koji pri djeljenu s 5 daju ostatak 3.

Rješenje.

Svi prirodni brojevi koji prilikom dijeljenja s 5 daju ostatak 3 mogu se zapisati u obliku $5k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Zapišimo umnožak prvih sto takvih brojeva:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 28 \cdot 33 \cdots (5k + 3) \cdots 498 \\ & = (3 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 18) \cdot (23 \cdot 28) \cdot (33 \cdot 38) \cdots ((5k - 2) \cdot (5k + 3)) \cdots (493 \cdot 498). \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Svaki od 50 umnožaka u zagradama završava znamenkom 4. 1 bod

Zadnja znamenka našeg umnoška je zadnja znamenka potencije 4^{50} . 1 bod

Kako je $4^{50} = 16^{25}$, a potencije broja 16 uvijek završavaju znamenkom 6, traženi umnožak završava znamenkom 6. 2 boda

Zadatak B-3.5.

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a α, β, γ redom nasuprotni kutovi. Ako je $a^2 + b^2 = 2015c^2$, izračunajte $\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.

Rješenje.

Kako je $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, to početni izraz možemo pisati kao:

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}}{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}} = \frac{\cos \gamma \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin \gamma} \quad 2 \text{ boda}$$

$$\begin{aligned} & = \cos \gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \\ & = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}, \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti primjenili poučak o sinus i kosinus.

Na kraju,

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c^2} = \frac{2015c^2 - c^2}{2c^2} = 1007. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-3.6.

Dva jednakokračna trokuta imaju isti opseg i površinu, a nisu sukladni. Duljine stranica jednog trokuta su 29, 29, 40. Duljine stranica drugog trokuta su cijeli brojevi. Odredite koji su to brojevi.

Rješenje.

Izračunajmo prvo opseg i površinu danih trokuta

$$\begin{aligned} O &= a + 2b = 98 \implies s = 49 \\ P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)^2} = \sqrt{49 \cdot 9 \cdot 20^2} = 420. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Neka su x duljina osnovice i y duljina kraka novog trokuta. Tada vrijedi

$$x + 2y = 98 \implies y = 49 - \frac{x}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$420 = \sqrt{49(49-x)(49-y)^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$420 = \sqrt{49(49-x) \left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$120 = x\sqrt{49-x}.$$

Dakle, x i $\sqrt{49-x}$ su prirodni brojevi i djelitelji broja $120 \implies \sqrt{49-x} < 7$. 2 boda

Djelitelji broja 120 manji od 7 su: 1, 2, 3, 4, 5, 6. 1 bod

Provjerom dobivamo da je jednakost valjana samo za $\sqrt{49-x} = 3$ i $\sqrt{49-x} = 5$. 1 bod

Iz $\sqrt{49-x} = 3$ dobivamo zadani trokut, a iz $\sqrt{49-x} = 5$ slijedi $x = 24$ i $y = 37$. 1 bod

Tada traženi trokut ima stranice 24, 37, 37. 1 bod

Zadatak B-3.7.

Odredite sve cijele brojeve n za koje jednačba $x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0$ ima cjelobrojno rješenje.

Rješenje.

Neka je x cjelobrojno rješenje dane jednačbe. Tada je:

$$\begin{aligned} x^3 - nx^2 + nx - n^2 &= 1 \\ x^2(x-n) + n(x-n) &= 1 \\ (x-n)(x^2+n) &= 1. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Umnožak je jednak 1 jedino ako su oba faktora 1 ili -1 . 1 bod

U prvom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x - n &= 1 \\ x^2 + n &= 1. \end{aligned}$$

Tada je

$$x = n + 1 \implies (n + 1)^2 + n = 1,$$

što nakon sređivanja daje jednadžbu

$$n^2 + 3n = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Slijedi da su rješenje sustava $n = 0$ i $x = 1$, odnosno $n = -3$ i $x = -2$. 2 boda

U drugom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x - n &= -1 \\ x^2 + n &= -1. \end{aligned}$$

Tada je

$$x = n - 1 \implies (n - 1)^2 + n = -1.$$

Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$n^2 - n + 2 = 0, \quad 2 \text{ boda}$$

koja nema rješenja u skupu cijelih brojeva. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-4.1.

Riješite nejednadžbu $\binom{n+1}{6} < \binom{n+1}{n-3}$.

Rješenje.

Zbog simetrije binomnih koeficijenata $\binom{n+1}{n-3}$ jednako je $\binom{n+1}{4}$.

1 bod

Uvjet zadatka je $n \geq 5$.

1 bod

Nejednadžba $\binom{n+1}{6} < \binom{n+1}{4}$ prelazi u

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6!} < \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}.$$

1 bod

Nakon skraćivanja slijedi

$$\frac{(n-3)(n-4)}{30} < 1,$$
$$n^2 - 7n - 18 < 0.$$

1 bod

Rješenje nejednadžbe je $n \in \langle -2, 9 \rangle$,

1 bod

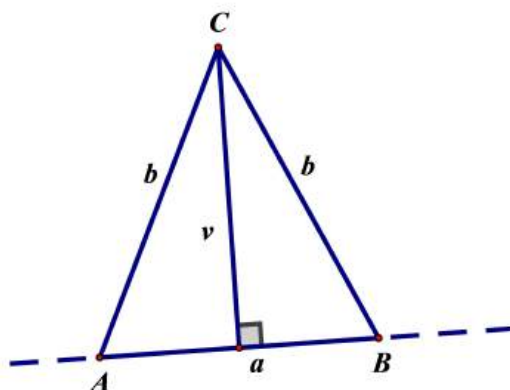
ali zbog početnih uvjeta to su samo prirodni brojevi $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

1 bod

Zadatak B-4.2.

Osnovica $\overline{AB}$ jednakokrakog trokuta ABC nalazi se na pravcu $x - 2y + 20 = 0$, a treći je vrh u točki $C(1, 8)$. Ako je površina trokuta 15, odredite duljine njegovih stranica.

Rješenje.



1 bod

Visina trokuta je udaljenost točke C do pravca AB ,

$$c = \frac{|1 - 16 + 20|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Neka je $|AB| = a$. Iz površine odredimo duljinu osnovice,

$$P = \frac{av}{2},$$
$$a = \frac{2P}{v} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}. \quad 2 \text{ boda}$$

Duljinu kraka možemo izračunati po Pitagorinom poučku:

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{45 + 5} = 5\sqrt{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-4.3.

Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi

$$1 - \sqrt{1 - \log_a x}, \quad 2\log_a x, \quad 1 + \sqrt{1 - \log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

Rješenje.

Dani izrazi moraju zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad 1 - \log_a x \geq 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, za rješenje treba vrijediti:

$$0 < x \leq a, \quad \text{za } a > 1$$
$$x \geq a, \quad \text{za } 0 < a < 1. \quad (*) \quad 1 \text{ bod}$$

Primjenimo svojstvo geometrijskog niza:

$$(2\log_a x)^2 = (1 - \sqrt{1 - \log_a x})(1 + \sqrt{1 - \log_a x}) \quad 1 \text{ bod}$$
$$4\log_a^2 x = 1 - (1 - \log_a x)$$
$$4\log_a^2 x = \log_a x.$$

Jedno rješenje je $\log_a x = 0$, a to ne može biti član rastućeg geometrijskog niza. 1 bod

Drugo rješenje

$$\log_a x = \frac{1}{4}$$
$$x = \sqrt[4]{a}, \quad 1 \text{ bod}$$

zadovoljava uvjet (*) jer

$$0 < \sqrt[4]{a} \leq a, \quad \text{za } a > 1$$
$$\sqrt[4]{a} \geq a, \quad \text{za } 0 < a < 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Priznati ako je učenik umjesto raspisivanja i rješavanja uvjeta jednostavno provjerio dobiveno rješenje uvrštavanjem.

Zadatak B-4.4.

Znamenke deveteroznamenkastog broja su međusobno različite i različite su od 0. Svake dvije susjedne znamenke određuju dvoznamenkasti broj koji je djeljiv sa 7 ili s 13. Odredite taj deveteroznamenkasti broj.

Rješenje.

Znamenke deveteroznamenkastog broja su $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ u nekom poretku.

Dvoznamenkasti brojevi $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, hi$ moraju biti djeljivi sa 7 ili s 13.

Dvoznamenkasti brojevi koji su djeljivi sa 7 su: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Dvoznamenkasti brojevi koji su djeljivi s 13 su: 39, 52, 65, 78, 91.

Brojevi 70 i 77 ne mogu se pojaviti među znamenkama danog broja jer sve znamenke moraju biti različite i različite od 0. Znamenka 7 se mora pojaviti jednom, a kako niti jedan preostali broj ne završava znamenkom 7, broj 78 mora biti na početku.

2 boda

Slijedi: 784 (84 jedini počinje s 8), odnosno 7842 ili 7849.

1 bod

U slučaju da broj počinje s 7842 sljedeća je znamenka 1 ili 6, odnosno 78421 ili 78426. Pogledajmo svaku od tih mogućnosti:

$78421 \rightarrow 7842135 \rightarrow 78421356 \rightarrow$ ne može

$\rightarrow 7842139 \rightarrow$ ne može

1 bod

$78426 \rightarrow 784263 \rightarrow 7842635 \rightarrow$ ne može

$\rightarrow 784265 \rightarrow$ ne može.

1 bod

Za svaku od mogućnosti gdje piše *ne može* znamenke se u jednom trenutku počinju ponavljati.

Ostaje još provjeriti slučaj kada broj počinje sa 7849:

$7849 \rightarrow 78491 \rightarrow 784913 \rightarrow 7849135 \rightarrow 78491352 \rightarrow 784913526$

$\rightarrow 78491355 \rightarrow$ ne može

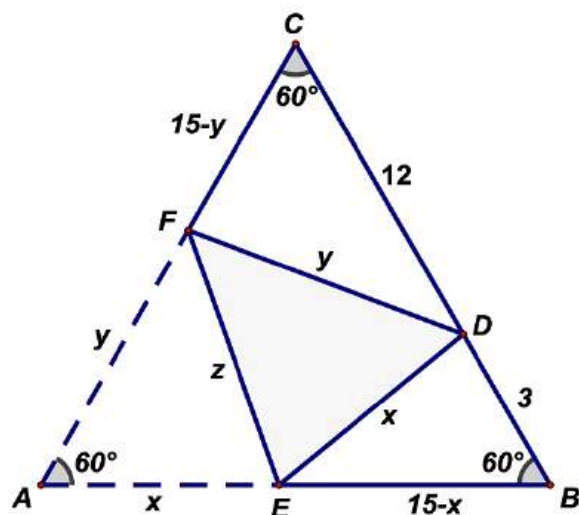
Dakle, jedina je mogućnost broj 784913526.

1 bod

Zadatak B-4.5.

Komad papira ima oblik jednakostraničnog trokuta ABC duljine stranice 15 cm. Papir presavinemo tako da vrh A dođe u točku D na stranici $\overline{BC}$ te da je $|BD| = 3$ cm. Nastao je pregib $\overline{EF}$, gdje je točka E na $\overline{AB}$, a točka F na $\overline{AC}$. Odredite duljinu pregiba $|\overline{EF}|$.

Rješenje.



Precizna slika s označenim sukladnim dužinama x, y :

2 boda

Primijenimo poučak o kosinusu na trokute CDF , BED i DEF .

1 bod

Iz $\triangle CDF$ slijedi:

$$\begin{aligned} y^2 &= (15 - y)^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot (15 - y) \cdot \cos 60^\circ \\ y^2 &= 225 - 30y + y^2 + 144 - 180 + 12y \\ 18y &= 189 \\ y &= \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

1 bod

Iz $\triangle BED$:

$$\begin{aligned} x^2 &= (15 - x)^2 + 3^2 - 2 \cdot (15 - x) \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ x &= 7 \end{aligned}$$

1 bod

Iz $\triangle DEF$:

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ \\ z^2 &= 7^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - 2 \cdot 7 \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ z &= \frac{7\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

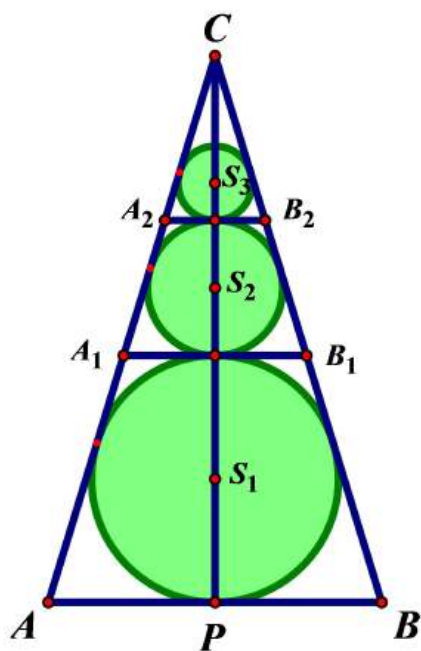
1 bod

Dakle, duljina pregiba $|\overline{EF}|$ iznosi $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ cm.

Zadatak B-4.6.

U jednakokrani trokut osnovice duljine 14 cm i krakova duljine 25 cm upisan je krug. Iznad njega upisan je drugi krug koji dodiruje oba kraka i prvi krug, iznad ovoga upisan je treći krug i tako dalje istim postupkom nastavljamo upisivati krugove. Ako sve upisane krugove obojimo nekom bojom, koji će dio površine trokuta ostati neobojan?

Prvo rješenje.



1 bod

Po Pitagorinom poučku izračunamo duljinu visine na osnovicu.

$$v = |\overline{CP}| = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\text{cm}.$$

1 bod

Polumjer najveće upisane kružnice izračunamo iz $P = r_1 s$,

$$r_1 = \frac{14 \cdot 24}{25 + 25 + 14} = \frac{21}{4}.$$

1 bod

Promotrimo slične trokute ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$...

1 bod

Koeficijent sličnosti trokuta izračunamo iz omjera visina

$$k = \frac{24 - 2r_1}{24} = \frac{9}{16}.$$

2 boda

Analogno vrijedi i za ostale trokute.

Ako su trokuti slični s koeficijentom sličnosti k , onda su površine upisanih krugova proporcionalne s $k^2 = \frac{81}{256}$.

1 bod

Računamo zbroj površina svih krugova

$$P = P_1 + k^2 P_1 + k^4 P_1 + \dots = \frac{P_1}{1 - k^2} = \frac{\frac{441}{16}}{\frac{1 - 81}{256}} \pi = \frac{1008}{25} \pi.$$

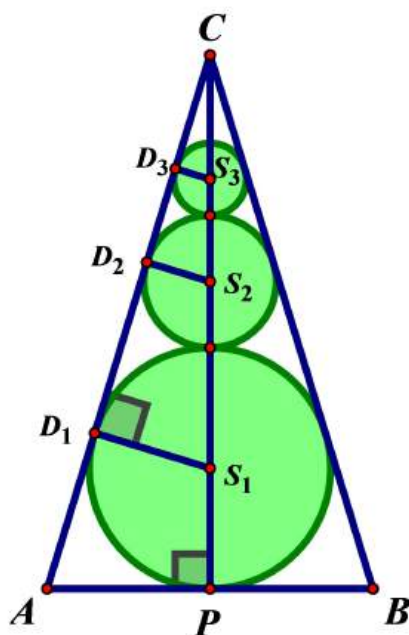
2 boda

Neobojana površina je

$$\frac{14 \cdot 24}{2} - \frac{1008}{25} \pi = 168 - \frac{1008}{25} \pi \text{ cm}^2.$$

1 bod

Drugo rješenje.



1 bod

Po Pitagorinom poučku izračunamo duljinu visine na osnovicu.

$$v = |\overline{CP}| = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ cm.}$$

1 bod

Trokuti APC , S_1D_1C , S_2D_2C , $S_3D_3C, \dots$ su međusobno slični (svi kutovi su im sukkladni). Označimo $|D_1S_1| = |PS_1| = r_1$. Iz sličnosti trokuta APC i S_1D_1C slijedi

$$\frac{r_1}{24 - r_1} = \frac{7}{25},$$

$$r_1 = \frac{21}{4} \text{ cm.}$$

2 boda

Označimo $|D_2S_2| = r_2$. Iz sličnih trokuta APC i S_2D_2C slijedi

$$\frac{r_2}{24 - 2r_1 - r_2} = \frac{7}{25},$$

$$r_2 = \frac{189}{64} \text{ cm.}$$

1 bod

Analogno dobivamo i polumjer treće kružnice $r_3 = \frac{1701}{1024} \text{ cm.}$

1 bod

Površine krugova su $r_1^2\pi$, $r_2^2\pi$, $r_3^2\pi, \dots$

One čine geometrijski niz s kvocijentom $q = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_3^2}{r_2^2}$.

1 bod

Provjerimo da su ti kvocijenti jednaki:

$$\frac{\left(\frac{189}{64}\right)^2}{\left(\frac{21}{4}\right)^2} = \left(\frac{189 \cdot 4}{21 \cdot 64}\right)^2 = \left(\frac{9}{16}\right)^2,$$

$$\frac{\left(\frac{1701}{1024}\right)^2}{\left(\frac{189}{64}\right)^2} = \left(\frac{1701 \cdot 64}{1024 \cdot 189}\right)^2 = \left(\frac{9}{16}\right)^2.$$

1 bod

Izračunajmo razliku površine trokuta i površine svih krugova.

$$P = \frac{14 \cdot 24}{2} - \frac{\left(\frac{21}{4}\right)^2 \pi}{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = 168 - \frac{441\pi}{16 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2\right)} = 168 - \frac{441\pi}{16 \cdot \frac{175}{256}} = 168 - \frac{1008}{25} \pi \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-4.7.

Nultočke polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 3$ su realni brojevi x_1, x_2, x_3 koji čine rastući aritmetički niz. Odredite koeficijent a i nultočke zadanog polinoma.

Prvo rješenje.

Polinom $p(x)$ pišemo u faktoriziranom obliku:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + ax + 3 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Po teoremu o jednakosti polinoma slijedi sustav jednadžbi (Vièteove formule)

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2 + x_3) = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ -x_1x_2x_3 = 3. \end{cases} \quad 3 \text{ boda}$$

Prema uvjetu zadatka x_1, x_2, x_3 su članovi rastućeg aritmetičkog niza te pišemo

$$x_1 = t - d, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t + d, \quad t \in \mathbb{R}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz prve jednadžbe sustava slijedi

$$t - d + t + t + d = 3 \Rightarrow t = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Nadalje iz druge jednadžbe sustava dobivamo

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= a, \\ a &= (1 - d) \cdot 1 + (1 - d) \cdot (1 + d) + 1 \cdot (1 + d), \\ a &= 3 - d^2. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz treće jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= -3 \\ (1 - d) \cdot 1 \cdot (1 + d) &= -3, \\ 1 - d^2 &= -3, \\ d^2 &= 4, \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

a kako je niz rastući, $d > 0$, slijedi $d = 2$. 1 bod

Koeficijent a jednak je $a = 3 - 2^2 = -1$, 1 bod

a nultočke zadanog polinoma su $-1, 1, 3$. 1 bod

Napomena: Učenik ne mora izvoditi Vièteove formule, može ih koristiti bez dokaza.

Drugo rješenje.

Ako su x_1, x_2, x_3 tri člana aritmetičkog niza možemo ih označiti s $t - d, t, t + d$. 1 bod

Tada je t rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}(t - d)^3 - 3(t - d)^2 + a(t - d) + 3 &= 0 \\ t^3 - 3t^2 + at + 3 &= 0 \\ (t + d)^3 - 3(t + d)^2 + a(t + d) + 3 &= 0\end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Nakon sređivanja imamo sljedeće tri jednadžbe:

$$\begin{aligned}t^3 - 3t^2d + 3td^2 - d^3 - 3t^2 + 6td - 3d^2 + at - ad + 3 &= 0 \\ t^3 - 3t^2 + at + 3 &= 0 \\ t^3 + 3t^2d + 3td^2 + d^3 - 3t^2 - 6td - 3d^2 + at + ad + 3 &= 0\end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Oduzimanjem prve i treće od prethodnih jednadžbi dobit ćemo:

$$6t^2d + 2d^3 - 12td + 2ad = 0,$$

a nakon dijeljenja s $2d$ ($d > 0$ jer je niz rastući)

$$3t^2 + d^2 - 6t + a = 0 \Rightarrow a = -3t^2 - d^2 + 6t. (1) \quad 1 \text{ bod}$$

Oduzimanjem druge i treće jednadžbe dobit ćemo:

$$\begin{aligned}6t^2d + 3td^2 + d^3 - 6td - 3d^2 + ad &= 0, \\ 3t^2 + 3td + d^2 - 6t - 3d + a &= 0 \\ a = -3t^2 - 3td - d^2 + 6t + 3d. &(2)\end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz (1) i (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}-3t^2 - 3td - d^2 + 6t + 3d &= -3t^2 - d^2 + 6t, \\ 3td - 3d &= 0, \\ t = 1 \text{ (zbog } d > 0). &\end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Iz druge jednadžbe početnog sustava slijedi

$$1 - 3 + a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1. \quad 1 \text{ bod}$$

Razliku d možemo primjerice izračunati iz (1)

$$-1 = -3(-d)^2 + 6, \quad d^2 = 4, \quad d = 2. \quad 1 \text{ bod}$$

Nultočke polinoma su -1,1,3. 1 bod

Dopuna rješenjima 1.razreda B varijanta

Zadatak B-1.5

U zadnjoj rečenici piše trokut AMB, a treba pisati trokut CMB.

Zadatak B-1.6

Drugo rješenje.

Oznake:

t – vrijeme do trenutka kad Pero siđe s motora

t' - vrijeme od trenutka kad Pero siđe s motora do trenutka kad Luka sjedne na motor (tj. vrijeme potrebno da se motor vrati)

t_u – ukupno vrijeme

v_m – brzina motora

v_p – brzina pješaka

$$v_m \cdot t + v_p \cdot (t_u - t) = 170km \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_p \cdot t + v_p \cdot t' + v_m(t_u - t - t') = 170km \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_p \cdot t' + v_m \cdot t' = v_m \cdot t - v_p \cdot t \quad 1 \text{ bod}$$

$$t' = \frac{8}{9}t \text{ i rješavanje sustava} \quad 4 \text{ boda}$$

$$t' = \frac{8}{5}h = 1h \text{ i } 48min \quad 1 \text{ bod}$$

$$t = \frac{17}{5}h = 3h \text{ i } 24 \text{ min} \quad 1 \text{ bod}$$

$$t = 5h \text{ i } 12 \text{ min} \quad 1 \text{ bod}$$