

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Prvi školski sat završava u 9:50, a drugi u 10:40. 2 BODA

Treći školski sat završava u 11:30, a četvrti u 12:20. 2 BODA

Veliki odmor traje do 13:05, kada počinje peti sat. 1 BOD

Peti školski sat završava u 13:55. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Pet školskih sati traje $50 \cdot 5 = 250$ minuta. 2 BODA

Zajedno s odmorom, to je $250 + 45 = 295$ minuta. 1 BOD

To je 4 sata (240 min) i 55 minuta. 2 BODA

Peti školski sat završava u 13:55. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Iz izraza $8 \cdot \emptyset = 56$ slijedi da je $\emptyset = 7$. 1 BOD

Uvrštavanjem $\emptyset = 7$ u izraz $6 \cdot \emptyset - \otimes = 30$ dobiva se $\otimes = 42 - 30$, 1 BOD

odnosno $\otimes = 12$. 1 BOD

Uvrštavanjem $\otimes = 12$ u izraz $7 \cdot \Delta + \otimes = 117$ dobiva se $7 \cdot \Delta = 117 - 12$, 1 BOD

odnosno $7 \cdot \Delta = 105$. 1 BOD

Iz toga se dobiva da je $\Delta = 105 : 7$,
odnosno $\Delta = 15$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Neka je traženi broj oblika $\overline{abc}$, $a \neq 0$. Iz uvjeta zadatka je $a \cdot b = c$. Rješenja su dana u tablici:

a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	0
c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	2	4	6	8	0

<i>a</i>	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
<i>b</i>	1	2	3	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
<i>c</i>	3	6	9	0	4	8	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9

Traženi brojevi su: 100, 111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199, 200, 212, 224, 236, 248, 300, 313, 326, 339, 400, 414, 428, 500, 515, 600, 616, 700, 717, 800, 818, 900, 919.

Boduju se točno zapisani brojevi, na sljedeći način:

Ako je ukupan broj točno zapisanih brojeva

- veći ili jednak 7 i manji od 14 1 BOD
- veći ili jednak 14 i manji od 20 2 BODA
- veći ili jednak 20 i manji od 26 3 BODA
- veći ili jednak 26 i manji od 32 4 BODA
- 32 5 BODOVA

Takvih brojeva ima ukupno 32. 1 BOD

Napomena: Ako učenik osim traženih brojeva ima zapisane brojeve za koje ne vrijedi traženo svojstvo, onda se od broja točnih oduzima broj pogrešnih brojeva te se ta razlika uzima kao broj točno zapisanih brojeva i boduje se prema gore navedenom kriteriju.

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Trećina mase pšenice je

148 kg – 110 kg = 1 BOD

= 38 kg. 1 BOD

Masa pšenice je $3 \cdot 38$ kg = 1 BOD

= 114 kg. 1 BOD

Masa praznog spremnika je 148 kg – 114 kg = 1 BOD

= 34 kg. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Trećina mase pšenice je

148 kg – 110 kg = 1 BOD

= 38 kg. 1 BOD

Masa pšenice, nakon što je potrošena trećina, je $2 \cdot 38$ kg = 1 BOD

= 76 kg. 1 BOD

Masa praznog spremnika je 110 kg – 76 kg = 1 BOD

= 34 kg. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Ako se jedan od pribrojnika umanju za 21, tada se i zbroj umanju za 21.	
Umanjeni zbroj jednak je 2 000.	1 BOD
Neka je prvi broj najmanji, a treći najveći.	
Drugi broj je za 200 veći od prvog, a treći broj je za $200 + 100 = 300$ veći od prvog.	1 BOD
Ako od 2 000 oduzmemo 200 i 300, novi umanjeni zbroj je 1 500.	1 BOD
Dobili smo tri jednaka broja, $1\,500 : 3 = 500$.	1 BOD
Prvi pribrojnik je jednak $500 + 21 = 521$.	1 BOD
Drugi broj je jednak $500 + 200 = 700$. Treći broj je jednak $500 + 300 = 800$.	1 BOD
.....	UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ako se jedan od pribrojnika umanju za 21, tada se i zbroj umanju za 21.	
Umanjeni zbroj jednak je 2 000.	1 BOD
Neka je prvi broj najmanji, a treći najveći.	
Neka je prvi broj a .	
Tada je drugi broj $a + 200$, a treći $a + 200 + 100 = a + 300$.	1 BOD
$a + a + 200 + a + 300 = 2\,000$	
$3a + 500 = 2\,000$	
$3a = 1\,500$	1 BOD
$a = 500$	1 BOD
Prvi pribrojnik je jednak $500 + 21 = 521$.	1 BOD
Drugi broj je jednak $500 + 200 = 700$. Treći broj je jednak $500 + 300 = 800$.	1 BOD
.....	UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Ako se jedan od pribrojnika umanju za 21, tada se i zbroj umanju za 21.	
Umanjeni zbroj jednak je 2 000.	1 BOD
Neka je prvi broj najmanji, a treći najveći.	
Neka je prvi broj 100. Tada je drugi broj 300, a treći 400.	
Njihov je zbroj 800.	1 BOD
Nedostaje još $2\,000 - 800 = 1\,200$.	
Svaki se broj mora povećati za $1\,200 : 3 = 400$.	1 BOD
Brojevi su 500, 700 i 800.	1 BOD
Prvi pribrojnik je jednak $500 + 21 = 521$.	1 BOD
Drugi broj je jednak 700, a treći broj je jednak 800.	1 BOD

Napomena: Do brojeva 500, 700 i 800 učenik može doći metodom pokušaja i pogrešaka.

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Ukupan broj bombona treba pri dijeljenju s 10 dati ostatak 1 pa su brojevi koji dolaze u obzir:	
201, 211, 221, 231, 241, 251.	2 BODA
Budući da dvoje unučadi ne dolazi, baka treba napraviti 8 jednakih paketića.	1 BOD

S obzirom da, u tom slučaju, baki ostaju 3 bombona, znači da će pri dijeljenju ukupnog broja bombona brojem 8 ostatak biti 3. 1 BOD

Ako je baka kupila 201 bombon i podijelila ih u 8 jednakih paketića, dobije se $201 : 8 = 25$ i ostatak 1, što bi značilo da joj je ostao 1 bombon, a ne 3 kako piše u zadatku.

To znači da u velikoj vrećici nije bio ukupno 201 bombon. 1 BOD

Ako je baka kupila 211 bombona i podijelila ih u 8 jednakih paketića, dobije se $211 : 8 = 26$ i ostatak 3.

Znači da je moguće da je baka Mara kupila ukupno 211 bombona. 1 BOD

I za ostale brojeve treba provjeriti daju li ostatak 3 pri dijeljenju s 8. 1 BOD

$221 : 8 = 27$ i ostatak 5

$231 : 8 = 28$ i ostatak 7

$241 : 8 = 30$ i ostatak 1

$251 : 8 = 31$ i ostatak 3

Zaključujemo da je također moguće da je baka Mara kupila ukupno 251 bombon. 2 BODA

Dakle, moguća su dva rješenja: da je baka Mara kupila ukupno 211 bombona ili 251 bombon.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ukupan broj bombona treba pri dijeljenju s 10 dati ostatak 1 pa su brojevi koji dolaze u obzir:

201, 211, 221, 231, 241, 251. 2 BODA

Budući da dvoje unučadi ne dolazi, baka treba napraviti 8 jednakih paketića. 1 BOD

S obzirom da, u tom slučaju, baki ostaju 3 bombona, znači da pri dijeljenju ukupnog broja bombona brojem 8 ostatak treba biti 3. 1 BOD

S obzirom da je $200 : 8 = 25$, najmanji broj veći od 200 koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 3 je broj 203.

Brojevi, veći od 200, a manji od 260, koji pri dijeljenju s 8 daju ostatak 3 su:

203, 211, 219, 227, 235, 243, 251 i 259. 2 BODA

Treba odrediti broj koji pri dijeljenju s 10 daje ostatak 1 i pri dijeljenju s 8 ostatak 3. 1 BOD

Može se uočiti da je jedan takav broj 211. Dakle, moguće je da je baka Mara kupila ukupno 211 bombona. 1 BOD

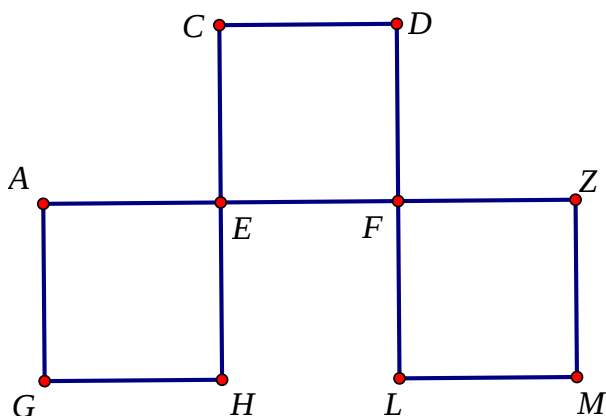
Drugi takav broj je 251, što znači da je moguće da je baka Mara kupila 251 bombon. 1 BOD

Dakle, moguća su dva rješenja: da je baka Mara kupila ukupno 211 bombona ili 251 bombon.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7.



Ima 8 različitih putova.

– za svaki put dodijeliti po 1 BOD

$A E C D F Z$

$A E C D F L M Z$

$A E F Z$

$A E F L M Z$

$A G H E C D F Z$

$A G H E C D F L M Z$

$A G H E F Z$

$A G H E F L M Z$

$A G H E C D F L M Z$ je najdulji put duljine 9 cm.

1 BOD

$A E F Z$ je najkraći put duljine 3 cm.

1 BOD

Napomena: Ako učenik osim traženih puteva ima zapisane puteve za koje ne vrijedi traženo svojstvo, onda se od broja točnih oduzima broj pogrešnih puteva te se ta razlika uzima kao broj točno zapisanih .

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} & 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - (81 \cdot 8 + 8 \cdot 19) - 100] - 2\} + 879 = \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - 8 \cdot (81 + 19) - 100] - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - 8 \cdot 100 - 100] - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - 800 - 100] - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - 0 - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot 2 + 879 \\ & = 2\,858 - 1\,716 + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 1\,142 + 879 \\ & = 2\,021 & 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned} & 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - (81 \cdot 8 + 8 \cdot 19) - 100] - 2\} + 879 = \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - (648 + 152) - 100] - 2\} + 879 & 2 \text{ BODA} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - [900 - 800 - 100] - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot \{4 - 0 - 2\} + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 2\,858 - 858 \cdot 2 + 879 \\ & = 2\,858 - 1\,716 + 879 & 1 \text{ BOD} \\ & = 1\,142 + 879 \\ & = 2\,021 & 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

2. Prvi način:

Broj 24 se može zapisati kao umnožak 3 jednoznamenkasta broja na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 6 & 3 \text{ BODA} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 8 \end{aligned}$$

Pomoću tih znamenki mogu se zapisati sljedeći troznamenkasti parni brojevi:

234, 324, 342, 432, 146, 164, 416, 614, 138, 318. 2 BODA

Najveći parni među njima je **614**. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj. Prema uvjetima zadatka vrijedi $a \cdot b \cdot c = 24$.

Postoje tri trojke brojeva koje zadovoljavaju taj uvjet, a to su (2, 3, 4), (8, 3, 1) i (6, 4, 1). 3 BODA

Kako je uvjet zadatka pronaći najveći troznamenkasti broj, promatramo znamenku stotica.

Ako bi znamenka stotica bila 8, tada bi troznamenkasti broj bio neparan (813 ili 831). 1 BOD

Zaključujemo da je znamenka stotica traženog troznamenkastog broja 6. 1 BOD

Kako broj mora biti paran, znamenka jedinica je 4 pa je traženi broj **614**. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Broj 24 se može zapisati kao umnožak 3 jednoznamenkasta broja na sljedeći način:

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 6$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 8$$

3 BODA

Najveći parni troznamenkasti broj zapisan pomoću znamenaka 2, 3 i 4 je 432. 1 BOD

Najveći parni troznamenkasti broj zapisan pomoću znamenaka 1, 4 i 6 je 614. 1 BOD

Najveći parni troznamenkasti broj zapisan pomoću znamenaka 1, 3 i 8 je 318. 1 BOD

Najveći parni među njima je **614**.

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik napisao rješenje bez obrazloženja treba dobiti 2 BODA.

3. Prvi način:

Pojednostavnimo svaki izraz:

$$A = 2x + 13 + 11x - 4 - 5x + 6x + 12 = 14x + 21 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$B = 9 + 3y + 14y - 4 - 5y + 7 - y + 5 = 11y + 17 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Za } x = 6, A = 14 \cdot 6 + 21 = 84 + 21 = 105. \quad 1 \text{ BOD}$$

Tražimo y za koji će izrazi A i B biti jednaki:

$$11y + 17 = 105$$

$$11y = 105 - 17 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$11y = 88 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$y = 88 : 11$$

$$y = 8 \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Za $x = 6$ je

$$A = 2 \cdot 6 + 13 + 11 \cdot 6 - 4 - 5 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 12 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 12 + 13 + 66 - 4 - 30 + 36 + 12 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 105 \quad 1 \text{ BOD}$$

Tražimo y za koji će izrazi A i B biti jednaki:

$$9 + 3y + 14y - 4 - 5y + 7 - y + 5 = 105$$

$$11y + 17 = 105 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$11y = 105 - 17$$

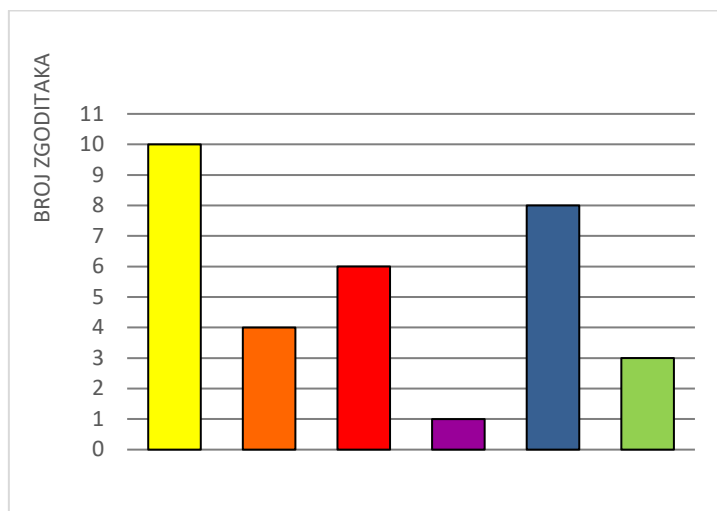
$$11y = 88 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$y = 88 : 11$$

$$y = 8 \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

4.



Iz dijagrama i uvjeta zadatka zaključujemo da je **Ivan postigao jedan zgoditak**.

1 BOD

Kako je Marko postigao dva zgoditka manje nego Luka, iz dijagrama zaključujemo da je Marko postigao 8 ili 6 ili 4 zgoditka, a Luka 10 ili 8 ili 6 zgoditaka.

Iz sljedećeg uvjeta: „Broj Lukinih zgoditaka jednak je broju zgoditaka koje su postigli Filip i Adrian zajedno.“ i grafičkog prikaza zaključujemo da je **Luka postigao 10 zgoditaka** (a Filip i Adrian ili 4 ili 6), a **Marko 8 zgoditaka**.

2 BODA

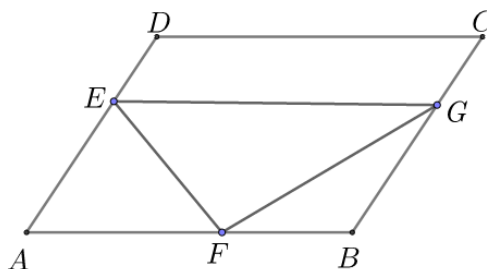
Iz uvjeta: „Filip je postigao dva puta više zgoditaka od Borne.“, zaključujemo da je **Filip postigao 6 zgoditaka**, a **Borna 3 zgoditka**. Prema tome, **Adrian je postigao 4 zgoditka**.

3 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan broj zgoditaka određen za svakog dječaka, i bez objašnjenja, donosi po 1 BOD.

5.



Moguće staze su:

AFB, AFEDCGB, AFEGB, AFGB, AEGB, AEFB, AEFGB, AEDCGB, AEGFB, AEDCGFB

Svaka dva točna rješenja nose 1 BOD.

5 BODOVA

Ukupno postoji 10 različitih načina da Andrej stigne do Branimira.

1 BOD

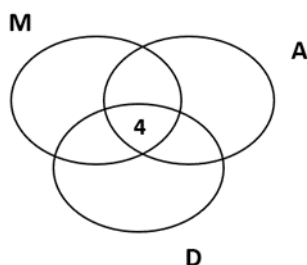
..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Jedno točno rješenje NE BODUJE SE S POLA BODA.

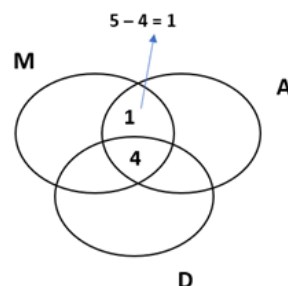
6. Zadatak možemo riješiti Vennovim dijagramom.

Neka je M skup gostiju koje je pozvala Maja, A skup gostiju koje je pozvala Ana, a D skup gostiju koje je pozvala Dora.

Podatak da su sve tri prijateljice pozvale 4 zajednička prijatelja smjestimo u presjek sva tri skupa. (Slika 1.) 1 BOD



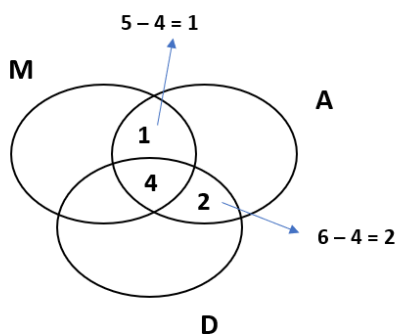
Slika 1.



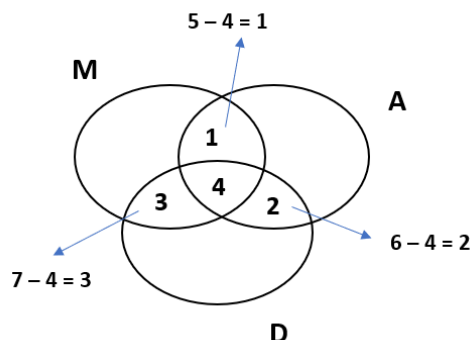
Slika 2.

Nakon toga rasporedimo zajedničke goste.

Kako su Maja i Ana pozvale 5 zajedničkih prijatelja, a sve tri su pozvale 4 zajednička prijatelja, zaključujemo da su samo Maja i Ana pozvale $5 - 4 = 1$ zajedničkog prijatelja. (Slika 2.) 1 BOD



Slika 3.



Slika 4.

Ana i Dora pozvale su 6 zajedničkih prijatelja, a kako su sve tri prijateljice pozvale 4 zajednička prijatelja, zaključujemo da su samo Ana i Dora pozvale $6 - 4 = 2$ zajednička prijatelja. (Slika 3.)

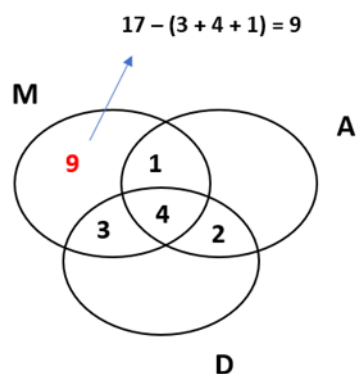
1 BOD

Maja i Dora pozvale su 7 zajedničkih prijatelja, a kako su sve tri prijateljice pozvale 4 zajednička prijatelja, zaključujemo da su samo Maja i Dora pozvale $7 - 4 = 3$ zajednička prijatelja. (Slika 4.)

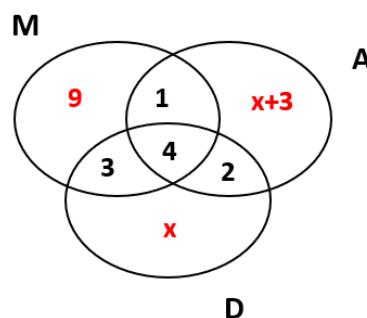
1 BOD

Dakle, samo Maja je pozvala $17 - (1 + 4 + 3) = 9$ prijatelja. (Slika 5.)

1 BOD



Slika 5.



Slika 6.

Neka je x broj gostiju koje je pozvala samo Dora.

Iz uvjeta zadatka, broj gostiju koje je pozvala samo Ana je $x + 3$. (Slika 6.)

1 BOD

Kako je ukupan broj gostiju 40, slijedi:

$$9 + x + x + 3 + 3 + 1 + 2 + 4 = 40$$

1 BOD

$$2x + 22 = 40$$

$$2x = 40 - 22$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

1 BOD

Dora je pozvala $9 + 3 + 4 + 2 = 18$ gostiju.

1 BOD

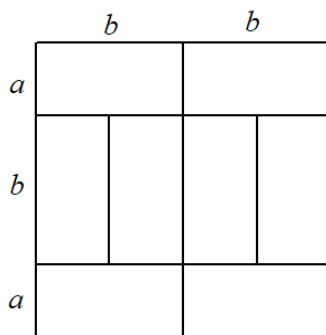
Ana je pozvala $12 + 1 + 4 + 2 = 19$ gostiju.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik umjesto jednadžbe koristi grafički prikaz za određivanje nepoznate Veličine, treba bodovati u skladu s predloženim rješenjem.

7.



Neka je a duljina kraće stranice pravokutnika, a b dulje.

Kako 8 takvih pločica čine kvadratnu ploču, za stranice te ploče vrijedi $2b = 2a + b$, a iz toga slijedi da je $b = 2a$.

2 BODA

Opseg pločice oblika pravokutnika je $o = a + 2a + a + 2a = 6a$.

1 BOD

Tada je duljina kraće stranice pravokutnika $a = 144 \text{ cm} : 6 = 24 \text{ cm}$,

1 BOD

a duljina dulje $b = 24 \text{ cm} \cdot 2 = 48 \text{ cm}$.

1 BOD

Duljina stranice kvadrata sa slike je $2b = 96 \text{ cm}$,

1 BOD

a njegova je površina $P = 96 \cdot 96 = 9216 \text{ cm}^2$.

1 BOD

Cijela staza sastoji se od 10 takvih kvadrata pa joj je površina $92\,160 \text{ cm}^2$.

1 BOD

Neka je x duljina stranice kvadrata, tada je opseg cijele staze $o = 10x + x + 10x + x = 22x$.

1 BOD

Opseg cijele staze je $22 \cdot 96 = 2\,112 \text{ cm}$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj 68 Magdalena je mogla dobiti nakon što je prethodnom rezultatu dodala 16.

Početni broj računamo unatrag, oduzimanjem broja 16 te dijeljenjem s 2.

1 BOD

$$68 - 16 = 52$$

$$52 : 2 = 26$$

$$26 - 16 = 10$$

$$10 : 2 = 5$$

Traženi početni broj je 5.

2 BODA

Broj 68 Magdalena je mogla dobiti nakon što je prethodni rezultat pomnožila s 2.

Početni broj računamo unatrag, dijeljenjem s 2 te oduzimanjem broja 16.

1 BOD

$$68 : 2 = 34$$

$$34 - 16 = 18$$

$$18 : 2 = 9$$

Traženi početni broj je 9.

2 BODA

Magdalena je mogla početi računati od broja 5 ili od broja 9.

Napomena: Točno rješenje bez postupka ili objašnjenja bodovati s JEDNIM BODOM.

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. $A = \{-153, -152, -151, \dots, 144, 145\}$ ili

$a \in \{-153, -152, -151, \dots, 144, 145\}$, odnosno

elementi skupa A su: $-153, -152, -151, \dots, 144, 145$.

1 BOD

$B = \{-149, -148, -147, \dots, 86, 87\}$ ili

$b \in \{-149, -148, -147, \dots, 86, 87\}$, odnosno

elementi skupa B su: $-149, -148, -147, \dots, 86, 87$.

1 BOD

Zbroj svih elemenata skupa A je:

$$-153 + (-152) + \dots + (-146) + (-145) + (-144) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + 145 =$$

$$= -153 + (-152) + \dots + (-146) + (-145 + 145) + (-144 + 144) + \dots + (-1 + 1) + 0 =$$

$$= -153 - 152 - 151 - 150 - 149 - 148 - 147 - 146 =$$

1 BOD

$$= -1196$$

1 BOD

Umnožak svih elemenata skupa B je 0 jer je 0 element skupa B .

1 BOD

Umnožak svih elemenata skupa B veći je od zbroja svih elemenata skupa A za 1196.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

3. d – broj godina djeda

o – broj godina oca

s – broj godina sina

Vrijedi:

$$o = (d + s) : 2, \text{ odnosno } d + s = 2o.$$

2 BODA

Kako je $o + (d + s) = 84$, vrijedi

$$o + 2o = 84$$

1 BOD

$$3o = 84$$

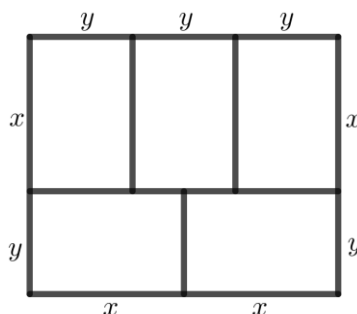
1 BOD

$o = 84 : 3$ 1 BOD
 $o = 28$
 Otac ima 28 godina. 1 BOD
UKUPNO 6 BODOVA

4. Ako je $a = 2$, tada je $a^2 = 4$. Da bi umnožak bio troznamenkasti broj, b mora biti prost broj veći ili jednak broju 25. Da bi umnožak bio manji od 200, b mora biti prost broj manji od 50.
- Tada je $b \in \{29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. 1 BOD
- Ako je $a = 3$, tada je $a^2 = 9$, pa b treba biti prost broj veći od 11, a manji ili jednak broju 22.
- Tada je $b \in \{13, 17, 19\}$. 1 BOD
- Za $a = 5$ vrijedi $a^2 = 25$, pa je $b \in \{5, 7\}$. 1 BOD
- Za $a = 7$ vrijedi $a^2 = 49$, pa je $b \in \{3\}$. 1 BOD
- Za $a \geq 11$ vrijedi $a^2 \cdot b > 200$ za bilo koji prost broj b te rješenja više nema. 1 BOD
- Ukupan broj rješenja je, prema tome, $6 + 3 + 2 + 1 = 12$. 1 BOD
-UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Označimo s x duljinu veće, a s y duljinu manje stranice malog pravokutnika.



Sa slike se zaključuje da je opseg početnog pravokutnika $4x + 5y$. 1 BOD

Vrijedi $4x + 5y = 176$. 1 BOD

Promatrajući gornju i donju stranicu početnog pravokutnika, zaključuje se:

$2x = 3y$, 1 BOD

odnosno $4x = 6y$.

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu slijedi:

$6y + 5y = 176$

$11y = 176$

$y = 176 : 11$

$y = 16 \text{ cm}$ 1 BOD

Dalje je:

$4x = 6 \cdot 16$

$4x = 96$

$x = 96 : 4$

$x = 24 \text{ cm}$ 1 BOD

Duljine stranica početnog pravokutnika su:

$a = 2x = 48 \text{ cm}$ i $b = x + y = 40 \text{ cm}$, 1 BOD

a površina:

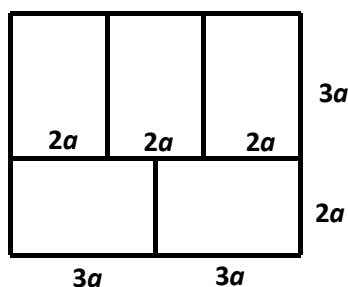
$P = a \cdot b = 48 \cdot 40 = 1\,920 \text{ cm}^2$. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvedimo oznake kao na slici:

1 BOD

Duljine stranica pravokutnika su $6a$ i $5a$, pa je opseg:

$$o = 2 \cdot (6a + 5a)$$

$$o = 22a$$

2 BODA

Kako je $o = 176$ cm, to je:

$$22a = 176$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

1 BOD

Površina velikog pravokutnika je:

$$P = 6a \cdot 5a$$

$$P = 30a^2$$

$$P = 30 \cdot 64$$

$$P = 1\,920 \text{ cm}^2$$

2 BODA

.....:.....UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Izračunamo Gausovim postupkom zbroj prvih 66 prirodnih brojeva.

$$\text{Zbroj je } (1 + 66) \cdot 66 : 2 = 67 \cdot 66 : 2 = 4\,422 : 2 = 2\,211.$$

4 BODA

Količnik broja 2 211 i broja 7 je 315, uz ostatak 6, tj. $2\,211 = 315 \cdot 7 + 6$.

2 BODA

Zbroj će biti djeljiv sa 7 ako izbrišemo broj 6.

1 BOD

Isto tako, zbroj će biti djeljiv sa 7 i ako izbrišemo sve brojeve oblika $7k + 6$, tj. one brojeve koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 6.

To su brojevi: 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55 i 62.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Odredimo zbroj Gausovom dosjetkom:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 65 + 66 = \frac{66 \cdot 67}{2} = 33 \cdot 67 = 2\,211$$

4 BODA

Tražimo broj djeljiv sa 7:

$$2\,211 - 66 = 2\,145, 2\,145 \text{ nije djeljiv sa } 7$$

$$2\,211 - 65 = 2\,146, 2\,146 \text{ nije djeljiv sa } 7$$

$$2\,211 - 64 = 2\,147, 2\,147 \text{ nije djeljiv sa } 7$$

$$2\,211 - 63 = 2\,148, 2\,148 \text{ nije djeljiv sa } 7$$

$$2\,211 - 62 = 2\,149, 2\,149 \text{ je djeljiv sa } 7$$

2 BODA

Svaki sljedeći sedmi broj biti će djeljiv sa 7, a to znači da svaki sljedeći broj koji se oduzima treba umanjiti za 7.

1 BOD

Traženi brojevi su: 62, 55, 48, 41, 34, 27, 20, 13 i 6.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Pravokutnik:

$$P = 48 \text{ cm}^2$$

$$P = a \cdot b$$

U tablici su prikazane sve moguće vrijednosti za duljine stranica a i b te je izračunat opseg.

a (cm)	1	2	3	4	6
b (cm)	48	24	16	12	8
Opseg (cm)	98	52	38	32	28

Napomena 1: Za svaki napisani slučaj i izračunati opseg dobije se po 1 BOD.

5 BODOVA

Kvadrat:

Za svaki od pronađenih 5 slučajeva provjeri se je li duljina stranice a prirodni broj:

Opseg (cm)	98	52	38	32	28
a (cm)	nema rješenja	13	nema rješenja	8	7
Površina (cm ²)	-	169	-	64	49

Napomena 2: Za svaki napisani slučaj i izračunatu površinu dobije se po 1 BOD.

5 BODOVA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $20 : 21 = 0.952380\ 952380 \dots$

2 BODA

```

200
189
---
110
105
---
 50
 42
---
 80
 63
---
170
168
---
200
...
```

$$\frac{20}{21} = 0.\dot{9}5238\dot{0}$$

1 BOD

Period ima 6 znamenki, pa podijelimo 2 021 sa 6:

$$2\ 021 : 6 = 336 \text{ i ostatak } 5$$

1 BOD

```

22
41
5
```

2021. znamenka iza decimalne točke je 5. znamenka perioda.

1 BOD

2021. znamenka iza decimalne točke je znamenka 8.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Učenik može zadatak rješavati metodom tablica.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
ordinata	A						
	B						
	C						
	2						
	-3						
	5						

Nijedna točka nije u III. kvadrantu, znači da nije moguća kombinacija negativne apscise i negativne ordinate.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A						
	B						
	C						
ordinata	2						
	-3		-				
	5						

Točka A ne pripada koordinatnoj osi, znači da točka A ne može imati apscisu 0.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A			-			
	B						
	C						
ordinata	2						
	-3		-				
	5						

Ordinata točke B jednaka je zbroju ordinata preostalih dviju točaka. Jedina moguća ordinata za točku B je 2 jer je $-3 + 5 = 2$.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A			-	-		
	B				+	-	-
	C				-		
ordinata	2						
	-3		-				
	5						

Apscisa točke C jednaka je ordinati točke B. Znači da je apscisa točke C jednaka 2.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A	-		-	-		
	B	-			+	-	-
	C	+	-	-	-		
ordinata	2						
	-3		-				
	5						

Iz tablica se lako može očitati da je apscisa točke B jednaka 0, a apscisa točke A jednaka -3 .

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A	-	+	-	-		
	B	-	-	+	+	-	-
	C	+	-	-	-		
ordinata	2						
	-3		-				
	5						

Prema tome, točka B ima koordinate $B(0, 2)$.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A	-	+	-	-		
	B	-	-	+	+	-	-
	C	+	-	-	-		
ordinata	2	-	-	+			
	-3		-	-			
	5			-			

Koordinate točaka su $A(-3, 5)$ i $C(2, -3)$.

		apscisa			ordinata		
		2	-3	0	2	-3	5
	A	-	+	-	-	-	+
	B	-	-	+	+	-	-
	C	+	-	-	-	+	-
ordinata	2	-	-	+			
	-3	+	-	-			
	5	-	+	-			

- za svaku točno određenu koordinatu svake točke treba dodijeliti po 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Učenik može zapisati svih 9 mogućih uređenih parova i eliminacijom odrediti da su tražene točke:

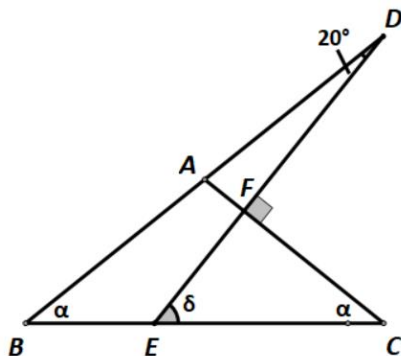
$A(-3, 5)$, $B(0, 2)$, $C(2, -3)$.

- za svaku točno određenu koordinatu svake točke treba dodijeliti po 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Neka su α veličine kutova uz osnovicu $\overline{BC}$.



Tada vrijedi:

(1) $\alpha + \delta = 90^\circ$ u pravokutnom trokutu $\triangle ECF$.

2 BODA

(2) $\delta = \alpha + 20^\circ$ jer je δ vanjski kut trokuta $\triangle BED$.

2 BODA

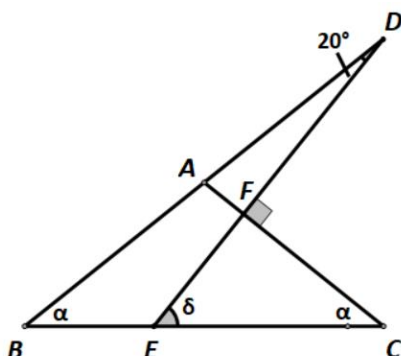
Iz (1) i (2) slijedi: $\delta - 20^\circ = 90^\circ - \delta$, odnosno $\delta = 55^\circ$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su α veličine kutova uz osnovicu $\overline{BC}$.



Trokut $\triangle AFD$ je pravokutan pa je $|\angle FAD| = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

2 BODA

$\angle FAD$ je vanjski kut jednakokraknog trokuta $\triangle ABC$ pa su kutovi uz osnovicu veličine

$$\alpha = 70^\circ : 2 = 35^\circ.$$

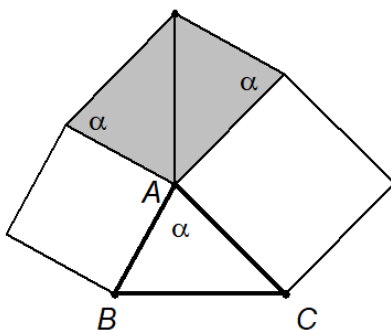
2 BODA

U pravokutnom trokutu $\triangle CFE$ veličina kuta $\delta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

4.



Dopunjena skica:

1 BOD

Neka je kut u trokutu između stranica duljine 4 cm i 5 cm veličine α .

Tada je kut paralelograma kod vrha zajedničkog s trokutom veličine

 $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$, a susjedni kut paralelograma je veličine α .

2 BODA

Dijagonala paralelograma iz vrha zajedničkog s trokutom dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta sukladnih trokutu ABC .

1 BOD

Trokuti u paralelogramu su sukladni s trokutom ABC prema poučku SKS jer imaju stranice duljina 4 cm i 5 cm te kut veličine α između tih stranica.

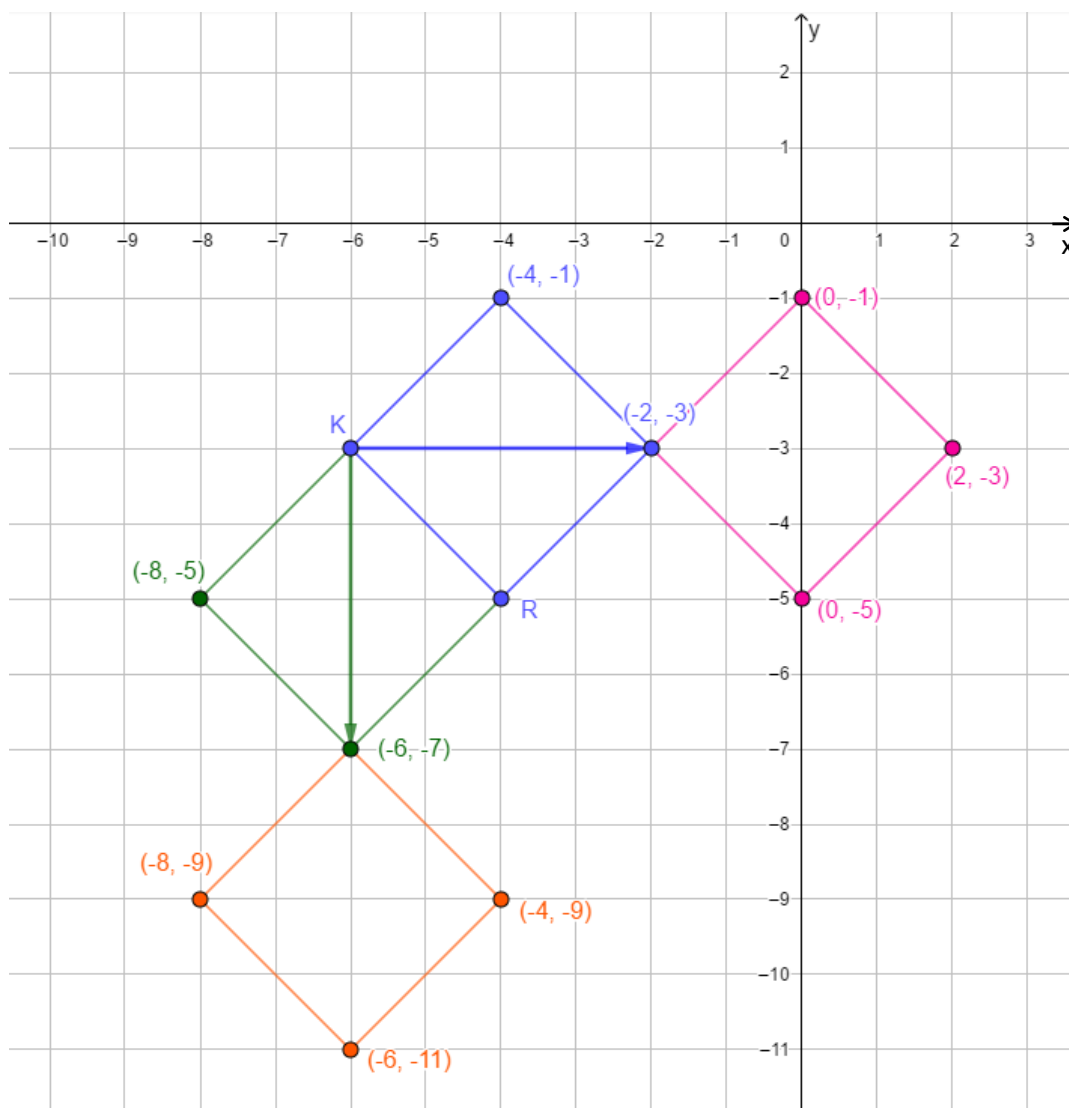
1 BOD

Prema tome, površina osjenčanog paralelograma je $2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5.



Za točno ucrtane točke K i R :

1 BOD

Za svake dvije preostale točke koje su dobro ucrtane i zapisane su njihove koordinate treba dodijeliti po 1 BOD, odnosno:

$(-4, -1), (-2, -3), (0, -5), (2, -3), (0, -1), (-8, -5), (-6, -7), (-8, -9), (-4, -9), (-6, -11)$

5 BODOVA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Označimo s x količinu maslina u tonama koje je prva tvrtka prikupila prve godine.

Tada je druga tvrtka prve godine prikupila $300 - x$ tona masline.

1 BOD

Druge godine su prikupili za $\frac{1}{3}$ maslina više, tj. $300 + \frac{1}{3} \cdot 300 = 400$ tona maslina.

1 BOD

Prva tvrtka je druge godine prikupila dvostruko više maslina, tj. $2 \cdot x = 2x$ tona maslina.

1 BOD

Druga tvrtka je druge godine prikupila za petinu maslina više nego prve godine, tj.

$$300 - x + \frac{1}{5} \cdot (300 - x) = \frac{6}{5} \cdot (300 - x) = 360 - \frac{6}{5}x \text{ tona maslina.}$$

2 BODA

Obje tvrtke su druge godine prikupile:

$$2x + 360 - \frac{6}{5}x = 400$$

2 BODA

$$2x - \frac{6}{5}x = 40 \quad / \cdot 5$$

$$10x - 6x = 200$$

$$4x = 200 \quad / : 4$$

$$x = 50$$

2 BODA

Prva tvrtka je prve godine prikupila 50 tona maslina, a druga $300 - x = 300 - 50 = 250$ tona maslina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Neka je x količina novca na početku. Sav iznos se iskazuje u kunama.

Ako je a polovina iznosa od x , onda je na cipele potrošio $a + 10$ te mu je preostalo $a - 10$. 1 BOD

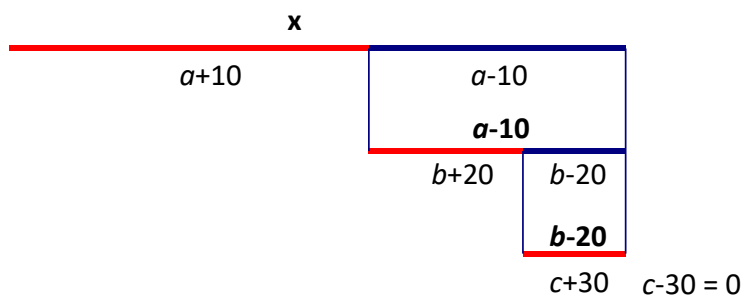
Ako je b polovina preostalog iznosa od $a - 10$, onda je na traperice potrošio $b + 20$, nakon čega mu je preostalo $b - 20$. 1 BOD

Ako je c polovina preostalog iznosa od $b - 20$, onda je na majicu potrošio $c + 30$ te mu ostaje $c - 30$. 1 BOD

Budući mu nakon dodavanja 30 kn nije ništa ostalo, zaključujemo da je $c - 30 = 0$, odnosno $c = 30$ kn.

Majicu je platio 60 kn.

1 BOD



(ili samo slika: 4 BODA)

Nadalje vrijedi:

$$b - 20 = 2c$$

$$b - 20 = 60$$

$$b = 80 \text{ kn}$$

Traperice je platio 100 kn.

2 BODA

$$a - 10 = 2b$$

$$a - 10 = 160$$

$$a = 170 \text{ kn}$$

Cipele je platio 180 kn.

2 BODA

$$x = 2a$$

$$x = 340 \text{ kn}$$

Na početku je imao 340 kn.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:Neka je x količina novca na početku. Sav iznos se iskazuje u kunama.

Proizvod	Cijena proizvoda	Ostatak novca
Cipele	$\frac{1}{2}x + 10$	$\frac{1}{2}x - 10$
Traperice	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 10\right) + 20 = \frac{1}{4}x + 15$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 10\right) - 20 = \frac{1}{4}x - 25$
Majica	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - 25\right) + 30 = \frac{1}{8}x + 17.5$	0

1 BOD

2 BODA

1 BOD

Vrijedi:

$$\frac{1}{2}x + 10 + \frac{1}{4}x + 15 + \frac{1}{8}x + 17.5 = x / \cdot 8$$

1 BOD

$$\text{Dalje slijedi: } 4x + 80 + 2x + 120 + x + 140 = 8x$$

1 BOD

$$7x + 340 = 8x$$

$$x = 340$$

1 BOD

Prema tome, Marko je na početku imao 340 kn,

cipele je platio 180 kn,

1 BOD

traperice 100 kn,

1 BOD

a majicu 60 kn.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je $x = 202120212021$. 1 BOD

Tada brojevni izraz poprima oblik:

$$\frac{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)}{100010001 \cdot (x^2-4)} = 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{x \cdot (x^2-4)}{100010001 \cdot (x^2-4)} 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{x}{100010001} 1 \text{ BOD}$$

(uočimo da je $202120212021 = 2021 \cdot 10^8 + 2021 \cdot 10^4 + 2021 = 2021 \cdot 100010001$)

$$= \frac{2021 \cdot 100010001}{100010001} 1 \text{ BOD}$$

$$= 2021 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Neka je $p : z$ omjer broja plavih i broja zelenih žaba pretpošle godine.

Prošle godine broj plavih žaba bio je $p_1 = 1.6p$, a broj zelenih žaba $z_1 = 0.4z$. 1 BOD

Kako su omjeri broja plavih i broja zelenih žaba prošle godine i pretpošle isti, ali u obrnutom poretku, vrijedi:

$$\frac{1.6p}{0.4z} = \frac{z}{p}. 1 \text{ BOD}$$

Iz te jednakosti slijedi

$$4p^2 = z^2, \text{ odnosno } z = 2p \text{ (radi se o pozitivnim cijelim brojevima)}. 1 \text{ BOD}$$

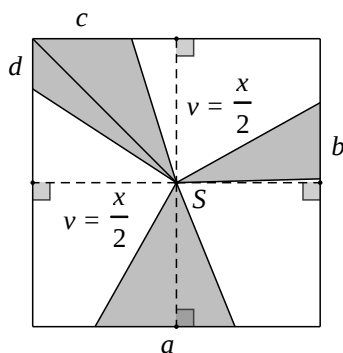
Omjer ukupnog broja svih žaba prošle i pretpošle godine je

$$\frac{1.6p + 0.4z}{p + z} = \frac{1.6p + 0.4 \cdot 2p}{p + 2p} = \frac{2.4p}{3p} = \frac{8}{10} = 80 \%. 2 \text{ BODA}$$

Dakle, ukupan broj žaba smanjio se za 20 % (prošle godine u odnosu na pretpošlu). 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3.



Neka je zajednička točka osjenčanih dijelova S , a duljina stranice kvadrata x .

Kako je S jednako udaljena od svih stranica zadanog kvadrata, onda su duljine visina trokuta koje čine osjenčani dijelovi jednake polovini duljine stranice kvadrata, tj. $\frac{x}{2}$. 1 BOD

Površina osjenčanog dijela jednaka je trećini površine kvadrata pa vrijedi:

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2}c \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2}d \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{3}x^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{ax}{4} + \frac{bx}{4} + \frac{cx}{4} + \frac{dx}{4} = \frac{1}{3}x^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x(a+b+c+d) = \frac{4x^2}{3} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a+b+c+d = \frac{4x}{3} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a+b+c+d = \frac{4}{3}. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

S obzirom da su zadani izrazi pozitivni dokazom jednakosti njihovih kvadrata dokazujemo i njihovu jednakost. 1 BOD

$$(2\sqrt{21})^2 = (\sqrt{22+2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}})^2.$$

Dobijemo:

$$84 = \sqrt{22+2\sqrt{21}}^2 + 2 \cdot \sqrt{22+2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{22-2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}}^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$84 = 22 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{(22+2\sqrt{21}) \cdot (22-2\sqrt{21})} + 22 - 2\sqrt{21} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$84 = 44 + 2\sqrt{22^2 - 4 \cdot 21} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$84 = 44 + 2\sqrt{484 - 84}$$

$$84 = 44 + 2\sqrt{400} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$84 = 84 \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik/ca nije razmatrao/la pozitivnost veličina

$2\sqrt{21}$ i $\sqrt{22+2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}}$, ne može ostvariti maksimalan broj bodova.

Drugi način:

$$\begin{aligned}\sqrt{22+2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}} &= \sqrt{21+2\sqrt{21}+1} + \sqrt{21-2\sqrt{21}+1} & 1 \text{ BOD} \\ &= \sqrt{(\sqrt{21}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{21}-1)^2} & 2 \text{ BOD}\end{aligned}$$

Budući da je $\sqrt{21}+1 > 0$ i $\sqrt{21}-1 > 0$, 1 BOD

$$\text{vrijedi } \sqrt{(\sqrt{21}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{21}-1)^2} = \sqrt{21}+1 + \sqrt{21}-1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 2\sqrt{21}. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik/ca nije razmatrao/la pozitivnost veličina $\sqrt{21}+1$ i $\sqrt{21}-1$, ne može ostvariti maksimalan broj bodova.

5. Prvi način:

Odredimo zbroj oduzimanjem parnih pribrojnika od ukupnog zbroja niza uzastopnih prirodnih brojeva od 1 do k .

$$1+2+3+\dots+k - (2+4+6+\dots+(k-1)) = 40\,000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{k \cdot (k-1)}{2} - 2 \cdot \left(1+2+3+\dots+\frac{k-1}{2}\right) = 40\,000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{k \cdot (k-1)}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{k-1}{2} \cdot \left(\frac{k-1}{2} + 1\right)}{2} = 40\,000, \quad 1 \text{ BOD}$$

što je ekvivalentno kvadratnoj jednadžbi

$$k^2 + 2k + 1 = 160\,000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$(k+1)^2 = 160\,000.$$

Mogućnost $k+1 = -400$ tj. $k = -401$ otpada jer je k prirodan broj. 1 BOD

$$k+1 = 400$$

$$k = 399 \quad 1 \text{ BOD}$$

Budući je k prirodan broj, najveći pribrojnik u zbroju je 399.

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Zapišimo zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva na sljedeći način:

$$1+3+5+\dots+2n-1 = (1+2+3+4+\dots+2n-1) - (2+4+6+\dots+2n-2) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} - 2 \cdot (1+2+3+\dots+n-1) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= (2n-1) \cdot n - 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 2n^2 - n - (n-1) \cdot n$$

$$= 2n^2 - n - n^2 + n$$

$$= n^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak je n^2 .

Kako je $40\,000 = 200^2$, zaključujemo da je zadani zbroj, zbroj prvih 200 neparnih prirodnih brojeva.

1 BOD

Traženi broj k je 200-ti neparni prirodan broj, zato je $k = 2 \cdot 200 - 1 = 399$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik/ca dobiva 4 BODA za svaki valjani dokaz da je zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak n^2 .

6. Neka su $2n-1$ i $2m-1$, $n, m \in \mathbb{N}$ dva neparna prirodna broja. Potrebno je dokazati da je $(2n-1)^4 - (2m-1)^4$ djeljivo sa 16.

Ako je $n = m$, $n, m \in \mathbb{N}$, tvrdnja vrijedi jer je 0 djeljiva brojem 16. 1 BOD

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $n > m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$$(2n-1)^4 - (2m-1)^4 = ((2n-1)^2)^2 - ((2m-1)^2)^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= ((2n-1)^2 - (2m-1)^2)((2n-1)^2 + (2m-1)^2) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= (2n-1-2m+1)(2n-1+2m-1)(4n^2-4n+1+4m^2-4m+1) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= (2n-2m)(2n+2m-2)(4n^2-4n+4m^2-4m+2) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 8(n-m)(n+m-1)(2n^2-2n+2m^2-2m+1) \quad 1 \text{ BOD}$$

U dobivenom umnošku prvi je faktor 8, a zadnji je neparan prirodan broj.

Da bi pokazali da je umnožak djeljiv sa 16, potrebno je još pokazati da je ili drugi ili treći faktor ovog umnoška paran. Imamo dva moguća slučaja:

1) Ako su n i m iste parnosti, tada je njihova razlika $n - m$ paran broj, 1 BOD
pa je

$$(2n-1)^4 - (2m-1)^4 = 8 \cdot 2k(n+m-1)(2n^2-2n+2m^2-2m+1) = 16l, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

dakle razlika četvrtih potencija dvaju neparnih prirodnih brojeva je djeljiva sa 16. 1 BOD

2) Ako su n i m različite parnosti, onda je $n + m - 1$ paran broj, 1 BOD
pa je

$$(2n-1)^4 - (2m-1)^4 = 8(n-m) \cdot 2k(2n^2-2n+2m^2-2m+1) = 16l, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

dakle razlika četvrtih potencija dvaju neparnih prirodnih brojeva je djeljiva sa 16. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

a) Da bi broj bio palindrom i istovremeno djeljiv s 5 zadnja znamenka može biti samo 5 (ne može biti 0 jer vodeća znamenka ne može biti 0) i tada je i prva znamenka slijeva jednaka 5. 1 BOD

Drugu znamenku možemo birati na 10 načina, a jednako tako i treću. 1 BOD

Tada je (jer je broj palindrom) četvrta znamenka određena jednoznačno.

Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $10 \cdot 10 = 100$. 1 BOD

b) Prva znamenka slijeva ne smije biti 0; biramo prve dvije znamenke na $9 \cdot 10 = 90$ načina 1 BOD

i potom su zadnje dvije znamenke određene jednoznačno.

Srednju znamenku sada biramo tako da broj bude djeljiv s 3, tj. da zbroj svih znamenki bude djeljiv s 3.

Za mogućih 90 izbora prve dvije znamenke vrijedi da je točno 30 djeljivo s 3, točno 30 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 i točno 30 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 pa to isto vrijedi i za zbroj njihovih znamenki. 1 BOD

Zato je:

(i) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, je djeljiv s 3,

(ii) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3,

(iii) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. 1 BOD

Da bi u slučaju (i) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora biti djeljiva s 3, tj. mora biti jednaka 0, 3, 6 ili 9, pa je takvih brojeva $30 \cdot 4 = 120$. 1 BOD

Da bi u slučaju (ii) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. mora biti jednaka 2, 5 ili 8, pa je takvih brojeva $30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

Da bi u slučaju (iii) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora dati ostatak 1 pri dijeljenju s 3, tj. mora biti jednaka 1, 4 ili 7, pa je takvih brojeva $30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

Zato je ukupni broj takvih brojeva jednak $30 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 3 = 300$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

a) (isto kao na prvi način) 3 BODA

b) Palindrom možemo zapisati u obliku $\overline{abcba}$, $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $a \neq 0$.

Taj broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3 pa vrijedi:

$$a + b + c + b + a = 3k$$

$$2a + 2b + c = 3k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1 BOD

$a = 1$	$b = 0$	$2a + 2b + c = 2 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 1$	$2a + 2b + c = 4 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 2$	$2a + 2b + c = 6 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 3$	$2a + 2b + c = 8 + c$	$c = 1, 4, 7$

	$b = 4$	$2a + 2b + c = 10 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 5$	$2a + 2b + c = 12 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 6$	$2a + 2b + c = 14 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 7$	$2a + 2b + c = 16 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 8$	$2a + 2b + c = 18 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 9$	$2a + 2b + c = 20 + c$	$c = 1, 4, 7$

Ukupno ima $7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 + 12 = 33$ takva broja.

1 BOD

$a = 2$	$b = 0$	$2a + 2b + c = 4 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 1$	$2a + 2b + c = 6 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 2$	$2a + 2b + c = 8 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 3$	$2a + 2b + c = 10 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 4$	$2a + 2b + c = 12 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 5$	$2a + 2b + c = 14 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 6$	$2a + 2b + c = 16 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 7$	$2a + 2b + c = 18 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 8$	$2a + 2b + c = 20 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 9$	$2a + 2b + c = 22 + c$	$c = 2, 5, 8$

Ukupno ima $7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 + 12 = 33$ takva broja.

1 BOD

$a = 3$	$b = 0$	$2a + 2b + c = 6 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 1$	$2a + 2b + c = 8 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 2$	$2a + 2b + c = 10 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 3$	$2a + 2b + c = 12 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 4$	$2a + 2b + c = 14 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 5$	$2a + 2b + c = 16 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 6$	$2a + 2b + c = 18 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$
	$b = 7$	$2a + 2b + c = 20 + c$	$c = 1, 4, 7$
	$b = 8$	$2a + 2b + c = 22 + c$	$c = 2, 5, 8$
	$b = 9$	$2a + 2b + c = 24 + c$	$c = 0, 3, 6, 9$

Ukupno ima $6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 18 + 16 = 34$ takvih brojeva.

1 BOD

Analogno, za $a = 4, 5, 7, 8$ ima po 33 takva broja,

1 BOD

a za $a = 6, 9$ ima po 34 takva broja.

1 BOD

Ukupno ima:

$6 \cdot 33 + 3 \cdot 34 = 198 + 102 = 300$ takvih brojeva.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA