

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. a) Prvi način:

Označimo igrače brojevima od 1 do 10. Ispišimo mogućnosti za jednog od igrača (jer izbor igrača ne utječe na rezultat), primjerice za igrača broj 1:

1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 1 i 6, 1 i 7, 1 i 8, 1 i 9, 1 i 10.

1 BOD

S obzirom na to da je svejedno kojeg smo igrača promatrali, zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

Drugi način:

Kako svaki igrač mora odigrati sa svakim, promotrimo jednog od igrača, primjerice prvog.

Prvi igrač mora odigrati partije sa svakim od preostalih 9 igrača, dakle odigrat će 9 partija.

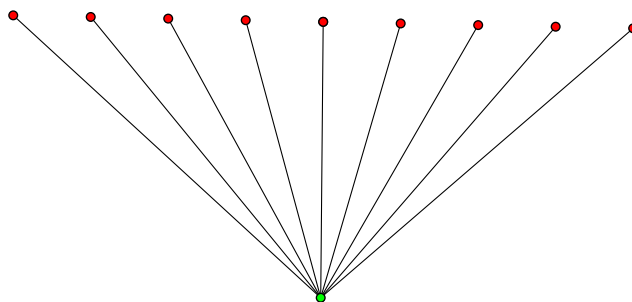
1 BOD

S obzirom na to da je svejedno kojeg smo igrača promatrali, zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

Treći način:

Prikažimo grafički sve partije koje je odigrao jedan igrač, pri čemu svakog od igrača označimo točkom.



1 BOD

Ukupan broj partija jednak je ukupnom broju dužina kojima smo spojili jednu točku (igrača) s preostalim točkama (igračima), tj. zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

b) Prvi način:

Zapišimo sve moguće partije koje će odigrati igrači na turniru pazeći da partije koje igraju isti igrači ne brojimo dva puta:

1 BOD

1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 1 i 6, 1 i 7, 1 i 8, 1 i 9, 1 i 10

9 partija

2 i 3, 2 i 4, 2 i 5, 2 i 6, 2 i 7, 2 i 8, 2 i 9, 2 i 10

8 partija

3 i 4, 3 i 5, 3 i 6, 3 i 7, 3 i 8, 3 i 9, 3 i 10

7 partija

1 BOD

4 i 5, 4 i 6, 4 i 7, 4 i 8, 4 i 9, 4 i 10

6 partija

5 i 6, 5 i 7, 5 i 8, 5 i 9, 5 i 10

5 partija

6 i 7, 6 i 8, 6 i 9, 6 i 10

4 partija

7 i 8, 7 i 9, 7 i 10

3 partije

8 i 9, 8 i 10

2 partije

9 i 10

1 partija

1 BOD

Ukupno je odigrano $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ partija.

1 BOD

Drugi način:

Zbrojimo redom sve partije koje su odigrali igrači počevši od prvog.

Prvi igrač je odigrao 9 partija.

Drugi igrač je odigrao također 9 partija no već smo brojali njegovu partiju s prvim igračem pa

dodajemo novih 8 partija.

Treći igrač je odigrao također 9 partija no već smo brojali njegove partije s prvim i drugim igračem pa dodajemo novih 7 partija. 2 BODA

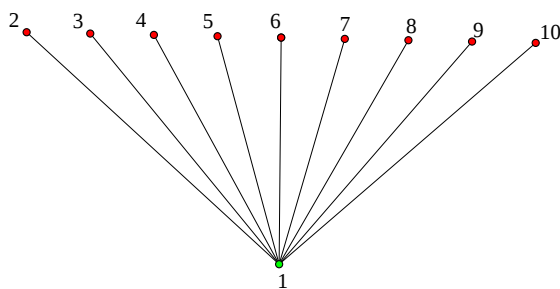
Dalje zaključujemo da od četvrtog igrača trebamo dodati novih 6 partija, od petog igrača novih 5 partija, od šestog igrača nove 4 partije, od sedmog igrača nove 3 partije, od osmog igrača nove 2 partije, od devetog još 1 partiju i to onu s desetim igračem. 1 BOD

Ukupno je odigrano $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ partija. 1 BOD

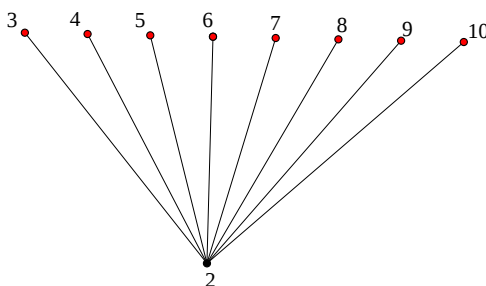
Treći način:

Prikažimo grafički sve partije koje su odigrali igrači. Za pregledniji grafički prikaz neka svaki od igrača bude jedna točka, a točke označimo brojevima od 1 do 10. Tada je broj partija jednak broju nacrtanih dužina, kojima su rubne točke igrači.

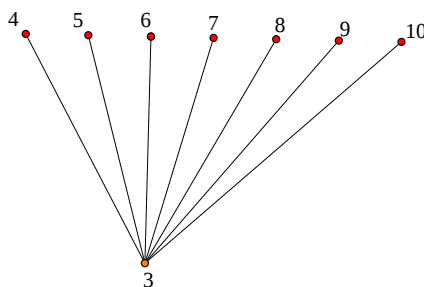
Prvi igrač je odigrao 9 partija.



Drugi je igrač odigrao 9 partija, no onu s prvim igračem već smo brojali pa dobijemo još 8 novih:



Treći je igrač odigrao 9 partija, no onu s prvim i drugim igračem već smo brojali pa dobijemo još 7 novih:



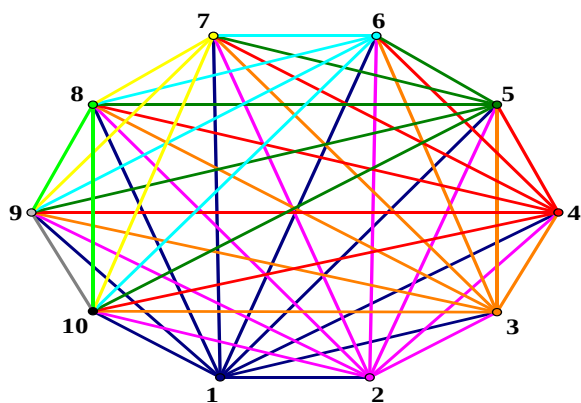
2 BODA

Analognim postupcima zaključujemo da od četvrtog igrača trebamo dodati novih 6 partija, od petog igrača novih 5 partija, od šestog igrača nove 4 partije, od sedmog igrača nove 3 partije, od osmog igrača nove 2 partije, od devetog još 1 partiju i to onu s desetim igračem. 1 BOD

Ukupno je odigrano $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ partija. 1 BOD

Četvrti način:

Moguće je i grafičko rješenje kao na slici.



1 BOD

Iz slike vidimo da je prvi igrač odigrao 9 partija, drugi 8 koje još nismo brojali, treći 7 koje još nismo brojali, četvrti 6 koje još nismo brojali, peti 5 koje još nismo brojali, šesti 4 koje još nismo brojali, sedmi 3 koje još nismo brojali, osmi 2 koje još nismo brojali i deveti još jednu s desetim igračem koju još nismo brojali.

2 BODA

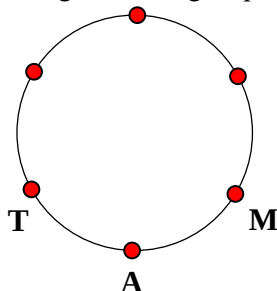
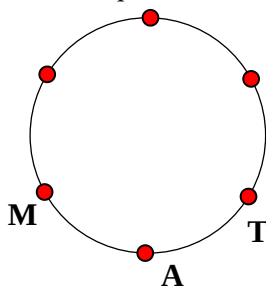
Ukupno je odigrano $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ partija.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

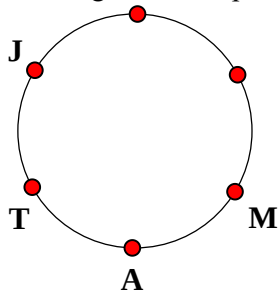
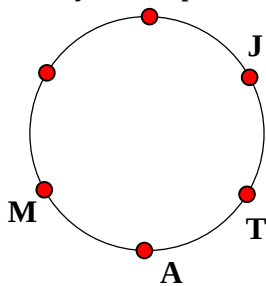
2. Budući da Ana ne sjedi pored dječaka, pored Ane sjede preostale dvije djevojčice, Marija i Tina.

Prikažimo pomoću crteža dvije mogućnosti tog rasporeda:



2 BODA

Janko sjedi nasuprot Mariji, pa su mogućnosti rasporeda sljedeće:

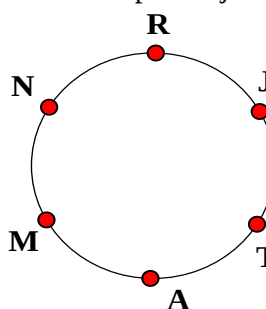


1 BOD

Kako Janko sjedi pored Roka, s njegove lijeve strane, desni raspored sjedenja nije moguć jer Janko sjedi pored Tine, s njezine lijeve strane.

1 BOD

Konačan raspored sjedenja je:



Dakle, pored Tine, s njene desne strane sjedi Janko, a pored Nina, s njegove lijeve strane Roko.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. a) Majka je pogledala na sat u 13 h i 5 min, a kako je Barbara stigla prije 10 minuta, znači da je na kolodvor stigla u 12 h i 55 min. 1 BOD

Budući da je putovala četiri sata i dvadeset dvije minute, imamo:

$$12 - 4 = 8 \text{ i } 55 - 22 = 33$$

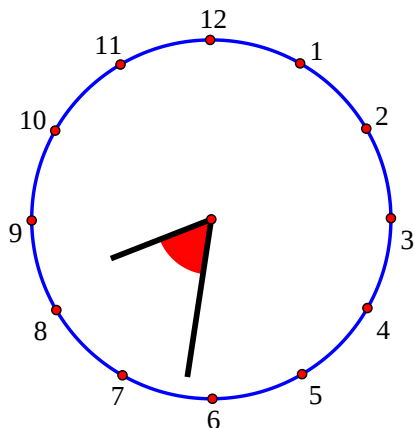
2 BODA

Dakle, Barbara je krenula u 8 h i 33 min.

1 BOD

b) Skica:

1 BOD

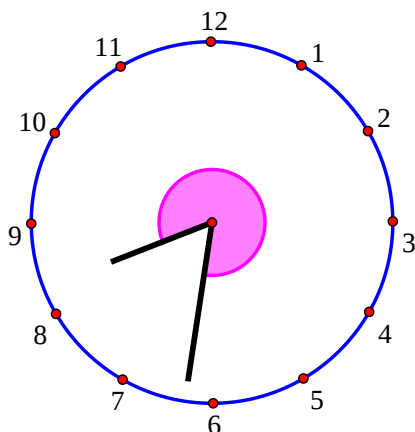


U 8 h i 33 min kazaljke sata određivale su šiljasti kut.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Moguće rješenje je i izbočeni kut. Skicu treba bodovati 1 BODOM, kao i zaključak da kazaljke na satu određuju izbočeni kut.



4. Prvi način:

Prikažimo grafički manji pribrojnik:



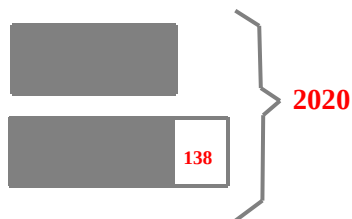
1 BOD

Onda je grafički prikaz većeg pribrojnika:



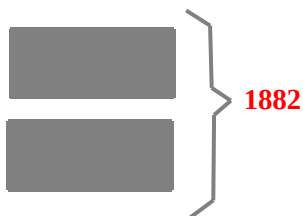
1 BOD

Kako je njihov zbroj 2020 dobijemo:



1 BOD

Sada je



1 BOD

odnosno, $1882 : 2 = 941$.

Dakle, jedan pribrojnik (manji) je 941.

1 BOD

Drugi pribrojnik je 1079.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Zbroj dva pribrojnika je 2020, a razlikuju se za 138 pa vrijedi:

$$2020 : 2 = 1010$$

1 BOD

$$138 : 2 = 69$$

1 BOD

Jedan pribrojnik je $1010 - 69 = 941$.

2 BODA

Drugi pribrojnik je $1010 + 69 = 1079$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:Neka je manji od pribrojnika a , onda je veći $a + 138$.

2 BODA

Sada vrijedi:

$$a + a + 138 = 2020$$

1 BOD

$$a + a = 1882$$

1 BOD

$$a = 941$$

Jedan pribrojnik je 941.

1 BOD

Drugi pribrojnik je $941 + 138 = 1079$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Kada svaku kovanicu iskoristimo jednom, platili smo 8 kn.

1 BOD

Preostaje još platiti 12 kuna, koristeći bilo koje kovanice.

1 BOD

Sve mogućnosti plaćanja prikazimo tablicom:

5 kn	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2 kn	1	0	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
1 kn	0	2	1	3	5	7	0	2	4	6	8	10	12

3 BODA

Traženi iznos može se platiti na 13 načina.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Mogućnosti prikazimo tablicom (ili nabrojanjem):

5 kn	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
2 kn	1	2	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
1 kn	3	1	2	4	6	8	1	3	5	7	9	11	13

SVE točno zapisane kombinacije:

5 BODOVA

Iznos od 20 kn možemo platiti kovanicama na 13 različitih načina.

1 BOD

Napomena: Ako učenik ponudi djelomično točno rješenje bodovati tako da svake tri točne kombinacije nose po 1 BOD.

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Označimo redom s N, A, K i M iznose novca koje su dale Nensi, Ana, Karla i Mirna.

Sada uvjete iz zadatka možemo zapisati kao:

$$M + A + N + K = 150$$

$$M + N + K = 120$$

$$N + A + K = 102$$

1 BOD

Iz prve dvije jednakosti zaključujemo da je Ana dala $150 - 120 = 30$ kuna.

2 BODA

Iz prve i treće jednakosti zaključujemo da je Mirna dala $150 - 102 = 48$ kuna.

2 BODA

Sada iz druge ili treće jednakosti zaključujemo da su Nensi i Karla zajedno dale 72 kune ($120 - 48 = 72$ ili $102 - 30 = 72$), tj. $N + K = 72$.

1 BOD

Osim toga znamo i da je Karla dala 10 kuna više od Nensi tj.

$$K = N + 10$$

To znači da je dvostruki iznos koji je dala Nensi $72 - 10 = 62$.

2 BODA

Dakle, Nensi je dala $62 : 2 = 31$ kunu.

1 BOD

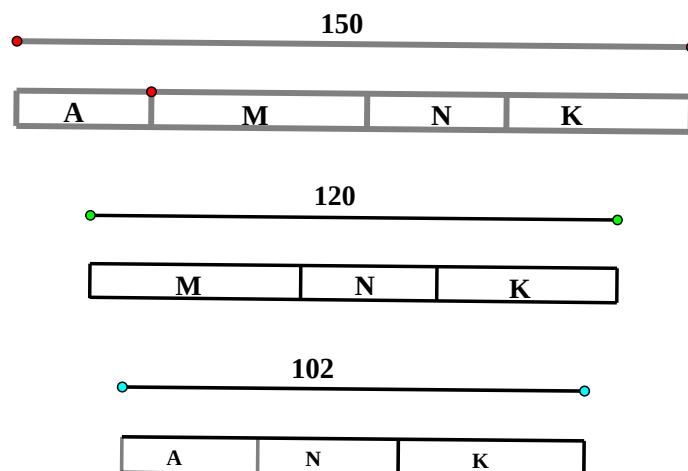
Onda je Karla dala 41 kunu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Uvjete zadatka možemo prikazati grafički:



1 BOD

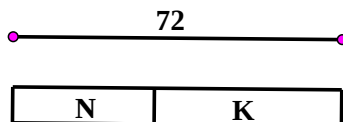
Iz prve i druge slike zaključujemo da je Ana dala $150 - 120 = 30$ kuna.

2 BODA

Iz prve i treće slike zaključujemo da je Mirna dala $150 - 102 = 48$ kuna.

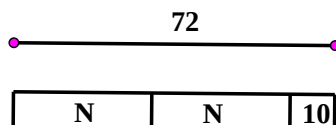
2 BODA

Iz druge ili treće slike dobijemo da su Nensi i Karla zajedno dale 72 kn, odnosno:



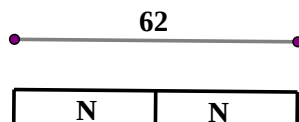
1 BOD

Kako je Karla dala 10 kuna više od Nensi imamo:



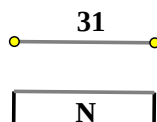
1 BOD

Sada je:



1 BOD

Odnosno:



Dakle, Nensi je dala 31 kunu,
a Karla 41 kunu.

1 BOD

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Ako su a , b , c i d redom različite znamenke tisućica, stotica, desetica i jedinica traženog četveroznamenkastog broja $\overline{abcd}$ imamo:

$$a + b + c + d = 15 . \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako traženi broj mora biti paran, znamenka jedinica može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Znamenka jedinica je tri puta manja od znamenke tisućica odnosno znamenka tisućica je tri puta veća od znamenke jedinica.

Ako je $d = 0$, onda je $a = 3 \cdot 0 = 0$, što je nemoguće jer je broj četveroznamenkast. 1 BOD

Ako je $d = 2$, onda je $a = 3 \cdot 2 = 6$. 1 BOD

Ako je $d = 4$, onda je $a = 12$, što je nemoguće jer je a znamenka, a isto vrijedi za $d = 6$ ili 8. 1 BOD

Kako je $d = 2$ i $a = 6$, a znamenka desetica je manja od znamenke jedinica, tj. $c < d$, zaključujemo da je $c = 0$ ili $c = 1$. 2 BODA

Sad imamo dva slučaja:

- Ako je $c = 0$, onda je $b = 15 - 6 - 0 - 2 = 7$, pa je traženi broj **6702**. 1 BOD
- Ako je $c = 1$, onda je $b = 15 - 6 - 1 - 2 = 6$, što je nemoguće jer znamenke broja moraju biti različite. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz drugog uvjeta slijedi da znamenke tisućica i jedinica mogu biti parovi 9 i 3, 6 i 2 te 3 i 1, 3 BODA

ali zbog tvrdnje da se radi o parnom broju proizlazi da je znamenka tisućica 6, a znamenka jedinica 2. 1 BOD

Nadalje, zbog trećeg uvjeta, znamenka desetica može biti 0 ili 1. 2 BODA

Kako znamenke moraju biti različite, traženi brojevi mogu biti:

6102, 6302, 6402, 6502, 6702, 6802, 6902,

6012, 6312, 6412, 6512, 6712, 6812, 6912. 2 BODA

No, iz uvjeta da zbroj znamenaka mora biti 15, slijedi da je samo $6 + 7 + 0 + 2 = 15$. 1 BOD
Brunina šifra za mobitel je 6702. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Iz drugog uvjeta slijedi da znamenke tisućica i jedinica mogu biti parovi 9 i 3, 6 i 2 te 3 i 1, 3 BODA
ali zbog tvrdnje da se radi o parnom broju proizlazi da je znamenka tisućica 6, a znamenka jedinica 2. 1 BOD
Nadalje, zbog trećeg uvjeta, znamenka desetica može biti 0 ili 1. 2 BODA
Ako je znamenka desetica 0, zbog uvjeta o zbroju znamenaka znamenka stotica je 7, pa je rješenje 6702. 1 BOD
Ako je znamenka desetica 1, zbog uvjeta o zbroju znamenaka znamenka stotica je 6, pa je rješenje 6612, no to ne može biti tražena šifra jer znamenke moraju biti različite. 2 BODA
Brunina šifra za mobitel je 6702. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ako je učenik naveo samo rješenje, bez postupka, bodovati s 2 BODA.

Napomena 2: Ukoliko je učenik došao do točnog rješenja, ali nije razmatrao dvije mogućnosti znamenke desetica, bodovati sa 7 BODOVA.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $36 + 64 \cdot 17 - (502 - 352 : 8 + 511) =$
 $= 36 + 1\,088 - (502 - 352 : 8 + 511) =$ 1 BOD
 $= 36 + 1\,088 - (502 - 44 + 511) =$ 1 BOD
 $= 36 + 1\,088 - (458 + 511) =$ 1 BOD
 $= 36 + 1\,088 - 969 =$ 1 BOD
 $= 1\,124 - 969 =$ 1 BOD
 $= 155$ 1 BOD
..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Najniža moguća cijena haljine je 235 kn, a najniža cijena cipela je 305 kn. 1 BOD
Najmanji iznos koji je Ana mogla potrošiti na kupovinu haljine i cipela je
 $235 \text{ kn} + 305 \text{ kn} = 540 \text{ kn}.$ 1 BOD
Najviša moguća cijena haljine je 244 kn, a najviša cijena cipela 314 kn. 1 BOD
Najveći iznos koji je Ana mogla potrošiti na kupovinu haljine i cipela je
 $244 \text{ kn} + 314 \text{ kn} = 558 \text{ kn}.$ 1 BOD
Razlika je $558 \text{ kn} - 540 \text{ kn} = 18 \text{ kn}.$ 1 BOD
Kako je $18 > 16$, Ana može kupiti čokoladu. 1 BOD
..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Duljina stranice najmanjeg kvadrata (čija je površina 1 m^2) iznosi 1 m.
Opseg najmanjeg kvadrata je $4 \cdot 1 \text{ m} = 4 \text{ m}.$ 1 BOD
Duljina stranice srednjeg kvadrata (čija je površina 9 m^2) iznosi 3 m.
Opseg srednjeg kvadrata je $4 \cdot 3 \text{ m} = 12 \text{ m}.$ 1 BOD
Duljina stranice najvećeg kvadrata (čija je površina 25 m^2) iznosi 5 m.
Opseg najvećeg kvadrata je $4 \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}.$ 1 BOD
Ukupna duljina svih crta koje je povukla Lana je
 $4 \text{ m} + 12 \text{ m} + 20 \text{ m} = 36 \text{ m}.$ 1 BOD
..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

- Ante, Branimir i Ivan završe jedan ciklus do broja 18, nakon čega kreću s novim ciklusom.
Broj 444 treba podijeliti s 18. 1 BOD
 $444 : 18 = 24$ 2 BOD
84
12
Dječaci će otrčati 24 puna kruga te još dodatnih 12 stupova. 1 BOD
Nakon prvih 6 Antinih stupova, slijedi 6 Branimirovih. 1 BOD
Posljednji, dvanaesti stup je stup F. 1 BOD
Dakle, broj 444 reći će Branimir kod stupa F.
..... UKUPNO 6 BODOVA

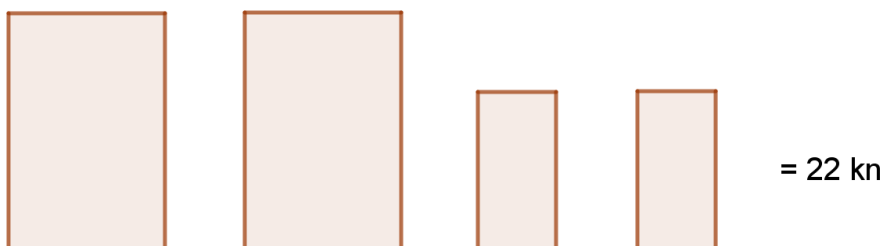
Drugi način:

- Prvih 6 brojeva nabraja Ante, drugih 6 Branimir, trećih 6 Ivan, četvrtih 6 opet Ante itd.
Broj 444 treba podijeliti sa 6. 1 BOD
 $444 : 6 = 74$
24
0 1 BOD

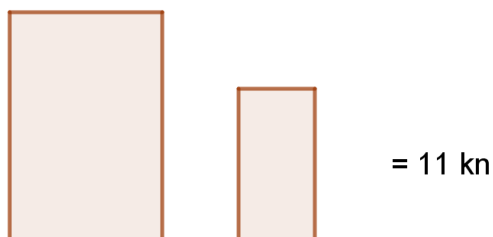
Može se zaključiti da je broj 444 posljednji broj u 74. krugu, što znači kod stupa F. 1 BOD
 Treba još saznati tko trči 74. krug. To se može saznati dijeljenjem 74 s 3. 1 BOD
 $74 : 3 = 24$ 1 BOD
 14
 2
 S obzirom da je ostatak pri dijeljenju 2, znači da 74. krug trči drugi po redu dječak, a to je Branimir. 1 BOD
 Dakle, broj 444 reći će Branimir kod stupa F.

..... UKUPNO 6 BODOVA

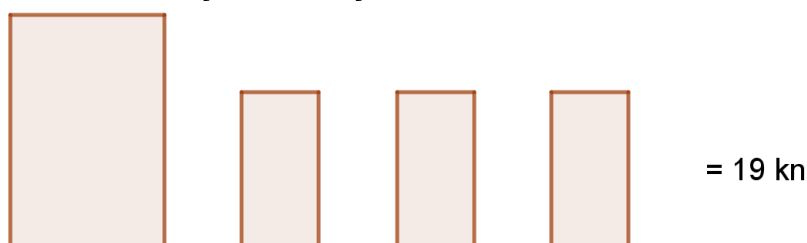
5. Dvije velike i dvije male bilježnice koštaju 22 kn.



Ako se cijena velike bilježnice označi s x , a male s y , vrijedi $2x + 2y = 22$.
 Tada je $x + y = 11$ (što se može zaključiti i sa slike, bez uvođenja nepoznanica).



Dakle, jedna velika i jedna mala bilježnica koštaju zajedno 11 kn. 1 BOD
 Dalje, jedna velika i tri male bilježnice koštaju 19 kn.



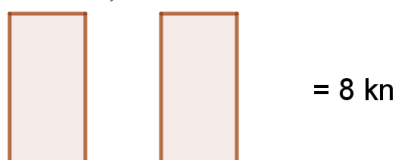
Kako jedna velika i jedna mala koštaju 11 kuna, preostale dvije male bilježnice moraju biti 8 kuna.
 To se može zaključiti i ovako:

$$(x + y) + y + y = 19$$

$$11 + y + y = 19$$

$$2y = 8$$

Isto se može zaključiti i bez nepoznanica, sa slike:



Dakle, dvije male bilježnice koštaju 8 kn. 2 BODA
 Cijena jedne male bilježnice je 4 kn. 1 BOD
 Cijena jedne velike bilježnice je 7 kn. 1 BOD
 Račun je iznosio $5 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 47$ kn. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik do rješenja došao pogađanjem, svako točno rješenje bodovati sa po

1 BODOM, uz još 1 BOD za ukupni iznos.

6. Ako je x prvi nepoznati broj, ostali parni brojevi su $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$, i tako dalje...

Deseti po redu je $x + 18$.

1 BOD

Zbrajanjem svih tih brojeva dobije se

$$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + \dots + x + 18 = 5370.$$

1 BOD

Vrijedi

$$2 + 4 + 6 + \dots + 18 = 90.$$

1 BOD

Dalje je:

$$10x + 90 = 5370$$

1 BOD

$$10x = 5370 - 90$$

$$10x = 5280$$

1 BOD

$$x = 5280 : 10$$

$$x = 528$$

1 BOD

Traženi brojevi su: 528, 530, 532, ...,

a najveći (posljednji) među njima je 546.

1 BOD

$$\text{Iz rastava } 546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

2 BODA*

se zaključiti:

Prosti djelitelji najvećeg traženog broja su: 2, 3, 7 i 13.

1 BOD

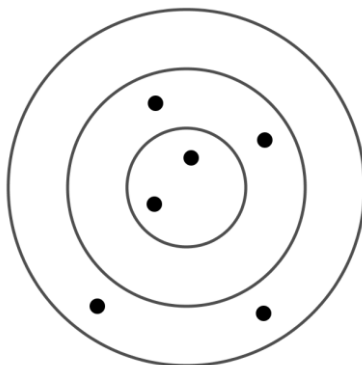
..... UKUPNO 10 BODOVA

***Napomena:** Učenici koji ne primijete da je 91 složen broj, pa ostave $546 = 2 \cdot 3 \cdot 91$, ovdje umjesto 2 BODA trebaju dobiti samo 1 BOD.

7. Prvi način:

Broj bodova koje nosi najmanji krug označimo s a , srednji krug s b , a najširi krug s c .

Ako promatramo prvu i treću metu zajedno, vidimo da po dva pogotka u svaki krug nose 58 bodova.

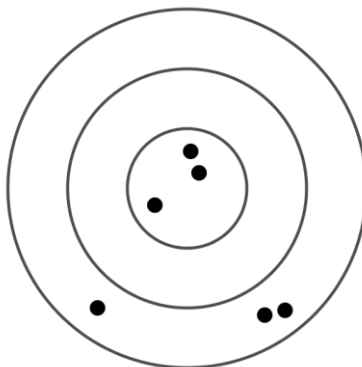


$$\text{Vrijedi } 2a + 2b + 2c = 58.$$

To znači da je zbroj $a + b + c = 29$.

2 BODA

Ako promatramo drugu i treću metu zajedno, vidimo da po tri pogotka u najmanji i najveći krug nose 60 bodova.



$$\text{Vrijedi: } 3a + 3c = 60.$$

To znači da je zbroj $a + c = 20$. 2 BODA
 Dalje zaključujemo:
 $a + b + c = 29$
 $(a + c) + b = 29$
 $20 + b = 29$
 $b = 29 - 20$
 $b = 9$ 2 BODA
 Onda se iz prve mete vidi da je:
 $9 + 9 + c = 22$
 $18 + c = 22$
 $c = 22 - 18$
 $c = 4$ 2 BODA
 Tada je iz druge mete:
 $4 + 4 + a = 24$
 $8 + a = 24$
 $a = 24 - 8$
 $a = 16$ 2 BODA
 Pogodak u najširi krug vrijedi 4, srednji 9, a najuži 16 bodova.
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Broj bodova koje nosi najmanji krug označimo s a , srednji krug s b , a najširi krug s c .
 Uspoređujući prvu i treću metu, možemo zaključiti:
 $2a - 2b = 36 - 22$,
 $2a - 2b = 14$,
 pa je $a - b = 7$, odnosno a je za 7 veći od b , tj. $a = b + 7$. (1) 2 BODA
 Uspoređujući drugu i treću metu, možemo zaključiti:
 $a - c = 36 - 24$,
 $a - c = 12$,
 pa je $a = c + 12$. (2) 2 BODA
 Iz (1) i (2) može se zaključiti da se b i c razlikuju za 5, tj. $b = c + 5$. (3) 2 BODA
 Iz druge se mete vidi da je
 $a + 2c = 24$.
 S obzirom na (2), vrijedi $c + 12 + 2c = 24$,
 pa je $3c + 12 = 24$, odnosno $3c = 12$.
 Dakle, $c = 4$. 2 BODA
 Iz (2) slijedi da je $a = 4 + 12$, tj. $a = 16$. 1 BOD
 Iz (3) slijedi da je $b = 4 + 5$, tj. $b = 9$. 1 BOD
 Pogodak u najširi krug vrijedi 4, srednji 9, a najuži 16 bodova.
 UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Nakon što je (kako je navedeno u drugom načinu) zaključio da je broj b veći od broja c za 5, a broj a veći od broja b za 7 (za što je dobio 6 BODOVA), učenik može doći do rješenja (i preostala 4 BODA) metodom pokušaja i pogrešaka. Mogućnosti su prikazane u tablici:

c	1	2	3	4
b	6	7	8	9
a	13	14	15	16
1. meta	13	16	19	22
2. meta	15	18	21	24
3. meta	27	30	33	36

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik pogađanjem (bez obrazloženja) dođe do traženih brojeva, svako točno rješenje bodovati sa po 1 BODOM, odnosno s ukupno 3 BODA.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Vrijednost zadanog izraza jednaka je:

$$184 \cdot 15 + 15 \cdot 16 - 15 \cdot 100 + 15 =$$

$$= 15 \cdot (184 + 16 - 100 + 1) =$$

2 BODA

$$= 15 \cdot 101 =$$

1 BOD

$$= 1\,515$$

1 BOD

Trećina dobivenog izraza iznosi $1\,515 : 3 = 505$.

1 BOD

Broj koji je četiri puta veći od dobivene trećine je $505 \cdot 4 = 2\,020$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$184 \cdot 15 + 15 \cdot 16 - 15 \cdot 100 + 15 =$$

$$= 2\,760 + 240 - 1\,500 + 15 =$$

2 BODA

$$= 3\,000 - 1\,500 + 15 =$$

1 BOD

$$= 1\,515$$

1 BOD

Trećina dobivenog izraza iznosi $1\,515 : 3 = 505$.

1 BOD

Broj koji je četiri puta veći od dobivene trećine je $505 \cdot 4 = 2\,020$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Rastav broja 2 020 na proste faktore je $2\,020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$.

2 BODA

Svaki parni broj mora u svom rastavu na proste faktore imati broj 2 pa preostaju sljedeće mogućnosti:

(i) jedan od ta dva broja je 2, a drugi $2 \cdot 5 \cdot 101 = 1\,010$.

1 BOD

Tada je njihov zbroj 1 012.

1 BOD

(ii) jedan od ta dva broja je $2 \cdot 5 = 10$, a drugi $2 \cdot 101 = 202$.

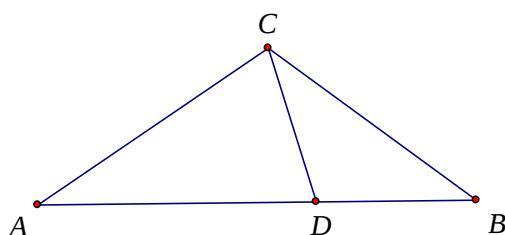
1 BOD

Tada je njihov zbroj 212.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Skica:



(**Napomena:** Skica ne donosi bodove.)

Trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle CDB$ su jednakokračni zbog uvjeta zadatka, kao i trokut $\triangle ABC$.

Zbog toga je $|\angle BAC| = |\angle CBA| = |\angle DCB| = \alpha$.

1 BOD

$|\angle CDA| = 2\alpha$ jer je $\angle CDA$ vanjski kut trokuta $\triangle DBC$.

Kako je $\overline{DC}$ osnovica jednakokrakog trokuta $\triangle ADC$, vrijedi $|\angle CDA| = |\angle ACD| = 2\alpha$. 1 BOD

U trokutu $\triangle ADC$ vrijedi $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, a otuda slijedi $\alpha = 36^\circ$. 1 BOD

Veličine kutova trokuta $\triangle ABC$ su: $|\angle CAB| = |\angle ABC| = 36^\circ$ i $|\angle BCA| = 108^\circ$. 1 BOD

Veličine kutova trokuta $\triangle ADC$ su: $|\angle ADC| = |\angle DCA| = 72^\circ$ i $|\angle CAD| = 36^\circ$. 1 BOD

Veličine kutova trokuta $\triangle DBC$ su: $|\angle BCD| = |\angle DBC| = 36^\circ$ i $|\angle CDB| = 108^\circ$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. a) Svaki sljedeći član zadanog niza je za 4 veći od prethodnog člana. 1 BOD

1. član jednak je 5.

2. član jednak je $9 = 5 + 1 \cdot 4$

3. član jednak je $13 = 5 + 2 \cdot 4$ 1 BOD

....

100. član zadanog niza jednak je $5 + 99 \cdot 4 = 5 + 396 = 401$ 1 BOD

b) 20. član zadanog niza jednak je $5 + 19 \cdot 4 = 5 + 76 = 81$, a 19. član zadanog niza jednak je $5 + 18 \cdot 4 = 5 + 72 = 77$. 2 BODA

Umnožak 20. i 19. člana zadanog niza jednak je $81 \cdot 77 = 6\,237$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Ako je površina pravokutnika 24 m^2 , a duljine su mu prirodni brojevi izraženi u metrima, duljine stranica mogu biti parovi:

$\{1, 24\}$, $\{2, 12\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 6\}$. 2 BODA

(Ako je naveden samo jedan, samo dva ili samo tri para brojeva, onda se ostvaruje 1 BOD).

$$o_1 = 2 \cdot (1 + 24) = 50 \text{ m}$$

$$o_2 = 2 \cdot (2 + 12) = 28 \text{ m}$$

$$o_3 = 2 \cdot (3 + 8) = 22 \text{ m}$$

$$o_4 = 2 \cdot (4 + 6) = 20 \text{ m} \quad 2 \text{ BODA}$$

Ukupna cijena ograde može biti:

$$50 \cdot 75 = 3\,750 \text{ kn}$$

$$28 \cdot 75 = 2\,100 \text{ kn}$$

$$22 \cdot 75 = 1\,650 \text{ kn}$$

$$20 \cdot 75 = 1\,500 \text{ kn} \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik navede samo jednu mogućnost i ispravno izračuna cijenu ograde, treba dobiti ukupno 2 BODA, za navođenje dviju mogućnosti 3 BODA, a za tri 4 BODA (uz točan izračun cijene ograde).

6. Ako iz nje izvadimo $\frac{5}{6}$ broja jabuka, u prvoj košari ostaje $\frac{1}{6}$ broja jabuka, tj. 20 jabuka, pa je u prvoj košari bilo 120 jabuka. 2 BODA

Ako iz nje izvadimo $\frac{3}{4}$ broja jabuka, u drugoj košari ostaje $\frac{1}{4}$ broja jabuka, tj. 20 jabuka, pa je u

drugoj košari bilo 80 jabuka.	2 BODA
U obje košare zajedno je na početku bilo 200 jabuka.	1 BOD
Ako se iz nje izvadi $\frac{2}{3}$ jabuka, u prvoj košari će ostati $\frac{1}{3}$ od 120, tj. 40 jabuka.	2 BODA
U drugoj košari će ostati $\frac{3}{5}$ od 80, tj. 48 jabuka.	2 BODA
U obje košare će zajedno ostati 88 jabuka.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

7. Označimo te brojeve s a, b, c, d i e .

Tada je:

$$a + b + c + d = 186$$

$$a + b + c + e = 203$$

$$a + b + d + e = 214$$

$$a + c + d + e = 228$$

$$b + c + d + e = 233$$

2 BODA

Zbrajanjem svih jednadžbi dobivamo $4(a + b + c + d + e) = 1\ 064$,
odnosno $a + b + c + d + e = 266$.

2 BODA

1 BOD

Sada slijedi:

$$e = 266 - 186 = 80,$$

1 BOD

$$d = 266 - 203 = 63,$$

1 BOD

$$c = 266 - 214 = 52,$$

1 BOD

$$b = 266 - 228 = 38,$$

1 BOD

$$a = 266 - 233 = 33.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.

Tada učenika koji iz vladanja imaju ocjenu „dobro“ ili „loše“ ima:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{5}{10} x + \frac{2}{10} x$$

$$= \frac{7}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

Ostatak, odnosno $\frac{3}{10}$ razreda, čine učenici s ocjenom „uzorno vladanje“.

Budući da ih je ukupno 9, možemo pisati $\frac{3}{10} x = 9$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.

Učenika dobrog vladanja ima 50% od x , lošeg vladanja $\frac{1}{5} x$, a 9 je učenika uzornog vladanja.

Ukupan broj učenika tog razreda dobit ćemo ako zbrojimo broj učenika lošeg, dobrog i uzornog vladanja, a to možemo zapisati jednadžbom:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{10}{10} x - \frac{5}{10} x - \frac{2}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{3}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može koristiti bilo koji zapis racionalnog broja (postotak, razlomak, decimalni broj).

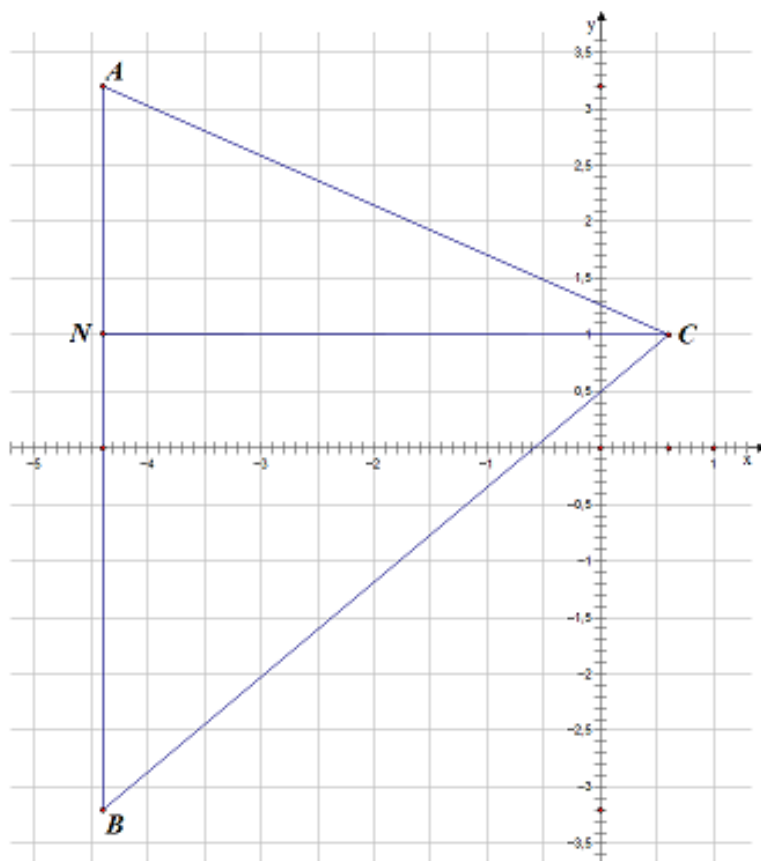
2. Prvi način:

Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina. 1 BOD

Duljina visine nacrtane vrhom C na stranicu $\overline{AB}$ jednaka je $|CN| = 5$ jediničnih dužina, pri čemu je točka N nožište visine. 1 BOD



1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \frac{6.4 \cdot 5}{2}$. 1 BOD

$P_{ABC} = 16$ kvadratnih jedinica. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

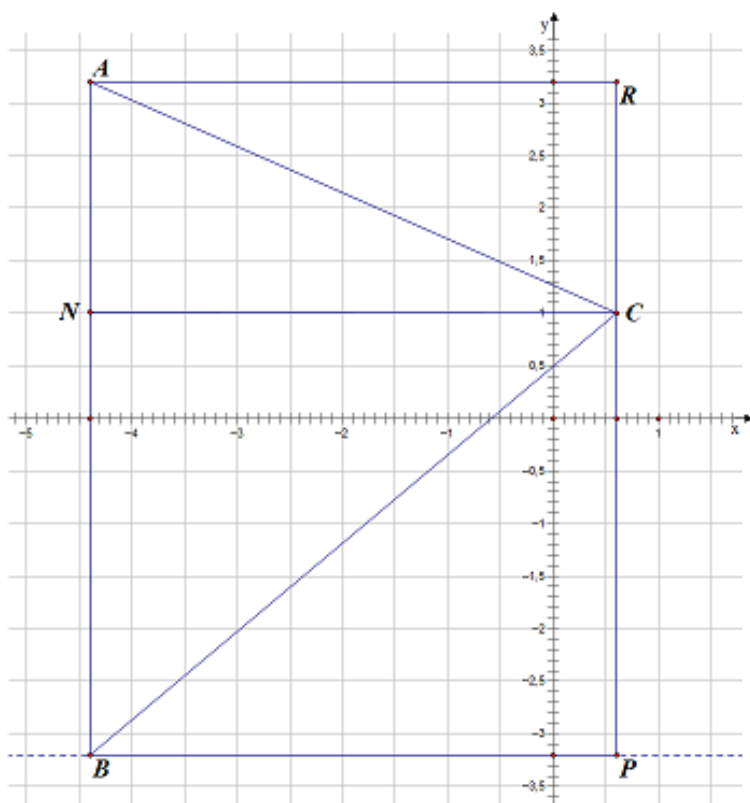
Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina. 1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik $BPRA$ kojemu je stranica $\overline{AB}$ trokuta jedna stranica, a treći vrh C trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik $BPRA$ ima površinu $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$ kvadratne jedinice. 1 BOD



1 BOD

Kako bi odredili površinu trokuta ABC trebamo od površine tog pravokutnika oduzeti površine pravokutnih trokuta ACR i BPC .

Površina trokuta ACR iznosi $P_{ACR} = \frac{5 \cdot 2.2}{2} = 5.5$ kvadratnih jedinica.

Površina trokuta BPC iznosi $P_{BPC} = \frac{5 \cdot 4.2}{2} = 10.5$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = 32 - 5.5 - 10.5 = 16$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju.

1 BOD

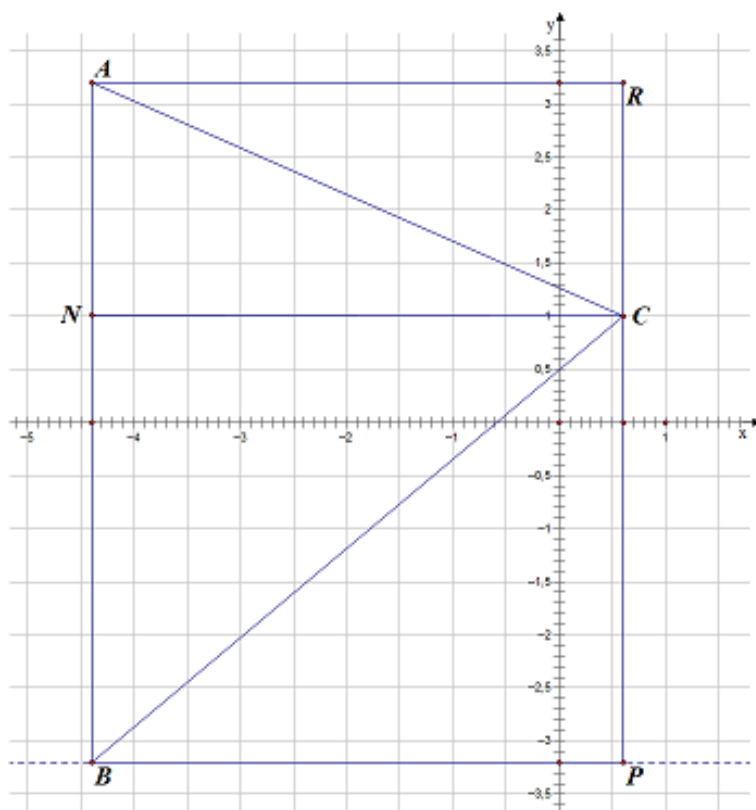
Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina.

1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik $BPRA$ kojemu je stranica $\overline{AB}$ trokuta jedna stranica, a treći vrh C trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik $BPRA$ ima površinu $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$ kvadratne jedinice.

1 BOD



1 BOD

Ako u trokut ABC nacrtamo visinu vrhom C na stranicu na stranicu $\overline{AB}$, trokut ABC ćemo podijeliti na dva pravokutna trokuta. Tada će vrijediti

$$\triangle ANC \cong \triangle CRA$$

$$\text{ i } \triangle NBC \cong \triangle BPC,$$

pa je površina trokuta ABC jednaka polovini površine pravokutnika $BPRA$.

1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \frac{32}{2} = 16$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji ne naznači mjerne jedinice ne gubi zbog toga naznačene bodove.

Napomena 2: Do točke B se moglo doći konstrukcijom osnosimetrične slika točke A , obzirom na os apscisa i onda nastaviti rješavanje zadatka kao u nekom od prikazanih načina. U tom slučaju taj korak bodovati s 1 BODOM.

3. Prva bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{20}$ posla.

Druga bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{30}$ posla.

Treća bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{x}$ posla.

1 BOD

Sve tri bušilice zajedno za 1 dan obave $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ posla.

1 BOD

Množenjem jednadžbe sa zajedničkim nazivnikom $420 \cdot x$ dobijemo

$$21x + 14x + 420 = 60x$$

1 BOD

$$420 = 25x$$

$$x = 16.8 \text{ dana}$$

1 BOD

$$x = 16 \text{ dana, } 19 \text{ sati i } 12 \text{ minuta}$$

1 BOD

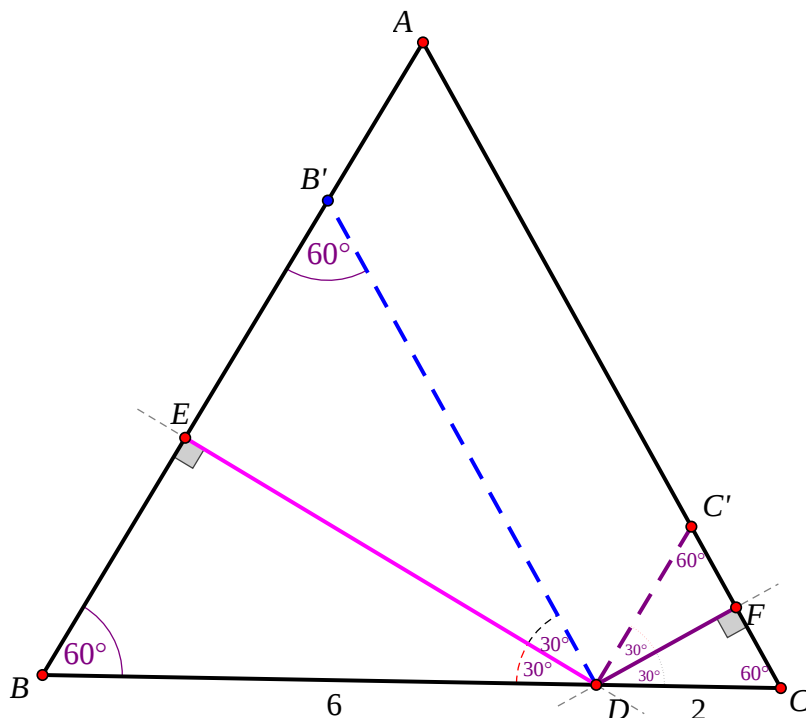
Treća bi bušilica posao napravila za točno 16 dana, 19 sati i 12 minuta.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Skica:

1 BOD



U jednakostraničnom trokutu ABC veličina kuta $\angle ABC$ jednaka je 60° , a trokut BDE je pravokutan, pa je $|\angle EDB| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

1 BOD

Neka je točka B' (centralno) simetrična točki B s obzirom na točku E .

1 BOD

Tada je trokut BDB' jednakostraničan.

1 BOD

$|BB'| = |BD| = 6$ cm, a $|BE| = \frac{1}{2}|BB'| = 3$ cm.

1 BOD

Analogno, trokut DCC' je jednakostraničan, pri čemu je C' (centralno) simetrična točki C s obzirom na točku F , pa je $|CC'| = |DC| = 2$ cm, a $|CF| = \frac{1}{2}|CC'| = 1$ cm.

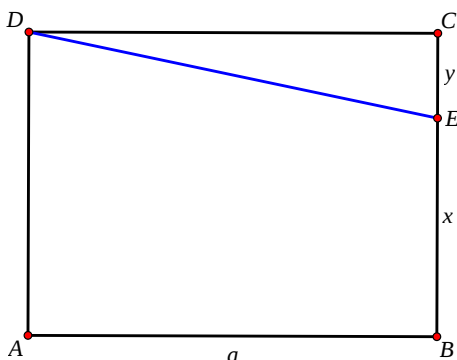
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik $ABCD$ razdijeljen na pravokutni trokut ECD i pravokutni trapez $ABED$ kojemu su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ osnovice, a $\overline{AB}$ visina.

1 BOD

$$P_{ABED} = \frac{(x+y)+x}{2} \cdot a$$

1 BOD

$$P_{ECD} = \frac{y}{2} \cdot a \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

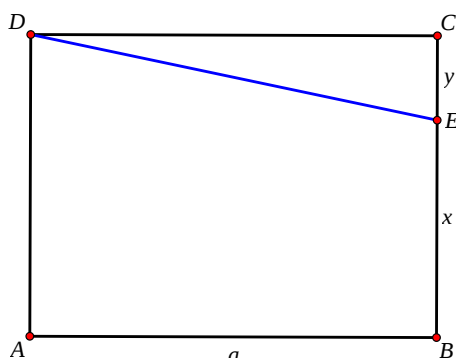
$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik $ABCD$ podijeljen na pravokutni trokut ECD i pravokutni trapez $ABED$. Površina trapeza $ABED$ može se izračunati tako da se od površine pravokutnika $ABCD$ oduzme površina pravokutnog trokuta ECD . 1 BOD

$$P_{ABED} = a \cdot (x + y) - \frac{a \cdot y}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= ax + ay - \frac{ay}{2} = ax + \frac{ay}{2}$$

$$= \frac{a \cdot (2x + y)}{2}$$

$$P_{ECD} = \frac{a \cdot y}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Neka su $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ i $\frac{z}{c}$ traženi razlomci.

$$\text{Tada vrijedi } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72} \text{ i } x : y : z = 5 : 7 : 1,$$

$$\text{pa slijedi } x = 5k, y = 7k, z = k.$$

1 BOD

$$\text{Nadalje, iz } c : a = 1 : 4 \text{ slijedi } a = 4c.$$

1 BOD

$$\text{Iz } b : c = 3 : 2 \text{ slijedi } b = \frac{3}{2}c.$$

1 BOD

Uvrštavanjem dobivenih izraza u početnu jednakost dobijemo:

$$\frac{5k}{4c} + \frac{7k}{\frac{3}{2}c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

$$\frac{5k}{4c} + \frac{14k}{3c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

1 BOD

$$\frac{15k + 56k + 12k}{12c} = \frac{83}{72}$$

1 BOD

$$\frac{83k}{12c} = \frac{83}{72}$$

Razlomci su skraćeni do kraja pa slijedi

1 BOD

$$83k = 83 \text{ i } 12c = 72,$$

$$\text{tj. } k = 1 \text{ i } c = 6.$$

1 BOD

$$\text{Slijedi da je } x = 5, y = 7, z = 1$$

1 BOD

$$\text{i } c = 6, a = 24, b = 9.$$

1 BOD

$$\text{Traženi razlomci su } \frac{5}{24}, \frac{7}{9} \text{ i } \frac{1}{6}.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

1 BOD

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$

1 BOD

$$399 + 336 = 735$$

1 BOD

$$735 - 420 = 315$$

1 BOD

315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

$$336 - 315 = 21, \text{ odnosno } 21 \text{ obitelj posjeduje samo kompjuter.}$$

1 BOD

Broj svih mogućih ishoda je 420.

1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21,

1 BOD

$$\text{pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka } p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%.$$

2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

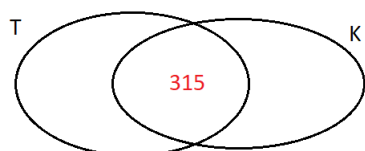
Drugi način:

$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

1 BOD

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$

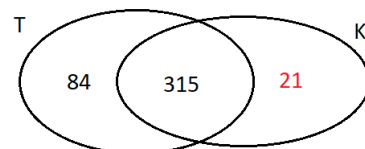
1 BOD



1 BOD

Tada je $399 + 336 - 420 = 315$, odnosno 315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

1 BOD



$336 - 315 = 21$, odnosno 21 obitelj posjeduje samo kompjuter.

1 BOD

(Napomena: Broj elemenata skupa $T \setminus K$ nije nužan za rješenje zadatka, pa se ne boduje.)

Broj svih mogućih ishoda je 420.

1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21,

1 BOD

pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka $p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$.

2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Sve ispitane obitelji posjeduju barem jedan od dva uređaja.

Prema tome, one obitelji koje nemaju TV sigurno imaju kompjuter.

3 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, ali ne i TV (izražena postotkom) jednaka je postotku ispitanih obitelji koje nemaju TV.

3 BODA

U zadatku je zadano da 95% ispitanih obitelji ima TV.

Dakle, onih koji nemaju TV, a imaju kompjuter ima $100\% - 95\% = 5\%$.

2 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 + b^2 + 2ab &= \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= (a + b)^2 - c^2 & 2 \text{ BODA} \\ &= (a + b + c)(a + b - c) & 2 \text{ BODA} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem se dobiva:

$$\begin{aligned} (786 + 389 + 175)(786 + 389 - 175) &= \\ &= 1\,350 \cdot 1\,000 & 1 \text{ BOD} \\ &= 1\,350\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvrštavanjem se dobiva:

$$\begin{aligned} 786^2 - 175^2 + 389^2 + 2 \cdot 786 \cdot 389 &= \\ &= 617\,796 - 30\,625 + 151\,321 + 611\,508 & 4 \text{ BODA} \\ &= 587\,171 + 151\,321 + 611\,508 & 1 \text{ BOD} \\ &= 1\,350\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.

Iz produženog omjera slijedi $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = (5k) : (1k) : (18k)$, gdje je k prirodni broj, odnosno

$$\begin{aligned} x + y &= 5k, x - y = k, x \cdot y = 18k. & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

Iz sustava prve dvije jednačbe slijedi $x = 3k, y = 2k$. 2 BODA

Iz treće jednačbe slijedi $6k^2 = 18k$, odnosno $6k = 18$, tj. $k = 3$. 2 BODA

To su brojevi $x = 3 \cdot 3 = 9$ i $y = 2 \cdot 3 = 6$. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.

Iz produženog omjera slijedi: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{1}$ i $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{5}{18}$. 1 BOD

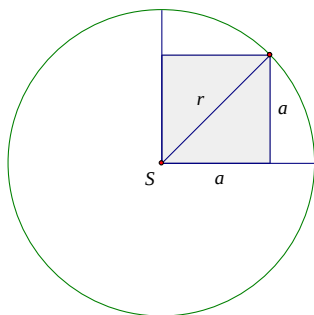
Sređivanjem prvog razmjera slijedi $y = \frac{2}{3}x$, 2 BODA

a sređivanjem drugog razmjera slijedi $18x + 18y = 5xy$. 1 BOD

Rješavanjem ovog sustava dobiju se brojevi $x = 9$ i $y = 6$. 2 BODA

.....UKUPNO 6 BODOVA

3.



a – duljina stranice kvadrata
 d – duljina dijagonale kvadrata
 r – duljina polumjera

$$d = r \quad 1 \text{ BOD}$$

Primijenimo Pitagorin poučak na kvadrat:

$$a^2 + a^2 = r^2,$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina kvadrata:

$$P_k = a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r \right)^2 = \frac{1}{2} r^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina kružnog isječka sa središnjim kutom veličine 90° je četvrtina površine kruga polumjera r :

$$P_i = \frac{1}{4} r^2 \pi. \quad 1 \text{ BOD}$$

Omjer površine kvadrata i površine kružnog isječka je

$$P_k : P_i = \left(\frac{1}{2} r^2 \right) : \left(\frac{1}{4} r^2 \pi \right) = \frac{2}{\pi}. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2 : \pi \approx 2 : 3.14 = 0.636...$$

Površina kvadrata približno je 64 % površine kružnog isječka. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Površina kružnog isječka može se izračunati i pomoću središnjeg kuta veličine 90° .

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} r^2 \pi$$

4. Prvi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo, 1 BOD

pa je 500 m prešla za $t = \frac{s}{v} = \frac{0.5}{10} \text{ h} = \frac{1}{20} \text{ h}$. 2 BODA

Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo i prešao je

$$s = v \cdot t = 4 \cdot \frac{1}{20} \text{ km} = \frac{1}{5} \text{ km} = 200 \text{ m}. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$500 \text{ m} - 200 \text{ m} = 300 \text{ m}$$

Vesna je bila 300 m ispred Damira. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo. 1 BOD

Neka je x vrijeme za koje je Vesna prešla tih 500 m.

Iz razmjera $10 : 0.5 = 1 : x$ 1 BOD

slijedi $x = \frac{1}{20} h$.

1 BOD

Vesna je 500 m prešla za $\frac{1}{20} h$.

Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo.

Neka je y put koji je Damir prešao za to vrijeme.

Iz razmjera $4\ 000 : y = 1 : \frac{1}{20}$

1 BOD

slijedi $y = 200$ m.

1 BOD

Damir je za $\frac{1}{20} h$ prešao 200 m.

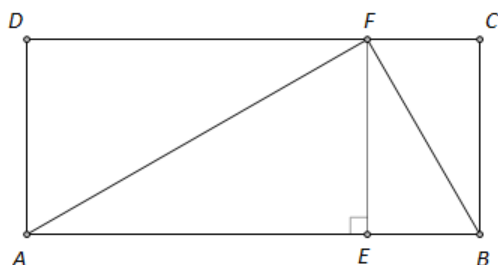
$500\text{ m} - 200\text{ m} = 300\text{ m}$

Vesna je bila 300 m ispred Damira.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK

1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$.

1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$, odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm.

1 BOD

Neka je E nožište visine iz vrha F na stranicu $\overline{AB}$.

Tada je $|EF| = 2\sqrt{3}$ cm,

1 BOD

pa je površina trokuta $\triangle ABF$ jednaka $P = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.

Drugi način:

Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK

1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$.

1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$, odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm.

1 BOD

Uočimo da je trokut $\triangle ABF$ pravokutan.

To možemo ustanoviti uočivši da je $|\angle DAF| + |\angle AFD| = 90^\circ$ i $|\angle FBC| + |\angle CFB| = 90^\circ$

(zbroj veličina šiljastih kutova u trokutu je 90°) i uvjeta zadatka $|\angle AFD| = |\angle FBC|$,

odakle je $|\angle BFA| = 180^\circ - |\angle AFD| - |\angle CFB|$, odnosno

$$|\angle BFA| = 180^\circ - (|\angle AFD| + |\angle CFB|) = 180^\circ - (|\angle FBC| + |\angle CFB|) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Duljine hipotenuza $\overline{AF}$ i $\overline{FB}$ pravokutnih trokuta $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su:

$$|AF|^2 = 36 + 12 = 48, |AF| = 4\sqrt{3} \text{ cm i } |BF|^2 = 4 + 12 = 16, |BF| = 4 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Tako se površina trokuta $\triangle ABF$ može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

$$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.

Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut $\triangle ABF$ pravokutan, treba oduzeti 1 BOD.

Treći način:

Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK 1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$. 1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$, odnosno $x = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. 1 BOD

Duljine hipotenuza $\overline{AF}$ i $\overline{FB}$ pravokutnih trokuta $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su:

$$|AF|^2 = 36 + 12 = 48, |AF| = 4\sqrt{3} \text{ cm i } |BF|^2 = 4 + 12 = 16, |BF| = 4 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Obratom Pitagorinog poučka može se provjeriti da je $\triangle ABF$ pravokutan

($48 + 16 = 64$, a $64 = |AB|^2$).

Tako se površina trokuta $\triangle ABF$ može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

$$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

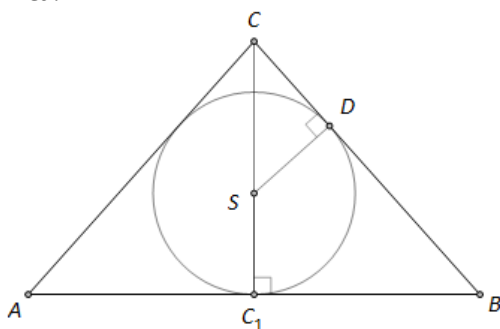
Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.

Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut $\triangle ABF$ pravokutan, treba oduzeti 1 BOD.

6. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.

Trokuti $\triangle CC_1B$ i $\triangle SDC$ su slični po poučku KK: 1 BOD

trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički. 1 BOD

Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $|C_1B| : |BC| = |SD| : |SC|$. 1 BOD

$$|C_1B| = \frac{a}{2}, |SC| = 20 - r, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odnosno } \frac{a}{2} : b = r : (20 - r).$$

1 BOD

Kako je $a : b = 4 : 3$, onda je $2 : 3 = r : (20 - r)$,
odakle se dobije $r = 8$ cm.

2 BODA

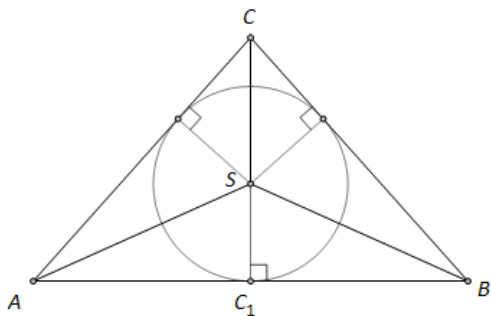
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.
Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a : b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle CC_1B$, iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$$k = 4\sqrt{5} \text{ cm},$$

1 BOD

$$a = 16\sqrt{5} \text{ cm},$$

1 BOD

$$b = 12\sqrt{5} \text{ cm}.$$

1 BOD

Površina trokuta $\triangle ABC$ je

$$P = \frac{16\sqrt{5} \cdot 20}{2} \text{ cm}^2 = 160\sqrt{5} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

Zbroj površina trokuta $\triangle ABS$, $\triangle BCS$ i $\triangle CAS$ jednak je površini trokuta $\triangle ABC$, pa vrijedi:

1 BOD

$$\frac{16\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} = 160\sqrt{5}.$$

2 BODA

Rješavanjem ove jednadžbe slijedi da je $r = 8$ cm.

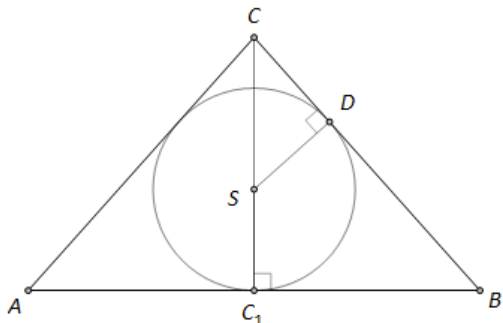
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Skica:

1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.
Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a : b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle CC_1B$, iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$$k = 4\sqrt{5} \text{ cm},$$

1 BOD

$a = 16\sqrt{5}$ cm,	1 BOD
$b = 12\sqrt{5}$ cm.	1 BOD
Trokuti $\triangle CC_1B$ i $\triangle SDC$ su slični po poučku KK:	1 BOD
trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički.	1 BOD
Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $\frac{a}{2} : b = SD : SC $,	1 BOD
odnosno $8\sqrt{5} : 12\sqrt{5} = r : (20 - r)$,	1 BOD
odakle se dobije $r = 8$ cm.	2 BODA
.....	UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Neka je $\overline{abcdef}$ takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i a, b, c, d, e, f svi međusobno različiti.	
Takvih je ukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ brojeva.	2 BODA
Od njih 720, manji od 345 612 su brojevi:	
- $\overline{1bcdef}, \overline{2bcdef}$	
Takvih je brojeva $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$.	2 BODA
- $\overline{31cdef}, \overline{32cdef}$	
Takvih je brojeva $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.	2 BODA
- $\overline{341def}, \overline{342def}$	
Takvih je brojeva $3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.	1 BOD
- $\overline{3451ef}, \overline{3452ef}$	
Takvih je brojeva $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.	1 BOD
Brojeva koji su manji od 345 612 je ukupno $240 + 48 + 12 + 4 = 304$.	1 BOD
Brojeva koji su veći od 345 612 je $720 - 304 - 1 = 415$.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je $\overline{abcdef}$ takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i a, b, c, d, e, f svi međusobno različiti.	
Takvih je ukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ brojeva.	2 BODA
Od njih 720, veći od 345 612 su brojevi:	
- $\overline{4bcdef}, \overline{5bcdef}, \overline{6bcdef}$	
Takvih je brojeva $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$.	2 BODA
- $\overline{35cdef}, \overline{36cdef}$	
Takvih je brojeva $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.	2 BODA
- $\overline{346def}$	
Takvih je brojeva $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.	1 BOD
- $\overline{345621}$	
Takav je jedan broj.	1 BOD
Brojeva koji su veći od 345 612 je ukupno $360 + 48 + 6 + 1 = 415$.	1 BOD
Brojeva koji su manji od 345 612 je $720 - 415 - 1 = 304$.	1 BOD
.....	UKUPNO 10 BODOVA