Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Bazen

Bazen dubine 2 metra ima oblik kvadra. Cijev s toplom vodom napuni polovinu bazena za 10 minuta, a cijev s hladnom vodom za isto vrijeme napuni bazen do visine od 50 cm. Koliko je sekundi potrebno da se prazan bazen napuni do visine 1.25 m ako se cijev s hladnom vodom otvori u trenutku kada je cijev s toplom vodom napunila bazen do visine 75 cm?

Rezultat: 650

Rješenje. Cijev s toplom vodom napuni polovinu bazena za 10 min što znači da za 10 min napuni 1 m visine, odnosno, 10 cm za 1 min. Za 75 cm potrebno je 7.5 min.

Cijev s hladnom vodom napuni bazen do visine od 50 cm za 10 min, odnosno, 5 cm za 1 min.

Obje cijevi zajedno napune 15 cm za 1 min, pa 50 cm napune za $50:15 = \frac{10}{3}$ min.

Vrijedi 7.5 min = 450 s, te $\frac{10}{3}$ min = 200 s.

Bazen se napuni do visine 1.25 m za 650 s.

2. Stupovi

Luka je odlučio ograditi svoj pravokutni vrt s 36 stupova. Po jedan će stup postaviti u svaki vrh pravokutnika, a preostale stupove tako da su svaka dva susjedna stupa na stranicama pravokutnika jednako udaljena. Ukupan broj stupova na duljoj stranici tri je puta veći od ukupnog broja stupova na kraćoj stranici pravokutnika. Koliko iznosi površina vrta u kvadratnim metrima ako su svaka dva susjedna stupa udaljena 3 metra?

Rezultat: 504

Prvo rješenje. Neka je x broj stupova na kraćoj stranici pravokutnika.
Onda je $3x$ broj stupova na duljoj stranici.

Zbroj stupova na sve četiri stranice je $x + x + 3x + 3x = 8x$, ali kako bismo dobili ukupan broj stupova, od tog broja moramo oduzeti 4 jer smo stupove u kutovima brojali dvaput.

Znači, $8x - 4 = 36$, pa je $x = 5$.

Kraća stranica ima 5 stupova između kojih su 4 razmaka, pa je duljina $4 \cdot 3 = 12$ m.

Dulja stranica ima 15 stupova između kojih je 14 razmaka, pa je duljina $14 \cdot 3 = 42$ m.

Površina vrta iznosi $12 \cdot 42 = 504\ \text{m}^2$.

Drugo rješenje.
Neka je na kraćoj stranici broj stupova $x + 2$, a na duljoj stranici $y + 2$.

Tada vrijedi $3(x + 2) = y + 2$, odnosno $3x + 4 = y$.

Ukupno su u vrhovima pravokutnika 4 stupa, na obje kraće stranice se nalazi još po x stupova, a na obje dulje stranice se nalazi još po y stupova. Ukupan broj stupova iznosi $2x + 2y + 4 = 36$.

Dijeljenjem s 2 te oduzimanjem, dobivamo jednadžbu $x + y = 16$.

Uvrštavanjem $y = 3x + 4$ u $x + y = 16$ dobivamo $x + 3x + 4 = 16$.

Slijedi $4x = 12$, odnosno $x = 3$. Uvrštavanjem u $x + y = 16$ dobivamo $y = 13$.

Kraća stranica ima 5 stupova između kojih su 4 razmaka, pa je duljina $4 \cdot 3 = 12$ m.

Dulja stranica ima 15 stupova između kojih je 14 razmaka, pa je duljina $14 \cdot 3 = 42$ m.

Površina vrta iznosi $12 \cdot 42 = 504\ \text{m}^2$.

3. Berba krušaka
Dinka, Tina i Marta beru kruške u voćnjaku. Dinka je ubrala $\frac{2}{9}$ svih ubranih krušaka. Tina je ubrala 18 krušaka više od Dinke. Marta je ubrala 13 krušaka manje negoli Dinka i Tina zajedno. Koliko je neubranih krušaka ostalo u voćnjaku ako su djevojke pobrale $\frac{3}{5}$ svih krušaka u voćnjaku?

Rezultat: 138

Rješenje. Neka je x broj svih ubranih krušaka.

Dinka je ubrala $\frac{2}{9}x$ krušaka.

Tina je ubrala $\frac{2}{9}x + 18$ krušaka, a Marta $\frac{4}{9}x + 5$.

Ukupno su ubrali $\frac{8}{9}x + 23$ što znači da je $\frac{1}{9}x = 23$.

Broj svih ubranih krušaka je $x = 23 \cdot 9 = 207$.

Ako su djevojke pobrale $\frac{3}{5}$ svih krušaka u voćnjaku, ukupan broj krušaka je $207 : \frac{3}{5} = 345$.

Neubranih krušaka je $345 - 207 = 138$.

4. Kvadratna tablica

U kvadratnu tablicu Sergej je upisao prirodne brojeve od 1 do 2025, svaki broj točno jednom. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje. Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u osjenčana polja (vidi sliku).

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	⋱				⋰		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		⋰				⋱		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena: Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

Drugo rješenje.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

$$1980 \quad 1807 \quad 1808 \quad 1809 \quad \dots \quad 1849 \quad 1850.$$

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.

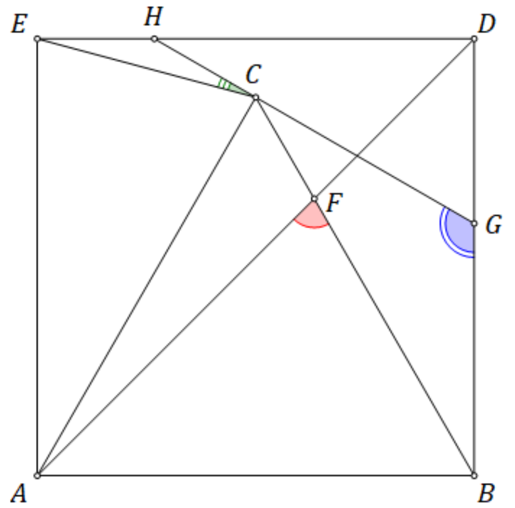
Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

5. Kutovi

Neka je ABC jednakostranični trokut, a $ABDE$ kvadrat kojem je točka C u unutrašnjosti. Neka je F sjecište dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ te neka su točke G i H redom sjecišta dužina $\overline{BD}$ i $\overline{DE}$ s pravcem koji sadrži točku C i okomit je na pravac AC. Odredi, u stupnjevima, zbroj mjera kutova $\sphericalangle AFB$, $\sphericalangle CGB$ i $\sphericalangle HCE$.

Rezultat: 210

Rješenje.



Vrijedi $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BAD| = 45°$ jer je trokut ABD jednakokračan pravokutan.

Vrijedi $|\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle CBA| = 60°$ jer je trokut ABC jednakostraničan.

Slijedi da je $|\sphericalangle AFB| = 180° - |\sphericalangle BAF| - |\sphericalangle FBA| = 180° - 45° - 60° = 75°$.

U četverokutu ABGC kutovi pri vrhovima B i C su pravi, a kut pri vrhu A iznosi 60°.

Stoga preostali kut pri vrhu G iznosi

$$|\sphericalangle CGB| = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°.$$

Trokut ACE je jednakokračan jer je $|AC| = |AE|$.

Vrijedi $|\sphericalangle BAC| = 60°$ i $|\sphericalangle BAE| = 90°$ pa je $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle BAE| - |\sphericalangle BAC| = 30°$.

Slijedi $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ECA| = 150° : 2 = 75°$.

Budući da je $|\sphericalangle HCA| = 90°$ slijedi $|\sphericalangle HCE| = |\sphericalangle HCA| - |\sphericalangle ECA| = 90° - 75° = 15°$.

Zbroj mjera tri označena kuta iznosi $75° + 120° + 15° = 210°$.

6. Pedeseti redak

Prirodni brojevi zapisani su redom i to tako da je u prvom retku zapisan jedan broj, u drugom retku dva broja te u svakom sljedećem retku po jedan broj više nego u prethodnom retku. Koliki je umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku?

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
.	.	.		

Rezultat: 600

Rješenje. Uočimo da je broj brojeva u svakom retku jednak rednom broju retka te da je posljednji broj u svakom retku zbroj svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih broju retka.

U prvom retku je broj 1.
Drugi redak ima dva broja, a posljednji je broj $1 + 2 = 3$.
Treći redak ima tri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 = 6$.
Četvrti redak ima četiri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
...
Četrdeset deveti redak ima 49 brojeva, a posljednji je broj $A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 49$.

Taj zbroj odredit ćemo na sljedeći način:

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \cdots + 49 \\ \underline{49 + 48 + 47 + \cdots + 1} \\ 50 + 50 + 50 + \cdots + 50 \end{array}$$

Vrijedi $2A = 50 \cdot 49$, odnosno $A = 25 \cdot 49 = 1225$.

Pedeseti redak započinje brojem 1226, a završava s $1225 + 50 = 1275$, pa je zbroj svih pedeset brojeva u pedesetom retku $B = 1226 + 1227 + \cdots + 1275$.

Taj zbroj određujemo na sličan način:

$$\begin{array}{c} 1226 + 1227 + \cdots + 1275 \\ \underline{1275 + 1274 + \cdots + 1226} \\ 2501 + 2501 + \cdots + 2501 \end{array}$$

Vrijedi $2B = 50 \cdot 2501$, odnosno $B = 25 \cdot 2501 = 62525$.

Umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku iznosi $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 600$.

7. Manji od 500

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje.

Odredit ćemo najprije broj troznamenkastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500.
Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.

Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$.
Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.

Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$.
Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500$$
$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9, 8, 8, 8, 7, 9, 9 8, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9.

Lako provjerimo da takvih brojeva ima ukupno 6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 =17.
Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenkastih brojeva: $900 - 17 = 883$.
Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

a	b	c	**broj brojeva**
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
	9	od 0 do 6	7
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena.

Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

8. Dvoznamenkasti brojevi

Ako se zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja doda kvadrat tog zbroja, dobiva se ponovno taj dvoznamenkasti broj. Koliki je zbroj svih dvoznamenkastih brojeva sa tim svojstvom?

Rezultat: 144

Prvo rješenje.

Neka je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj. Iz uvjeta vrijedi

$a + b + (a + b)^2 = \overline{ab}$

$a + b + (a + b)^2 = 10a + b$

$(a + b)^2 = 9a$

Lijeva strana jednakosti je kvadrat broja i broj 9 je kvadrat broja 3, pa je znamenka a također kvadrat prirodnog broja, odnosno vrijedi $a \in \{1, 4, 9\}$.

Za $a = 1$ slijedi da je $b = 2$, što daje broj 12.

Za $a = 4$ slijedi da je $b = 2$, što daje broj 42.

Za $a = 9$ slijedi da je $b = 0$, što daje broj 90.

Zbroj svih brojeva je $12 + 42 + 90 = 144$.

Drugo rješenje.

Neka je x zbroj znamenaka dvoznamenkastog broja.

Tada je x^2 kvadrat zbroja znamenaka, a $x + x^2$ je taj dvoznamenkasti broj.

Uvrštavanjem vrijednosti za x od 3 do 9 dobivamo brojeve 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90.

Za x manji od 3 dobivamo jednoznamenkasti broj, a za veći od 9 troznamenkasti.

Redom provjeravamo za koje brojeve vrijede uvjeti.

$12 = 3 + 3^2$, $20 \neq 2 + 2^2$, $30 \neq 3 + 3^2$, $42 = 6 + 6^2$,

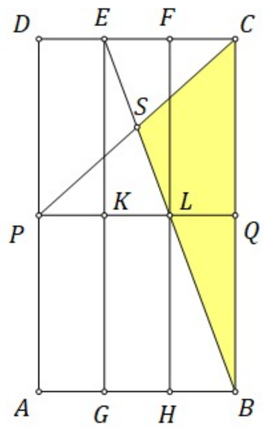
$56 \neq 11 + 11^2$, $72 \neq 9 + 9^2$, $90 = 9 + 9^2$.

Zbroj svih brojeva je $12 + 42 + 90 = 144$.

9. Površina

Površina pravokutnika $ABCD$ je 860 cm². Točka E je odabrana na stranici $\overline{CD}$ tako da vrijedi $|EC| = 2|DE|$, točka P je polovište stranice $\overline{AD}$, a točka S je sjecište pravaca CP i BE. Kolika je površina trokuta BCS?

Rezultat: 215



Prvo rješenje. Neka je točka Q polovište stranice $\overline{BC}$, a točka F polovište dužine $\overline{EC}$. Nadalje, neka točke G i H dijele stranicu $\overline{AB}$ na tri sukladne dužine kao na slici. Neka su točke K i L redom sjecišta dužina $\overline{EG}$ i $\overline{FH}$ s dužinom $\overline{PQ}$. Crtanjem dužina $\overline{PQ}$, $\overline{EG}$ i $\overline{FH}$ dobivamo pravokutnu mrežu koja se sastoji od šest sukladnih pravokutnika.

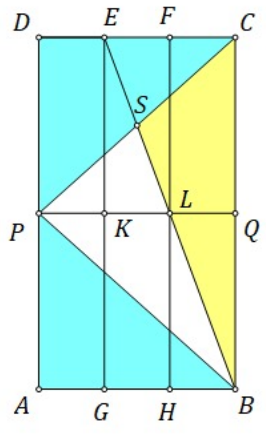
Točka L je središte pravokutnika $BCEG$, pa pripada dijagonali $\overline{BE}$.

Uočimo da su trokuti PLS i CES sukladni jer imaju sukladne pripadne kutove i vrijedi $|PL| = |CE|$. Stoga je $|PS| = |CS|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{PC}$.

Ta dužina je dijagonala pravokutnika $PQCD$, pa zaključujemo da je S središte tog pravokutnika.

Slijedi da je točka S jednako udaljena od pravaca AD i BC, tj. visina je trokuta BCS iz vrha S na stranicu $\overline{BC}$ upola manja od visine paralelograma $ABCD$ na tu istu stranicu. Zaključujemo da je površina trokuta BCS četiri puta manja od površine paralelograma $ABCD$, odnosno

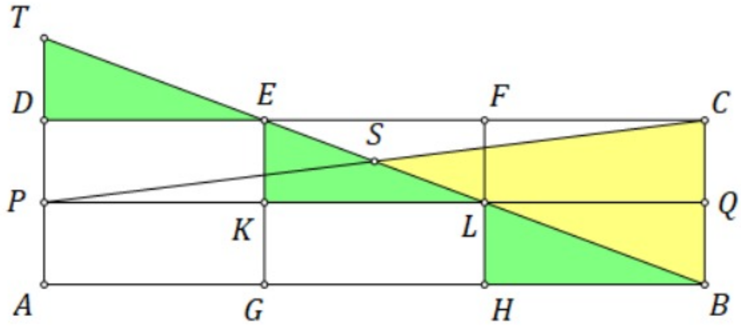
$$P(BCS) = P(ABCD) : 4 = 860 \text{ cm}^2 : 4 = 215 \text{ cm}^2.$$



Napomena. Površine trokuta ABP i PCD su jednake i iznose četvrtinu površine pravokutnika $ABCD$. Stoga površina trokuta BCP iznosi polovinu površine pravokutnika $ABCD$. Nakon što uočimo da vrijedi $|PS| = |CS|$, možemo zaključiti da trokuti BCS i BSP imaju jednake površine jer imaju sukladne stranice $\overline{PS}$ i $\overline{CS}$ te jednaku visinu na te stranice. Stoga je površina trokuta BCS jednaka četvrtini površine pravokutnika $ABCD$.

Drugo rješenje.

Nacrtajmo pravokutnu mrežu kao u prvom rješenju. Neka je točka T sjecište pravaca AD i BE.



Pravokutni trokuti DET, KLE i HBL imaju sukladne pripadne kutove, te vrijedi $|DE| = |KL| = |HB|$. Stoga su ti trokuti sukladni, te zaključujemo da je $|TD| = |KE| = |LH| = \frac{1}{2}|AD|$.

Slijedi $|BC| = |AD| = 2|PD| = |PT|$.

Tada su trokuti BCS i TPS sukladni jer imaju i sve pripadne kutove sukladne.

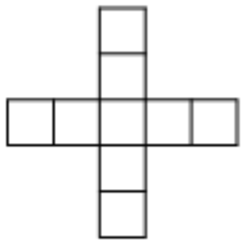
Iz te sukladnosti slijedi $|PS| = |CS|$ i kao u prvom rješenju zaključujemo $P(BCS) = P(ABCD) : 4$.

10. Redak i stupac

U svako polje prikazanog lika treba upisati po jedan prirodni broj (brojevi se mogu ponavljati) i to tako da:

- pet brojeva u stupcu su isti kao pet brojeva u retku, moguće u drugačijem poretku
- umnožak tih pet brojeva jednak je njihovom zbroju.

Na koliko načina to možemo napraviti?



Rezultat: 280

Rješenje.

Odredimo prvo sve kombinacije od pet brojeva kojima je umnožak jednak zbroju.

Ako među tim brojevima ima barem četiri broja 1, umnožak je jednak petom broju, a zbroj je veći od od tog broja. Stoga među pet brojeva može biti najviše tri puta broj 1.

Promotrimo prvo kombinacije koje imaju točno tri broja 1, krenuvši od najmanjih mogućih brojeva. Redom povećavamo brojeve za 1 i promatramo koliko iznosi zbroj i umnožak.

Kombinacija brojeva	**Zbroj**	**Umnožak**
1, 1, 1, 2, 2	7	4
1, 1, 1, 2, 3	8	6
1, 1, 1, 2, 4	9	8
1, 1, 1, 2, 5	**10**	**10**
Povećavamo li samo peti broj, zbroj će biti manji od umnoška.		
1, 1, 1, 3, 3	**9**	**9**
Povećavamo li četvrti ili peti broj, zbroj će biti manji od umnoška.		
1, 1, 2, 2, 2	**8**	**8**
Povećavamo li bilo koji broj, zbroj će biti manji od umnoška.		

Na ovaj način smo utvrdili da postoje točno tri kombinacije pet brojeva čiji je umnožak jednak zbroju.

Prebrojimo na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 1, 1, 2, 5 u zadani lik na traženi način.

Ako u središnje polje upišemo broj 2, onda na 4 načina možemo izabrati polje u retku, te na 4 načina polje u stupcu u koje ćemo upisati broj 5. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $4 \cdot 4 = 16$ načina.

Na isti način zaključujemo da ako u središnje polje upišemo broj 5, imamo 16 načina.

Ako u središnje polje upišemo broj 1, onda na 4 načina biramo polje u retku u koje upisujemo broj 2, te na 3 načina biramo polje u retku u koje upisujemo broj 5. Dakle, na 12 načina upisujemo brojeve u retku. Također, na 12 načina možemo upisati brojeve u stupac. Ukupno ima $12 \cdot 12 = 144$ načina.

Brojeve 1, 1, 1, 2, 5 u zadani lik možemo upisati na 16 + 16 + 144 = 176 načina.

Prebrojimo na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 1, 1, 3, 3 u zadani lik na traženi način.

Ako u središnje polje upišemo broj 3, onda na 4 načina možemo izabrati polje u retku, te na 4 načina polje u stupcu u koje ćemo još jednom upisati broj 3. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $4 \cdot 4 = 16$ načina.

Ako u središnje polje upišemo broj 1, onda na 6 načina možemo izabrati dva polja u retku, te na 6 načina dva polja u stupcu u koje ćemo još upisati broj 3. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $6 \cdot 6 = 36$ načina.

Brojeve 1, 1, 1, 3, 3 u zadani lik možemo upisati na 16 + 36 = 52 načina.

Konačno, među brojevima 1, 1, 2, 2, 2 se nalazi dva puta jedan broj, te tri puta drugi broj, baš kao i među brojevima 3, 3, 1, 1, 1. Stoga brojeve 1, 1, 2, 2, 2 također možemo upisati u zadani lik na 52 načina.

Ukupno imamo 176 + 52 + 52 = 280 načina.