Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Kvadrat zbroja znamenaka

Marina će 2025. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njezina rođenja. Odredi kvadrat zbroja znamenaka godine njezina rođenja, znajući da je rezultat troznamenkasti broj.

Rezultat: 729

Prvo rješenje. Zbroj znamenaka godine rođenja ne može biti veći od $9+9+9+9=36$, pa je Marina rođena u 20. ili 21. stoljeću.

Ako je rođena u 20. stoljeću, godina njezina rođenja je oblika $\overline{19ab}$ gdje je a znamenka desetice, a b znamenka jedinice tog broja.
Po uvjetu zadatka je $2025-\overline{19ab}=1+9+a+b$, pa je $2025-(1900+10a+b)=10+a+b$, iz čega slijedi $115=11a+2b$.

Za $a\leq 8$ dobivamo da $2b>20$ što nije moguće jer je b znamenka.
Za $a=9$ dobivamo $b=8$ pa je godina Marininog rođenja 1998.

Promotrimo drugi slučaj, da je Marina rođena u 21. stoljeću. Tada je godina njezina rođenja oblika $\overline{20ab}$ gdje je a znamenka desetice, a b znamenka jedinice. Uočimo da a može biti samo 0, 1 ili 2. Uvjet postaje $2025-\overline{20ab}=2+0+a+b$ pa je $25-(10a+b)=2+a+b$, odnosno $23=11a+2b$.

Za $a=0$ i $a=2$ nema rješenja, a za $a=1$ dobije se b=6. Da je Marina rođena 2016. godine, ove godine bi navršila 9 godina, a zbroj znamenaka broja 2016 je upravo 9. Međutim, to nije rješenje jer je kvadrat broja 81 dvoznamenkasti broj.

Dakle, Marina je rođena 1998. godine, a kvadrat zbroja znamenaka godine njezina rođenja je $(1+9+9+8)^2=27^2=729$.

Drugo rješenje.
Prikažimo tablicom rast broja Marininih godina i zbroj znamenaka godine rođenja od 2025. unatrag.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
2024.	8	1
2023.	7	2
2022.	6	3
2021.	5	4

2020.	4	5
2019.	12	6
2018.	11	7
2017.	10	8
2016.	9	9

Ako je Marina rođena 2016. sada ima 9 godina, a zbroj znamenaka godine njezina rođenja iznosi 9. Kvadrat tog broja je $9 \cdot 9 = 81$. To nije troznamenkast broj, pa ne zadovoljava uvjet zadatka.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
2015.	8	10
2014.	7	11
2013.	6	12
2012.	5	13
2011.	4	14
2010.	3	15
2009.	11	16

Primjećujemo da će se dalje do 2000. godine zbroj znamenaka smanjivati, a broj godina rasti, pa nastavljamo s 1999. godinom.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
1999.	28	26
1998.	27	27
1997.	26	28

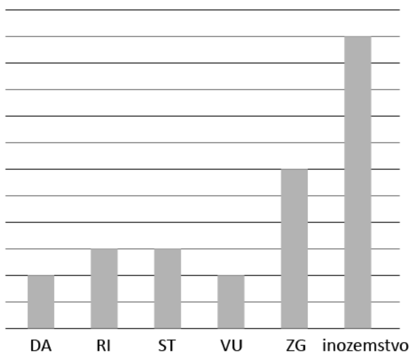
Ako je Marina rođena 1998. sada ima 27 godina, a zbroj znamenaka godine njezina rođenja iznosi 27.

Nastavimo li računati dalje uočavamo da broj godina života i dalje raste, a zbroj znamenaka ne može biti veći od $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, pa druga rješenja ne postoje jer bi Marina imala više od 28 godina da je rođena prije 1997. godine.

Kvadrat broja 27 je troznamenkasti broj 729, što je traženo rješenje.

2. Autokamp

U autokampu se nalaze automobili iz pet hrvatskih gradova (Daruvara, Rijeke, Splita, Vukovara i Zagreba) te iz inozemstva. Udio automobila u kampu prema registarskim oznakama prikazan je dijagramom. Ako je prosječan broj automobila iz spomenutih pet hrvatskih gradova u autokampu 35.2, koliko je u autokampu inozemnih automobila?



Rezultat: 121

Rješenje.

Neka je broj x polovina broja automobila iz Daruvara i Vukovara. Tada je broj automobila iz Daruvara i Vukovara $2x$, broj automobila iz Rijeke i Splita $3x$, a broj automobila iz Zagreba $6x$. Broj inozemnih automobila je $11x$.

Prosječan broj automobila iz spomenutih pet hrvatskih gradova je

$$35.2 = \frac{2x + 3x + 3x + 2x + 6x}{5}$$

pa je $16x = 35.2 \cdot 5 = 176$, $x = 176 : 16 = 11$.

Broj inozemnih automobila je $11x = 11 \cdot 11 = 121$.

3. Površina pravokutnika

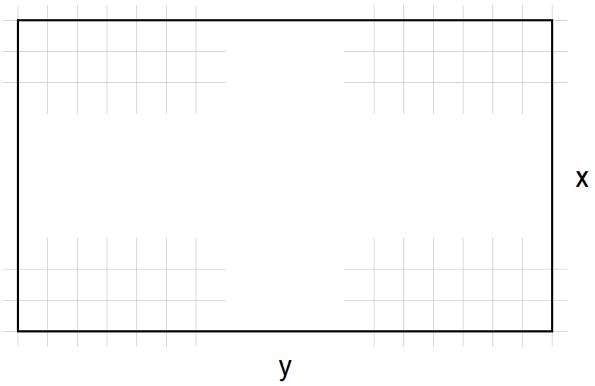
O nekom je pravokutniku poznato sljedeće:

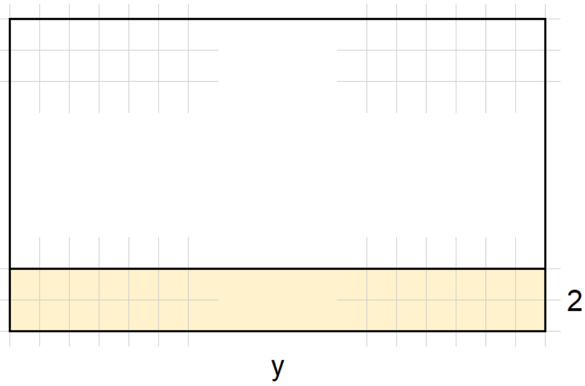
- Ako se duljina kraće stranice pravokutnika umanji za 2, površina će se smanjiti za 84.
- Ako se duljina dulje stranice pravokutnika uveća za 3, površina će se povećati za 51.

Kolika je površina tog pravokutnika?

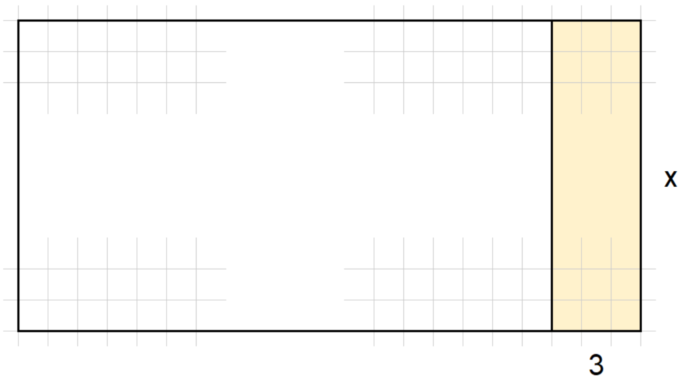
Rezultat: 714

Prvo rješenje. Neka su duljine susjednih stranica pravokutnika x i y, pri čemu je $x < y$.





Ako se duljina kraće stranice x umanji za 2, površina pravokutnika se smanji za 84 pa je $2 \cdot y = 84$ i $y = 42$.



Ako se duljina dulje stranice y uveća za 3, površina mu se poveća za 51 pa je $3 \cdot x = 51$ i $x = 17$.

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

Drugo rješenje.

Neka su duljine stranica pravokutnika x i y. Njegova je površina $x \cdot y$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$(x-2) \cdot y = x \cdot y - 84$$

$$x \cdot (y+3) = x \cdot y + 51$$

Primjenom svojstava distributivnosti množenja prema zbrajanju i oduzimanju dobije se:

$$x \cdot y - 2y = x \cdot y - 84$$

$$x \cdot y + 3x = x \cdot y + 51$$

iz čega slijedi

$$2y = 84, \qquad y = 42,$$

$$3x = 51, \qquad x = 17.$$

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

4. Kvadratna tablica

U kvadratnu tablicu Sergej je upisao prirodne brojeve od 1 do 2025, svaki broj točno jednom. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje. Kako je $2025 = 45^2$, popunjena tablica ima 45 stupaca i 45 redaka.

Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u označena polja (vidi sliku).
U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena:
Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	⋱				⋰		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		⋰				⋱		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

Drugo rješenje.

Kako je $2025 = 45^2$, popunjena tablica ima 45 stupaca i 45 redaka.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

1980 1807 1808 1809 ... 1849 1850.

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.
Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

5. Ema, Flora i Gita

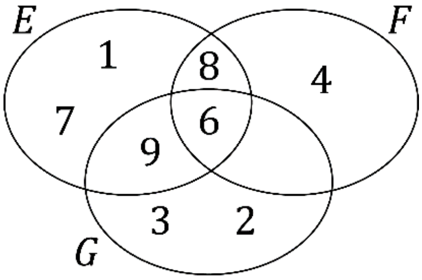
Prijateljice Ema, Flora i Gita zamislile su po jedan prirodan broj. Sve znamenke Eminog i Florinog broja čine skup $\{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$, a jedine zajedničke znamenke su 6 i 8. Sve znamenke Eminog i Gitinog broja čine skup $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$, a jedine zajedničke znamenke su 6 i 9. Jedina zajednička znamenka Florinog i Gitinog broja je znamenka 6.
Koji je najmanji mogući broj koji je jedna od prijateljica mogla zamisliti?

Rezultat: 468

Prvo rješenje.

Neka je E skup znamenaka Eminog broja, F skup znamenaka Florinog broja, te G skup znamenaka Gitinog broja. Prikažimo Vennovim dijagramom elemente tih skupova.

U sva tri skupa nalazi se znamenka 6, u presjeku skupova E i F je još i znamenka 8, a u presjeku skupova E i G je i znamenka 9.



Znamenke 1 i 7 nalaze se u uniji skupova E i F i u uniji skupova E i G, ali nisu u presjeku skupova F i G. Stoga zaključujemo da su te znamenke u skupu E.

Dalje zaključujemo da je znamenka 4 u skupu F (a nije u E niti G), te da su znamenke 2 i 3 u skupu G (ali ne u skupovima E ni F).

Florin broj ima tri znamenke, Gitin četiri, a Emin pet znamenaka. Najmanji mogući broj mogla je zamisliti Flora, a to je broj 468.

Drugo rješenje.

Skupove navedene u zadatku zvat ćemo „prvi skup" (skup znamenaka Eminog i Florinog broja) i „drugi skup" (skup znamenaka Eminog i Gitinog broja).

U tablici ćemo označiti koje su znamenke u pojedinim brojevima. Sva tri broja imaju znamenku 6.

U Florinom broju je još i znamenka 8, u Gitinom znamenka 9, a u Eminom obje znamenke i 8 i 9.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema							●		●	●
Flora							●		●	
Gita							●			●

Znamenke 2 i 3 nisu u prvom skupu, a jesu u drugom skupu. To znači da nisu u Eminom broju, pa moraju biti u Gitinom broju.

Znamenka 4 je u prvom skupu, ali nije u drugom skupu. To znači da nije u Eminom broju, pa se nalazi u Florinom broju.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema							●		●	●
Flora					●		●		●	
Gita			●	●			●			●

Znamenke 1 i 7 nalaze se u prvom i drugom skupu, a Florin i Gitin broj nemaju zajedničkih znamenaka. To znači da te znamenke moraju biti u Eminom broju te nisu ni u Florinom, ni u Gitinom.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema		●					●	●	●	●
Flora					●		●		●	
Gita			●	●			●			●

Znamenke 0 i 5 nisu ni u jednom od brojeva.

Sada vidimo da Emin broj ima pet znamenaka (1, 6, 7, 8 i 9), Florin broj tri znamenke (4, 6 i 8), a Gitin broj četiri znamenke (2, 3, 6 i 8). Najmanji broj je Florin,

Kako tražimo najmanji mogući broj, to je broj 468.

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
	...			

6. Pedeseti redak

Prirodni brojevi zapisani su redom i to tako da je u prvom retku zapisan jedan broj, u drugom retku dva broja te u svakom sljedećem retku po jedan broj više nego u prethodnom retku.
Koliki je umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku?

Rezultat: 600

Rješenje. Uočimo da je broj brojeva u svakom retku jednak rednom broju retka te da je posljednji broj u svakom retku zbroj svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih broju retka.
U prvom retku je broj 1.
Drugi redak ima dva broja, a posljednji je broj $1 + 2 = 3$.
Treći redak ima tri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 = 6$.
Četvrti redak ima četiri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
...
Četrdeset deveti redak ima 49 brojeva, a posljednji je broj $A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 49$.

Taj zbroj odredit ćemo na sljedeći način:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 49$$
$$\underline{49 + 48 + 47 + \cdots + 1}$$
$$50 + 50 + 50 + \cdots + 50$$

Vrijedi $2A = 50 \cdot 49$, odnosno $A = 25 \cdot 49 = 1225$.

Pedeseti redak započinje brojem 1226, a završava s $1225 + 50 = 1275$, pa je zbroj svih pedeset brojeva u pedesetom retku $B = 1226 + 1227 + \cdots + 1275$.

Taj zbroj određujemo na sličan način:

$$1226 + 1227 + \cdots + 1275$$
$$\underline{1275 + 1274 + \cdots + 1226}$$
$$2501 + 2501 + \cdots + 2501$$

Vrijedi $2B = 50 \cdot 2501$, odnosno $B = 25 \cdot 2501 = 62525$.

Umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku iznosi $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 600$.

7. Manji od 500

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje.

Odredit ćemo najprije broj troznamenkastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500. Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.
Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$. Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.
Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$.
Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500$$
$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9, 8, 8, 8, 7, 9, 9 8, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9

Lako provjerimo da takvih brojeva ima ukupno ukupno 6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 =17.
Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenkastih brojeva: $900 - 17 = 883$.

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

a	***b***	***c***	**broj brojeva**
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
	9	od 0 do 6	7
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

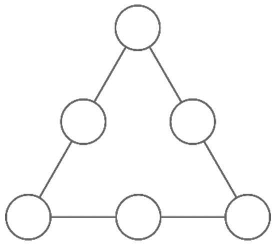
$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena.

Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$, pa svi takvi brojevi zadovoljavaju dani uvjet. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

8. Raspoređeni brojevi

U svaki od kružića na slici treba upisati po jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tako da zbroj triju brojeva na svakoj stranici trokuta bude isti. Za svaki takav raspored pomnožena su tri broja u vrhovima trokuta. Koliki je zbroj svih međusobno različitih umnožaka koji se mogu dobiti na taj način?



Rezultat: 189

Rješenje. Odredimo najprije najveći i najmanji zbroj brojeva na svakoj stranici u rasporedu koji zadovoljava navedeni uvjet. S obzirom na to da se svaki od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 pojavljuje barem jednom, zbroj brojeva na stranici ne može bit manji od $1 + 2 + 6 = 9$ (to je najmanji mogući zbroj s pribrojnikom 6) i ne može biti veći od $1 + 5 + 6 = 12$ (to je najveći mogući zbroj s pribrojnikom 1).

Odredimo sve moguće kombinacije triju različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ čiji je zbroj 9, 10, 11 ili 12.

Zbroj 9 možemo dobiti na sljedeće načine: $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.

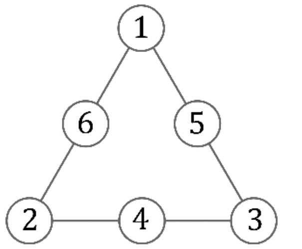
Zbroj 10 možemo dobiti na sljedeće načine: $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$.

Zbroj 11 možemo dobiti na sljedeće načine: $11 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5$.

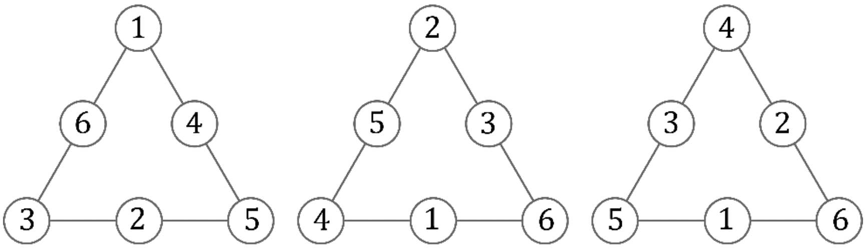
Zbroj 12 možemo dobiti na sljedeće načine: $12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5$.

Lako je vidjeti da su to sve mogućnosti.

Želimo li brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6 rasporediti u kružiće tako da zbroj triju brojeva na svakoj stranici bude 9, u vrhove moramo staviti brojeve 1, 2 i 3, a na stranice brojeve 4, 5 i 6, i to broj 4 između 2 i 3, broj 5 između 1 i 3, a broj 6 između 1 i 2.



Na sličan način raspoređujemo brojeve i u ostalim slučajevima.



Umnožak brojeva u vrhovima trokuta u prvom slučaju iznosi $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, u drugom $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, u trećem $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, a u četvrtom slučaju $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Zbroj sva četiri moguća umnoška je $6 + 15 + 48 + 120 = 189$.

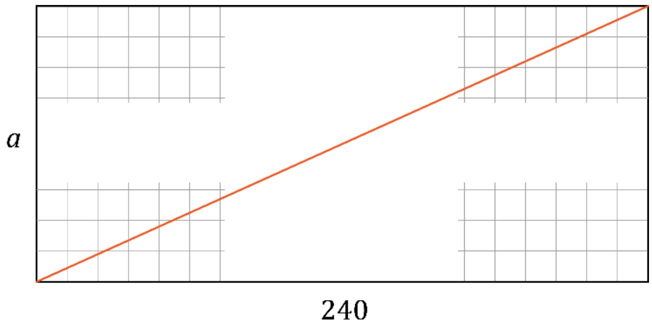
9. Na dijagonali

Pravokutnik $ABCD$ je podijeljen na jedinične kvadrate. Njegova dijagonala $\overline{BD}$ ne prolazi ni jednim od vrhova tih kvadrata, osim točkama B i D. Na dijagonali, između točaka B i D, točno je 345 sjecišta sa stranicama tih jediničnih kvadrata. Ako duljina jedne stranice pravokutnika $ABCD$ iznosi 240, koliki je njegov opseg?

Rezultat: 694

Rješenje.

Duljinu nepoznate stranice pravokutnika označimo a. Pravokutna mreža koja dijeli pravokutnik na jedinične kvadratiće sastoji se od $a-1$ vodoravnih i 239 okomitih dužina.



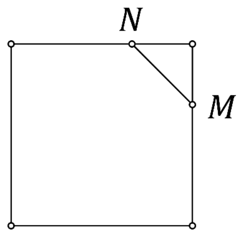
Dijagonala sigurno siječe svaku od tih dužina, pa je na njoj $a-1$ sjecište s vodoravnim dužinama i 239 sjecišta s okomitim dužinama. Kako dijagonala ne prolazi vrhovima jedinične mreže, te su točke međusobno različite, a prema uvjetu zadatka ukupno ih je 345.

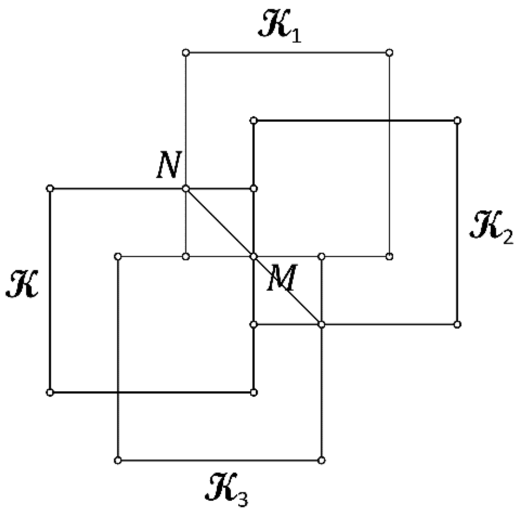
Broj sjecišta s okomitim dužinama je $345 - 239 = 106$, odakle zaključujemo da je $a = 107$.

Opseg pravokutnika je $2 \cdot (240 + 107) = 694$.

10. Kvadrat i njegove slike

Neka je $\mathcal{K}$ kvadrat površine 8100 i neka su M i N točke na njegovim stranicama koje su od jednog od vrhova kvadrata udaljene za jednu trećinu duljine stranice kvadrata. Kvadrat $\mathcal{K}$ preslikan je osnom simetrijom s obzirom na pravac MN u kvadrat $\mathcal{K}_1$. Kvadrati $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_1$ preslikani su potom centralnom simetrijom s obzirom na točku M u kvadrate $\mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_3$.
Unija tih četiriju kvadrata je mnogokut. Koliki je njegov opseg?





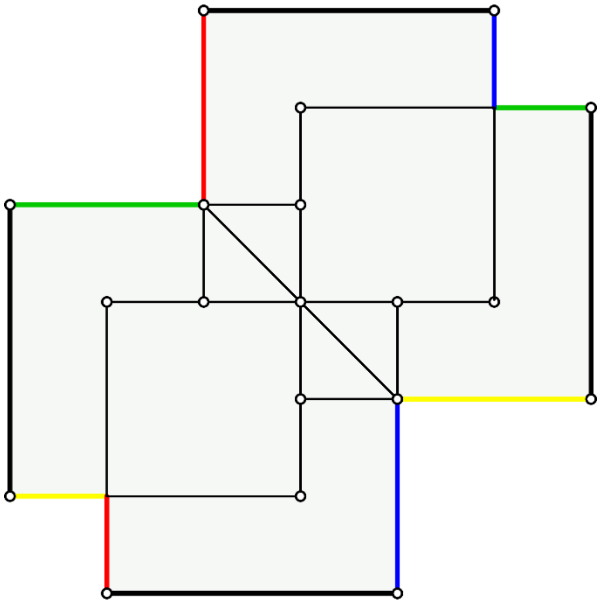
Rezultat: 720

Rješenje.

Kako je $8100 = 90 \cdot 90$, duljina stranice danog kvadrata je 90.

Crtež prikazuje kvadrate $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_3$ dobivene opisanim preslikavanjima.

Četiri stranice mnogokuta istaknute crnom bojom imaju duljinu jednaku duljini stranice kvadrata $\mathcal{K}$.



Duljina kraće dužine obojane crvenom bojom jednaka je 1/3 duljine stranice kvadrata $\mathcal{K}$, a duljina dulje dužine obojane crvenom bojom jednaka je 2/3 duljine stranice kvadrata $\mathcal{K}$. Zbroj duljina dužina obojanih crvenom bojom jednak je duljini stranice kvadrata $\mathcal{K}$.

Isto vrijedi i za dužine obojane plavom, zelenom i žutom bojom.

Stoga je opseg mnogokuta jednak $8 \cdot 90 = 720$.

Napomena: Sve dužine koje čine opseg mnogokuta možemo izračunati jer u sredini mnogokuta vidimo dva kvadrata stranice duljine 30. Redom krenuvši od stranice na dnu mnogokuta duljine stranica su 90, 60, 60, 90, 30, 30, 90, 60, 60, 90, 30, 30. Njihov zbroj je 720.