Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Matematika

Eli je bilo dosadno pa je na računalu uzastopno zapisala riječ „matematika“ mnogo puta. Zatim je između svake dvije riječi upisala naizmjence jedno pa dva slova X.

matematikaXmatematikaXXmatematikaXmatematikaXXmatematikaXma...

Na kojem se mjestu u tom nizu nalazi stoto slovo a ?

Rezultat: 381

Rješenje. Uočimo da se u zapisanom nizu ponavlja niz od 23 slova: matematikaXmatematikaXX. U njemu se slovo a pojavljuje šest puta. Kako je 100 : 6 = 16 i ostatak 4, odnosno $100 = 16 \cdot 6 + 4$, zaključujemo da se u 16 takvih kraćih nizova slovo a pojavljuje 96 puta. Za preostala četiri pojavljivanja slova a potrebno je zapisati još 13 slova (matematikaXma).

Dakle, redni broj stotog slova a je $16 \cdot 23 + 13 = 381$.

2. Simboli

U sljedećim jednakostima svaki od znakova ◎, ⊠ i ◬ zamjenjuje jedan broj.

$$◎ + ◬ \cdot ◎ = 884$$

$$⊠ + ◬ : ◎ = 36$$

$$◬ + ◬ + ◬ = 153$$

Kolika je vrijednost izraza $◬ + ◎ \cdot ⊠$?

Rezultat: 612

Rješenje.

Iz treće jednakosti zaključujemo da je $◬ = 153 : 3 = 51$.

Stoga je prva jednakost $◎ + 51 \cdot ◎ = 884$, što znači da je $52 \cdot ◎ = 884$ pa je $◎ = 884 : 52 = 17$.

Umjesto $⊠ + ◬ : ◎ = 36$ možemo pisati $⊠ + 51 : 17 = 36$ ili $⊠ + 3 = 36$ pa je $⊠ = 33$.

Tražena vrijednost izraza $◬ + ◎ \cdot ⊠$ je $51 + 17 \cdot 33 = 51 + 561 = 612$.

3. Palindrom

Broj je *palindrom* ako ima istu vrijednost kad ga čitamo slijeva udesno i zdesna ulijevo. Na primjer, broj 12321 je palindrom. Zbroj dvaju palindroma, od kojih je jedan četveroznamenkast, a drugi troznamenkast, iznosi 2025. Koji je taj troznamenkasti palindrom?

Rezultat: 474

Rješenje. Neka je četveroznamenkasti palindrom $\overline{abba}$, a troznamenkasti palindrom $\overline{cdc}$ pri čemu su a, b, c i d znamenke. Promotrimo zapis zbrajanja tih brojeva.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & b & a \\ + & & c & d & c \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Promatrajući znamenke tisućica, može se zaključiti da znamenka a ne može biti veća od 2 jer je znamenka tisućica zbroja jednaka 2. Kad bi bilo $a = 2$, tada bi zbroj znamenaka stotica $b + c$ trebao biti 0, što je nemoguće jer $c \neq 0$. Dakle, $a = 1$ pa imamo

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & b & b & 1 \\ + & & c & d & c \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Iz znamenaka jedinica zaključujemo da je $c = 4$,

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & b & b & 1 \\ + & & 4 & d & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Dakle, zbroj znamenaka desetica je $b + d = 2$ ili $b + d = 12$.
Ako bi bilo $b + d = 2$, tada bi zbroj znamenaka stotica bio $b + 4 = 10$, tj. $b = 6$, što nije moguće.
Zaključujemo da je $b + d = 12$.

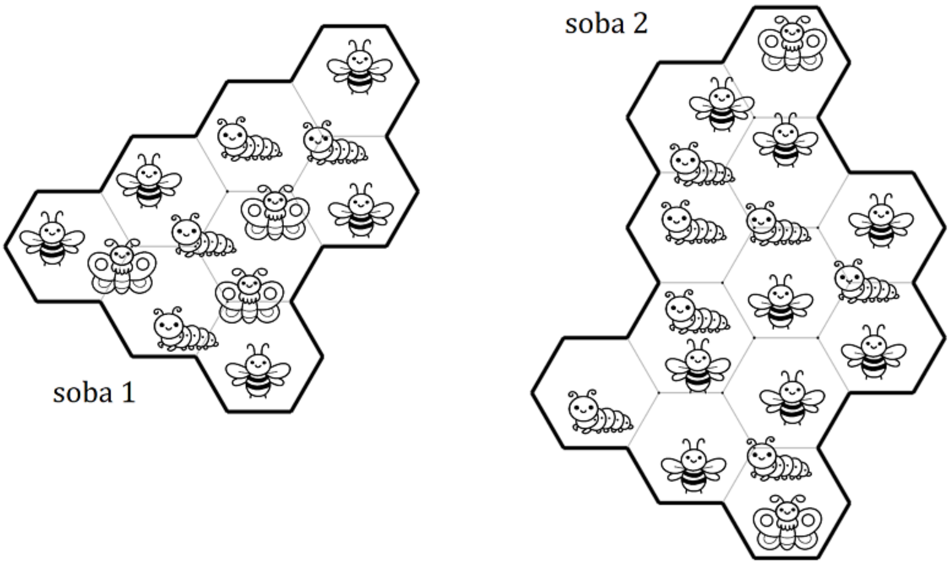
Konačno, iz znamenaka stotica zaključujemo da vrijedi $1 + b + 4 = 10$ jer $1 + b + 4 = 0$ nije moguće.
Zato mora biti $b = 5$ pa je $d = 7$.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 5 & 5 & 1 \\ + & & 4 & 7 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Traženi troznamenkasti palindrom je 474.

4. Kukci

Pčelica Maja je stigla u pansion Med i mlijeko. U pansionu su dvije sobe različitih veličina. U sobama su već smješteni drugi kukci: pčele, gusjenice i leptiri. Slike prikazuju veličine soba, a simboli unutar sobe označavaju broj pojedinih kukaca u svakoj sobi.



 = 10 pčela	 = 50 gusjenica	 = 100 leptira

Kako bi im bilo što ugodnije, kukci su se unutar svake sobe rasporedili tako da oko svakog kukca bude jednako slobodnog prostora. Pčelica Maja odlučuje otići u sobu u kojoj kukci imaju više slobodnog prostora za sebe. Koliko je kukaca u toj sobi prije dolaska pčelice Maje?

Rezultat: 630

Rješenje.

U prvoj sobi nalazi se $5 \cdot 10 = 50$ pčela, $4 \cdot 50 = 200$ gusjenica i $3 \cdot 100 = 300$ leptira,
tj. ukupno $50 + 200 + 300 = 550$ kukaca.
U drugoj sobi nalazi se $8 \cdot 10 = 80$ pčela, $7 \cdot 50 = 350$ gusjenica i $2 \cdot 100 = 200$ leptira,
tj. ukupno $80 + 350 + 200 = 630$ kukaca.

U prvoj sobi 550 kukaca smješteno je na površini od osam šesterokuta, a u drugoj sobi 650 kukaca raspoređeno je na površini od 12 šesterokuta.
Ako se ravnomjerno rasporede, u prvoj sobi bi na svakom šesterokutu bilo $550 : 8$ kukaca, a u drugoj sobi $630 : 12$ kukaca.
Kako je $550 : 8 = 68$ i ostatak 6 te $630 : 12 = 52$ i ostatak 6, manja je gužva u drugoj sobi.

Maja je odabrala sobu 2 u kojoj se već nalazilo 630 kukaca.

5. Puž i kornjača

Puž i kornjača krenuli su istovremeno jedno prema drugome. Puž se kreće stalno jednakom brzinom prelazeći 6 metara za 15 minuta. Kornjača se kreće stalno jednakom brzinom prelazeći za 5 minuta dvostruko veću udaljenost nego puž za 10 minuta. Nakon 9 minuta još uvijek se nisu susreli, a međusobno su udaljeni onoliko koliko iznosi trećina njihove početne udaljenosti. Koliko su decimetara puž i kornjača bili udaljeni na početku?

Rezultat: 270

Prvo rješenje. Puž u 15 minuta prijeđe 60 dm pa u 5 minuta prijeđe 20 dm, u jednoj minuti 4 dm, a u 10 minuta 40 dm. Kornjača u 5 minuta prijeđe dvostruko veću udaljenost od puža u 10 minuta, tj. 80 dm, a u jednoj minuti 16 dm. Nakon 9 minuta puž je prešao 36 dm, a kornjača 144 dm.

Ukupno su prešli 180 dm, što je dvije trećine njihove početne udaljenosti. Jedna trećina početne udaljenosti je 90 dm, pa je početna udaljenost 270 dm.

Puž i kornjača su na početku bili udaljeni 270 dm.

Drugo rješenje. Puž u 15 minuta prijeđe 6 m, a u 5 minuta 2 m. Kornjača u 5 minuta prijeđe dvostruko više od $2 \cdot 2 = 4$ m, to jest 8 metara. Puž i kornjača ukupno u 5 minuta prijeđu $2 + 8 = 10$ metara. U jednoj minuti oni prijeđu $10 : 5 = 2$ metra. U 9 minuta prijeći će ukupno $9 \cdot 2 = 18$ metara.

Nakon 9 minuta udaljeni su upola manje nego što je ukupni put koji su prešli, pa je preostala udaljenost 9 metara. Ukupna udaljenost na početku bila je $18 + 9 = 27$ metara odnosno 270 dm.

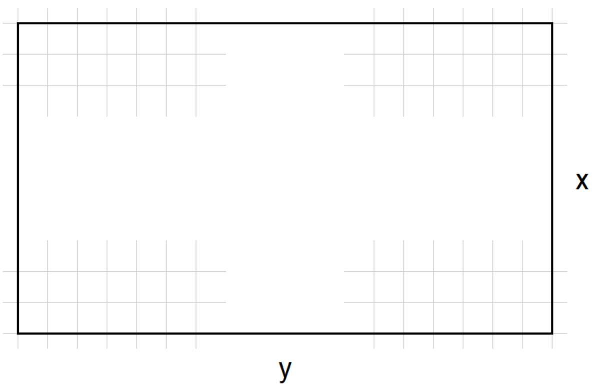
Puž i kornjača su na početku bili udaljeni 270 dm.

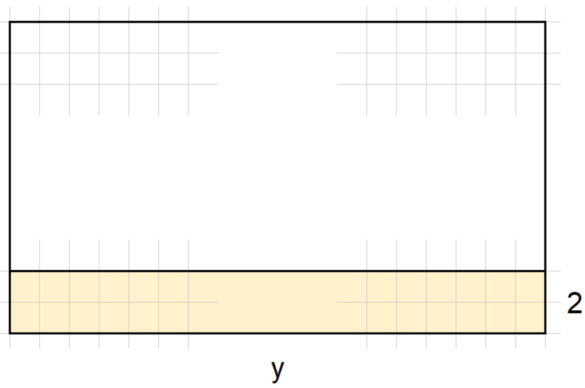
6. Površina pravokutnika

U kvadratnoj mreži ucrtan je pravokutnik.
Ako se duljina kraće stranice tog pravokutnika umanji za 2, površina mu se smanji za 84.
Ako se duljina dulje stranice danog pravokutnika uveća za 3, površina mu se poveća za 51.
Kolika je površina ucrtanog pravokutnika?

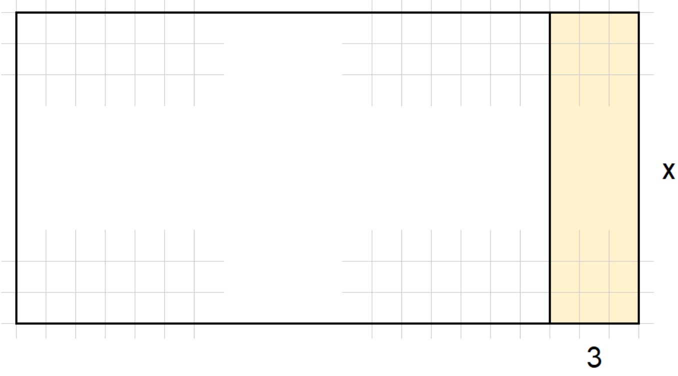
Rezultat: 714

Rješenje. Neka su duljine susjednih stranica pravokutnika x i y, pri čemu je $x < y$.





Ako se duljina kraće stranice x umanji za 2, površina pravokutnika se smanji za 84
pa je $2 \cdot y = 84$ i $y = 42$.



Ako se duljina dulje stranice y uveća za 3, površina mu se poveća za 51 pa je $3 \cdot x = 51$ i $x = 17$.

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

7. Kvadratna tablica

U tablicu s 45 redaka i 45 stupaca Sergej je upisao sve prirodne brojeve od 1 do 2025. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje.

Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u označena polja (vidi sliku).

U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena:
Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	⋱				⋰		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		⋰				⋱		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

Drugo rješenje.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

$$1980 \quad 1807 \quad 1808 \quad 1809 \quad \ldots \quad 1849 \quad 1850.$$

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.
Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

8. Akvarij

U akvariju se nalaze samo ribice narančaste, zelene, plave i crne boje. Ako 93 ribice nisu narančaste boje, 101 ribica nije zelene boje, 69 ribica nije plave boje, a 88 ribica nije crne boje, koliko je ukupno ribica u akvariju?

Rezultat: 117

Prvo rješenje. Neka su N, Z, P i C, redom, broj narančastih, zelenih, plavih i crnih ribica i neka je U ukupan broj ribica u akvariju. Prema uvjetima zadatka, ukupan broj ribica jednak je

$$U = N + 93 = Z + 101 = P + 69 = C + 88.$$

Odatle je $N = U - 93, Z = U - 101, P = U - 69$ i $C = U - 88$.

Vrijedi $N + Z + P + C = U$, pa je $(U - 93) + (U - 101) + (U - 69) + (U - 88) = U$.

Dakle, $4U - (93 + 101 + 69 + 88) = U, 3U = 351, U = 117$.

Ukupan broj ribica u akvariju je 117.

Drugo rješenje.

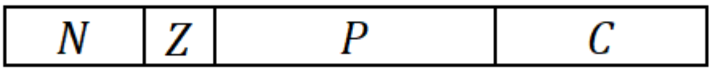
Zamislimo da imamo četiri takva akvarija s identičnim brojem narančastih, zelenih, plavih i crnih ribica te još jedan prazan akvarij.

Iz prvog akvarija u prazni akvarij premjestimo sve narančaste ribice - u prvom akvariju ostat će 93 ribice. Iz drugog akvarija u prazni akvarij premjestimo sve zelene ribice - u drugom akvariju ostat će 101 ribica. Iz trećeg akvarija u prazni akvarij premjestimo sve plave ribice - u trećem akvariju ostat će 69 ribica. Iz četvrtog akvarija u prazni akvarij premjestimo sve crne ribice - u četvrtom akvariju ostat će 88 ribica.

U ta četiri akvarija je ostala ukupno 93 + 101 + 69 + 88 = 351 ribica, a u petom akvariju je jednak broj ribica kao što je na početku bilo u svakom od četiri akvarija. Ovo znači da je trostruki broj ribica u jednom punom akvariju jednak 351. U akvariju je 351 : 3 = 117 ribica.

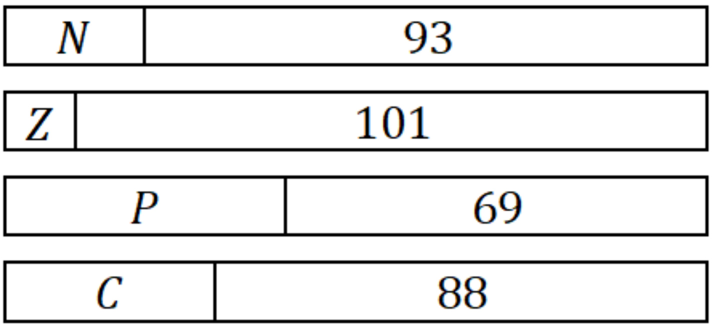
Treće rješenje.

Neka su N, Z, P i C, redom, broj narančastih, zelenih, plavih i crnih ribica.



Neka je U ukupan broj ribica u akvariju. Vrijedi $N + Z + P + C = U$.

Uvjete zadatka možemo prikazati slikama



te vidimo da vrijedi

$$(N + 93) + (Z + 101) + (P + 69) + (C + 88) = 4 \cdot U$$
$$(N + Z + P + C) + (93 + 101 + 69 + 88) = 4 \cdot U$$
$$U + 351 = 4 \cdot U$$

Zaključujemo da je ukupan broj ribica u tri takva akvariju za 351. Konačno, $U = 351 : 3 = 117$.

Ukupan broj ribica u akvariju je 117.

9. Manji od 500

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje. Odredit ćemo najprije broj troznamenkastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500. Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.

Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$. Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.
Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$.
Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500$$
$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9,	8, 8, 8,	7, 9, 9	8, 8, 9,	8, 9, 9,	9, 9, 9

Lako provjerimo da takvih brojeva ima redom

6	1	3	3	3	1

to jest, ukupno 17.
Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenkastih brojeva: $900 - 17 = 883$.

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

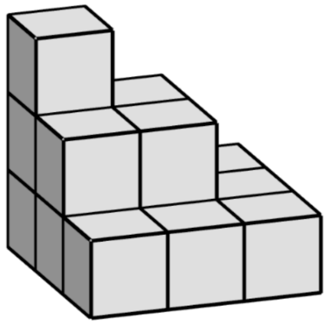
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	**broj brojeva**
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
	9	od 0 do 6	7
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena. Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

10. Kockice



Tijelo izgrađeno od velikog broja jednakih kockica čije strane imaju površinu 1 sastoji se od 15 slojeva. U najnižem sloju nalazi se 225 kockica raspoređenih u 15 redaka i 15 stupaca. U sloju iznad njega kockice su raspoređene u 14 redaka i 14 stupaca.
U svakom je sljedećem sloju broj redaka i broj stupaca za jedan manji. U najvišem sloju nalazi se jedna kockica. Na slici su prikazana samo gornja tri sloja tog tijela. Kolika je ukupna površina svih strana tog tijela?

Rezultat: 930

Rješenje.

Dno tog tijela je strana čija je površina jednaka $15 \cdot 15 = 225$.
Površina svake bočne strane je jednaka i iznosi $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$,
a površina svih četiriju bočnih strana $4 \cdot 120 = 480$
Površina svih preostalih (gornjih) strana jednaka je površini dna, dakle 225.
Ukupna površina svih strana tog tijela je $225 + 480 + 225 = 930$.