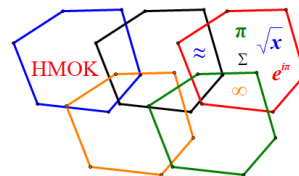


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 22. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Odredi sve šestoroznamenaste prirodne brojeve $\overline{abcde1}$ koji su djeljivi brojem $\overline{1abcde}$.

Prvo rješenje.

Neka je k prirodan broj takav da vrijedi

$$\overline{abcde1} = k \cdot \overline{1abcde}.$$

Kako je $\overline{abcde1}$ šestoroznamenast, k ne može biti veći od 9.

Broj $\overline{abcde1}$ je neparan jer završava znamenkom 1, pa i k mora biti neparan.

Također, $k \neq 5$ jer umnožak $\overline{abcde1}$ ne završava s 0 ili 5.

Dakle, treba provjeriti samo slučajeve iz skupa $\{1, 3, 7, 9\}$.

- $k = 1$:

$$\overline{abcde1} = 1 \cdot \overline{1abcde}, \text{ odnosno } \overline{abcde1} = \overline{1abcde}.$$

Odavde slijedi $1 = a = b = c = d = e$, pa je traženi broj 111 111.

- $k = 3$:

$$\overline{abcde1} = 3 \cdot \overline{1abcde}.$$

To je moguće jedino ako je $e = 7$. Tada je $\overline{abcd71} = 3 \cdot \overline{1abcd7}$.

To je moguće jedino ako je $d = 5$. Tada je $\overline{abc571} = 3 \cdot \overline{1abc57}$.

To je moguće jedino ako je $c = 8$. Tada je $\overline{ab8571} = 3 \cdot \overline{1ab857}$.

To je moguće jedino ako je $b = 2$. Tada je $\overline{a28571} = 3 \cdot \overline{1a2857}$.

Slijedi $a = 4$, odnosno $428\,571 = 3 \cdot 142\,857$.

- $k = 7$:

$$\overline{abcde1} = 7 \cdot \overline{1abcde}$$

Znamenka a mora biti iz skupa $\{7, 8, 9\}$.

Tada je umnožak $7 \cdot \overline{1abcde} \geq 7 \cdot \overline{17bcde}$, a to je sedmeroznamenast broj, pa nema rješenja.

- $k = 9$:

$$\overline{abcde1} = 9 \cdot \overline{1abcde}$$

Znamenka a mora biti 9, no tada je umnožak $9 \cdot \overline{19bcde}$ sedmeroznamenast, pa nema rješenja.

Rješenja su brojevi 111 111 i 428 571.

Drugo rješenje.

Budući da pet znamenaka ne mijenja poredak, možemo zapisati da je $x = \overline{abcde}$.

Iz uvjeta zadatka vrijedi $10x + 1 = k \cdot (100000 + x)$ za prirodni broj $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ($k < 10$ jer bi u protivnom umnožak bio najmanje sedmeroznamenkast broj).

Slijedi:

$$10x + 1 = 100000k + kx$$

$$10x - kx = 100000k - 1$$

$$(10 - k)x = 100000k - 1$$

Sada možemo redom uvrstiti sve moguće brojeve k te riješiti jednadžbu u svakom od mogućih slučajeva:

k	jednadžba	postupak	rješenje
1	$9x = 99\,999$	$x = 99\,999 : 9$	$x = 11\,111$
2	$8x = 199\,999$	$x = 199\,999 : 8$	nije djeljivo
3	$7x = 299\,999$	$x = 299\,999 : 7$	$x = 42\,857$
4	$6x = 399\,999$	$x = 399\,999 : 6$	nije djeljivo
5	$5x = 499\,999$	$x = 499\,999 : 5$	nije djeljivo
6	$4x = 599\,999$	$x = 599\,999 : 4$	nije djeljivo
7	$3x = 699\,999$	$x = 699\,999 : 3$	$x = 233\,333$, ali to nije peteroznamenkasti broj
8	$2x = 799\,999$	$x = 799\,999 : 2$	nije djeljivo
9	$x = 899\,999$	$x = 899\,999 : 1$	$x = 899\,999$, ali to nije peteroznamenkasti broj

Samo za $k = 1$ i $k = 3$ dobivamo odgovarajuća rješenja, $x = 11\,111$ i $x = 42\,857$.

Traženi šesteroznamenkasti brojevi su $111\,111$ i $428\,571$.

2. Neka je $ABCD$ paralelogram u kojem je $|\sphericalangle BAD| = 50^\circ$. Nad stranicom $\overline{AB}$ nacrtan je prema van jednakostranični trokut BAE , a nad stranicom $\overline{AD}$, također prema van, romb $ADFG$ u kojem je $|\sphericalangle FDA| = 100^\circ$. Dokaži da je $|EC| = |EG|$.

Rješenje.

Promatramo trokute ECB i EAG .

Trokut BAE je jednakostraničan, pa vrijedi

$$|EA| = |EB|.$$

U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $|AD| = |BC|$, a u rombu $ADFG$ vrijedi $|AD| = |DF| = |FG| = |AG|$. Stoga je $|AG| = |AD| = |BC|$.

U paralelogramu su kutovi uz istu stranicu suplementarni, pa vrijedi

$$|\sphericalangle CBA| = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\text{i} \quad |\sphericalangle DAG| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Budući da vrijedi

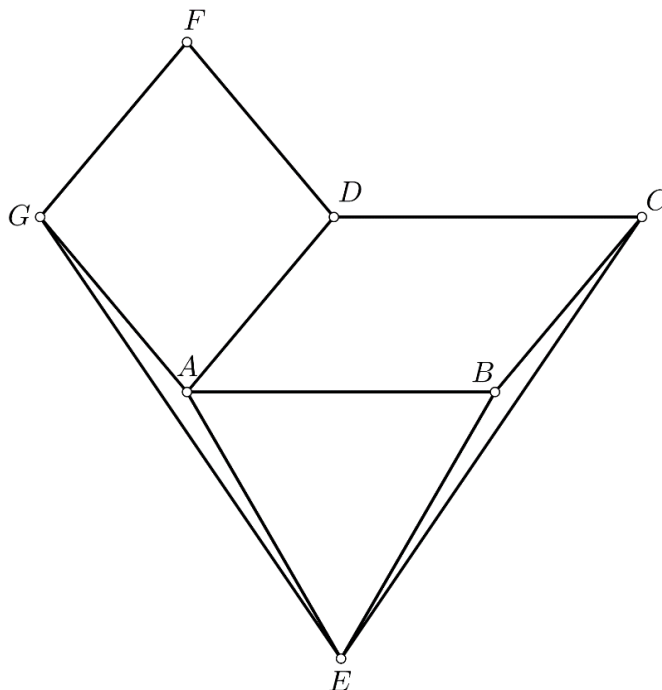
$$|\sphericalangle EAB| = 60^\circ, |\sphericalangle BAD| = 50^\circ \text{ i } |\sphericalangle DAG| = 80^\circ,$$

zaključujemo

$$|\sphericalangle GAE| = 360^\circ - 60^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 170^\circ.$$

Također, zbog $|\sphericalangle CBA| = 130^\circ$ i $|\sphericalangle ABE| = 60^\circ$, vrijedi $|\sphericalangle EBC| = 360^\circ - 130^\circ - 60^\circ = 170^\circ$.

Dakle, $|EA| = |EB|$, $|AG| = |BC|$ i $|\sphericalangle GAE| = |\sphericalangle EBC| = 170^\circ$, pa su trokuti ECB i EAG sukladni prema poučku SKS. Iz sukladnosti slijedi $|EC| = |EG|$.



3. Devet djevojčica sudjeluje na matematičkom kampu. Trebaju se smjestiti u sobe, a na raspolaganju su im jedna trokrevetna soba i tri dvokrevetne sobe – crvena, plava i zelena. Među djevojčicama su dva para sestara: sestre Božić i sestre Lovrić. Na koliko se načina djevojčice mogu rasporediti po sobama tako da sestre ne budu u različitim sobama? Bitno je samo tko je u kojoj sobi, a ne i raspored unutar soba.

Rješenje.

Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li u trokrevetnoj sobi jedan par sestara ili ne.

Prvi slučaj. Oba para sestara su raspoređene u dvokrevetne sobe.

Na tri načina možemo odabrati dvokrevetnu sobu u kojoj se nalaze sestre Božić, te na dva načina dvokrevetnu sobu u kojoj se nalaze sestre Lovrić. U treću dvokrevetnu sobu trebamo rasporediti dvije od preostalih pet djevojčica. Prvu djevojčicu možemo odabrati na 5 načina, drugu na 4 načina, a budući da nije važan njihov poredak unutar sobe ukupno imamo $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina za odabir tog para. Sve tri preostale djevojčice raspoređene su u trokrevetnu sobu.

U ovom slučaju ima ukupno $3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$ rasporeda.

Drugi slučaj. Jedan par sestara je raspoređen u trokrevetnu sobu.

Na dva načina možemo odabrati koji par sestara (Božić ili Lovrić) je raspoređen u trokrevetnu sobu, a na tri načina možemo odabrati u koju dvokrevetnu sobu je raspoređen drugi par sestara.

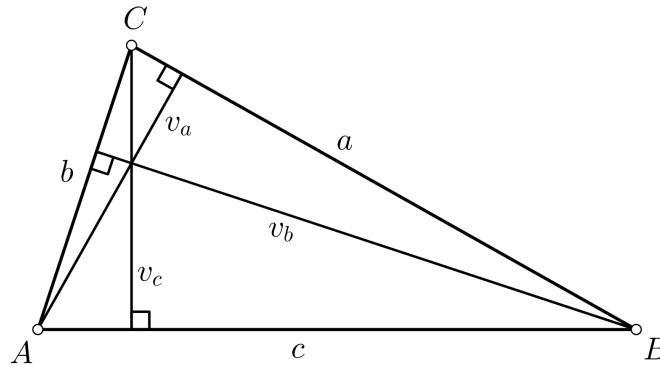
Od preostalih pet djevojčica na pet načina možemo odabrati djevojčicu koja će biti u trokrevetnoj sobi sa sestrama. Još moramo prebrojati na koliko načina možemo rasporediti četiri djevojčice u dvije dvokrevetne sobe. Za jednu od te dvije dvokrevetne sobe imamo $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina odabrati dvije djevojčice (slično kao u prethodnom slučaju). Preostale dvije djevojčice su raspoređene u preostalu dvokrevetnu sobu.

U ovom slučaju ima ukupno $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 180$ rasporeda.

Ukupan broj rasporeda je $60 + 180 = 240$.

4. Neka su duljine dviju visina nekog trokuta 6 i 12. Dokaži da je duljina treće visine tog trokuta veća od 4.

Rješenje.



Neka su a , b i c , duljine stranica zadanog trokuta, a v_a , v_b i v_c odgovarajuće visine na te stranice.

Za površinu P zadanog trokuta vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Tada je

$$a = \frac{2P}{v_a}, \quad b = \frac{2P}{v_b}, \quad c = \frac{2P}{v_c}.$$

Neka je $v_a = 6$ i $v_b = 12$.

Onda je

$$a = \frac{2P}{6} = \frac{P}{3}, \quad b = \frac{2P}{12} = \frac{P}{6}.$$

U svakom trokutu je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine treće stranice (nejednakost trokuta).

Vrijedi $a + b > c$, odnosno

$$\frac{P}{3} + \frac{P}{6} > \frac{2P}{v_c}.$$

Slijedi:

$$\frac{2P}{6} + \frac{P}{6} > \frac{2P}{v_c}$$

$$\frac{3P}{6} > \frac{2P}{v_c}$$

$$\frac{P}{2} > \frac{2P}{v_c}$$

$$\frac{P \cdot v_c}{2v_c} > \frac{4P}{2v_c}$$

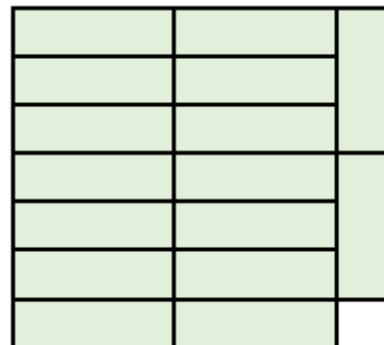
Nazivnik $2v_c$ je pozitivan broj, pa stoga mora vrijediti $P \cdot v_c > 4P$.

Budući da je površina P također pozitivan broj, slijedi $v_c > 4$.

5. Na ploču dimenzija 7×7 Luka postavlja *brod*, figuru dimenzija 3×1 , tako da prekriva tri uzastopna polja nekog retka ili stupca. Mia ne zna na koja je polja Luka postavio brod te odabire jedno po jedno polje pokušavajući pogoditi neko od polja na kojima se brod nalazi. Koliki je minimalni broj pokušaja potreban da Mia sa sigurnošću pogodi barem jedno polje na kojem se nalazi brod?

Rješenje.

Pokažimo da Mia ne može odabrati 15 polja na ploči tako da bude sigurna da će Lukin brod pokrivati jedno od tih 15 polja. Na slici je prikazano 16 pozicija brodova koji se ne preklapaju. Kako god Mia odabrala 15 polja na ploči, najviše 15 od 16 brodova na slici će pokrivati jedno od 15 polja koja je Mia odabrala. To znači da bi se moglo dogoditi da je Luka postavio brod na poziciju koja ne sadrži nijedno od 15 polja koja je Mia odabrala. Dakle, Mia ne može biti sigurna da će u 15 pokušaja pogoditi polje na kojem je brod.



1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

Pokazat ćemo da Mia može (unaprijed) odabrati 16 polja tako da, kako god Luka postavio brod, jedno od tih 16 polja bude pokriveno brodom.

Obojimo ploču u tri boje (označene 1, 2, 3) kao na slici. Na ploči je ukupno 17 polja s oznakom 1 i po 16 polja s oznakama 2 i 3.

Primijetimo da brod, bez obzira na kojem se mjestu nalazi, prekriva po jedno polje svake boje. Posebno, kako god Luka postavio brod, taj brod će pokrivati jedno polje s oznakom 2.

Ako Mia odabire redom polja s oznakom 2, sigurno će pogoditi polje na kojoj se nalazi brod. Dakle, sigurno će pogoditi polje na kojoj se nalazi brod u najviše 16 pokušaja.

Napomena.

U drugom dijelu rješenja dovoljno je uočiti 16 polja označenih kao na slici te obrazložiti zašto u bilo kojem položaju brod sadrži jedno od označenih polja.

