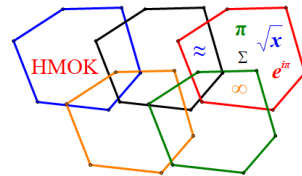


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 22. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Dana su tri lista papira oblika pravokutnika dimenzija 12×18 , 10×15 i 7×13 . Magdalena želi tim listovima u potpunosti prekriti veći papir oblika kvadrata, pri čemu se pravokutnici mogu djelomično preklapati, ali ne smiju prelaziti rub kvadrata. Koliko može iznositi površina prekrivena svim trima pravokutnicima?

Rješenje.

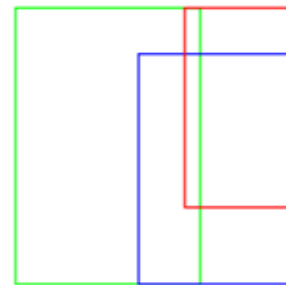
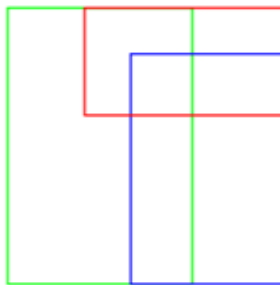
Na raspolaganju imamo tri papira dimenzija 12×18 (zeleni), 10×15 (plavi) i 7×13 (crveni). Duljinu kraće stranice svako papira zvat ćemo *širina*, a duljinu druge stranice *duljina* papira.

Papire treba posložiti tako da pokriju sva četiri vrha nekog kvadrata. Najdulja od svih stranica danih papira je duljine 18. Kvadrat s duljinom stranice većom od 18 ne bismo mogli prekriti jer bi u tom slučaju svaki od tri papira mogao prekriti samo jedan vrh kvadrata, a kvadrat ima četiri vrha.

Kvadrat s duljinom stranice manjom od 18 ne možemo pokriti danim pravokutnicima tako da zeleni pravokutnik (dimenzija 12×18) ne prelazi rub kvadrata.

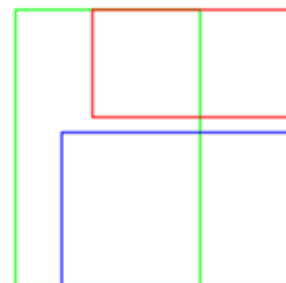
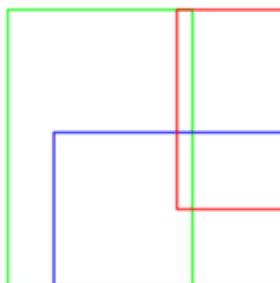
Provjerimo još može li se kvadrat stranice duljine 18 prekriti danim papirima.

Zeleni papir dimenzija 12×18 prekriva dva vrha kvadrata, a svaki od drugih dvaju papira po jedan od preostalih vrhova. Svaki od ta dva papira možemo okrenuti na dva različita načina, pa postoje četiri mogućnosti prikazane na slikama.



Provjerimo da papiri raspoređeni kao na prvoj slici prekrivaju cijeli kvadrat.

Dio kvadrata koji nije prekriven zelenim papirom je dimenzija 6×18 . Širina plavog papira, kao i duljina crvenog papira veće su od 6, što znači da se oba papira djelomično preklapaju sa zelenim papirom.



Zbroj širine crvenog papira i duljine plavog papira iznosi $7 + 15 = 22$ i veći je od 18. Zato se i crveni i plavi papir djelomično preklapaju, što znači da je cijeli kvadrat prekriven s dana tri papira.

Tražena površina iznosi $18^2 = 324$.

Napomena. Papiri raspoređeni kao na četvrtoj slici ne prekrivaju cijeli kvadrat jer je zbroj širina crvenog i plavog papira $10 + 7 = 17$ manji od duljine stranice kvadrata.

2. Razrednica je najavila da će na kraju školske godine nagraditi učenike – oni koji završe razred s odličnim uspjehom dobit će po dvije čokolade, oni koji je završe s vrlo dobrim uspjehom dobit će po polovinu čokolade, a oni koji završe s dobrim uspjehom po trećinu čokolade. U razredu je ukupno 27 učenika, a na kraju školske godine nitko nije imao dovoljan niti nedovoljan uspjeh. Kako bi ispunila najavljeno, razrednici je trebalo točno 13 čokolada. Koliko je učenika završilo školsku godinu s odličnim, koliko s vrlo dobrim, a koliko s dobrim uspjehom?

Prvo rješenje.

Čokolade treba dijeliti na polovine i trećine pa zamislimo da je svaka čokolada podijeljena na 6 jednakih komadića. Ukupno je $13 \cdot 6 = 78$ komadića čokolade. Odlični učenici dobit će po 12, vrlo dobri po 3, a dobri po 2 komadića.

Uočimo da će svaki učenik dobiti najmanje dva komadića. Nakon što svaki učenik dobije po dva komadića, ostat će još $78 - 27 \cdot 2 = 24$ komadića čokolade. Njih će podijeliti vrlo dobri i odlični učenici. Vrlo dobri učenici će dobiti još po jedan, a odlični još po 10 komadića. Broj preostalih komadića je 24, pa mogu biti najviše dva odlična učenika.

1. slučaj: Dvoje odličnih učenika dobit će još 20 komadića čokolade, a preostala 4 komadića podijelit će četiri vrlo dobra učenika. U ovom su slučaju u razredu dva odlična učenika, četiri vrlo dobra učenika i $27 - (2 + 4) = 21$ dobar učenik.

2. slučaj: Jedan odličan učenik dobit će još 10 komadića, a preostalih 14 komadića podijelit će 14 vrlo dobrih učenika. U ovom su slučaju u razredu: jedan odličan učenik, 14 vrlo dobrih učenika i $27 - (1 + 14) = 12$ dobrih učenika.

3. slučaj: Nema odličnih učenika, a 24 komadića podijelit će 24 vrlo dobra učenika.

U ovom slučaju u razredu su 24 vrlo dobra učenika i $27 - 24 = 3$ dobra učenika.

Drugo rješenje.

Svaki vrlo dobar učenik dobit će polovinu čokolade. Kada bi broj vrlo dobrih učenika bio neparan, preostala bi jedna polovina čokolade koju ne bi mogli u potpunosti iskoristiti dobri učenici (tako da, nakon podjele, ne ostane čokolade). Zaključujemo da je broj vrlo dobrih učenika paran

To znači da su svi vrlo dobri učenici zajedno dobili određeni broj cijelih čokolada, a isto vrijedi i za odlične učenike. Zato i dobri učenici dijele određeni broj cijelih čokolada pa broj učenika s dobrim uspjehom mora biti višekratnik broja 3.

Svaki odličan učenik dobio je dvije čokolade. Budući da razrednica planira podijeliti ukupno 13 čokolada, barem su jednu čokoladu podijelili vrlo dobri i dobri učenici, a u razredu može biti najviše 6 odličnih učenika.

Zaključujemo da će u razredu biti najmanje $27 - 6 = 21$ vrlo dobar ili dobar učenik. Za njih je potrebno barem $21 : 3 = 7$ čokolada (ako su svi dobri, onda točno 7, a ako su neki vrlo dobri, onda treba i više od 7 čokolada). To znači da odlični učenici mogu dobiti najviše $13 - 7 = 6$ čokolada, pa broj odličnih učenika nije veći od 3.

U razredu je najmanje $27 - 3 = 24$ vrlo dobrih i dobrih učenika, pa je za njih potrebno barem $24 : 3 = 8$ čokolada. To znači da odlični učenici mogu dobiti najviše $13 - 8 = 5$ čokolada, što znači da su u razredu najviše dva odlična učenika.

Promotrimo mogući broj učenika, ovisno o broju odličnih učenika u razredu, vodeći računa o tome da je broj vrlo dobrih učenika paran broj, broj dobrih učenika višekratnik broja 3, te da broj odličnih učenika nije veći od 3.

a) Ako su u razredu tri odlična učenika, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 3 = 24$. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 6 = 7$ čokolada. To nije dovoljno da svatko od njih dobije barem trećinu čokolade. Dakle, ovaj slučaj nije moguć.

b) Ako su u razredu dva odlična učenika, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 2 = 25$. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 4 = 9$ čokolada. Najviše 9 čokolada mogu podijeliti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 18.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
18 učenika	9 čokolada	7 učenika	nemoguće	
16 učenika	8 čokolada	9 učenika	3 čokolade	15 čokolada
14 učenika	7 čokolada	11 učenika	nemoguće	
12 učenika	6 čokolada	13 učenika	nemoguće	
10 učenika	5 čokolada	15 učenika	5 čokolada	14 čokolada
8 učenika	4 čokolade	17 učenika	nemoguće	
6 učenika	3 čokolade	19 učenika	nemoguće	
4 učenika	2 čokolade	21 učenik	7 čokolada	13 čokolada
2 učenika	1 čokolada	23 učenika	nemoguće	
0 učenika	0 čokolada	25 učenika	nemoguće	

Jedno je rješenje da su u razredu 2 odlična učenika, 4 vrlo dobra učenika i 21 dobar učenik.

c) Ako je u razredu jedan odličan učenik, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 1 = 26$. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 2 = 11$ čokolada. Najviše 11 čokolada mogu dobiti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 22.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
22 učenika	11 čokolada	4 učenika	nemoguće	
20 učenika	10 čokolada	6 učenika	2 čokolade	14 čokolada
18 učenika	9 čokolada	8 učenika	nemoguće	
16 učenika	8 čokolada	10 učenika	nemoguće	
14 učenika	7 čokolada	12 učenika	4 čokolade	13 čokolada
12 učenika	6 čokolada	14 učenika	nemoguće	

Ako je broj vrlo dobrih učenika manji od 12, smanjit će se ukupan broj čokolada, pa u ovom slučaju nema drugih rješenja. U razredu je jedan odličan učenik, 14 vrlo dobrih i 12 dobrih.

d) Ako u razredu nema odličnih učenika, tada 27 vrlo dobrih i dobrih učenika imaju 13 čokolada. Najviše 12 čokolada mogu dobiti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 24.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
24 učenika	12 čokolada	3 učenika	1 čokolada	13 čokolada
22 učenika	11 čokolada	5 učenika	nemoguće	
20 učenika	10 čokolada	7 učenika	nemoguće	
18 učenika	9 čokolada	9 učenika	3 čokolade	12 čokolada

Ako se broj vrlo dobrih učenika još smanji, smanjit će se ukupan broj čokolada i neće biti drugih rješenja. U ovom slučaju, u razredu su 24 vrlo dobra i 3 dobra učenika.

Treće rješenje.

Kao u prethodnom rješenju zaključimo da je broj odličnih učenika najviše 2, te da je broj vrlo dobrih učenika paran broj, a broj dobrih učenika višekratnik broja 3.

Neka je k broj čokolada koje su podijelili vrlo dobri učenici. Tada je $2k$ broj vrlo dobrih učenika.

Promatramo slučajeve ovisno o broju odličnih učenika u razredu.

a) Ako su u razredu dva odlična učenika, onda je broj dobrih učenika $27 - 2 - 2k = 25 - 2k$.

Broj čokolada koje dijele dobri učenici je $13 - 4 - k = 9 - k$.

Mora vrijediti $25 - 2k = 3 \cdot (9 - k)$. Slijedi

$$25 - 2k = 3 \cdot (9 - k)$$

$$25 - 2k = 27 - 3k$$

$$3k - 2k = 27 - 25$$

$$k = 2.$$

Dakle, u ovom slučaju su 2 odlična učenika, 4 vrlo dobra učenika i 21 dobar učenik.

b) Ako je u razredu 1 odličan učenik, onda je broj dobrih učenika $27 - 1 - 2k = 26 - 2k$.

Broj čokolada koje dijele dobri učenici je $13 - 2 - k = 11 - k$.

Mora vrijediti $26 - 2k = 3 \cdot (11 - k)$. Slijedi

$$26 - 2k = 3 \cdot (11 - k)$$

$$26 - 2k = 33 - 3k$$

$$3k - 2k = 33 - 26$$

$$k = 7.$$

Dakle, u ovom slučaju je 1 odličan učenik, 14 vrlo dobrih učenika i 12 dobrih učenika.

c) Ako u razredu nema odličnih učenika, onda je broj dobrih učenika $27 - 2k$.

Broj čokolada koje dijele dobri učenici je $13 - k$.

Mora vrijediti $27 - 2k = 3 \cdot (13 - k)$. Slijedi

$$27 - 2k = 3 \cdot (13 - k)$$

$$27 - 2k = 39 - 3k$$

$$3k - 2k = 39 - 27$$

$$k = 12.$$

Dakle, u ovom slučaju su 24 vrlo dobra učenika i 3 dobra učenika.

3. Za četveroznamenkasti broj kažemo da je palindrom ako mu je znamenka tisućica jednaka znamenki jedinica, a znamenka stotica jednaka znamenki desetica.

- Dokaži da je svaki četveroznamenkasti palindrom djeljiv s 11.
- Odredi sve četveroznamenkaste palindrome koji su djeljivi sa 121.

Rješenje.

a) Četveroznamenkasti palindrom zapisujemo pozicijskim zapisom ovako:

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b, \text{ uz uvjet } a \neq 0.$$

Brojevi 1001 i 110 djeljivi su s 11 pa se primjenom svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju izraz može zapisati kao $\overline{abba} = 11 \cdot (91a + 10b)$.

Time smo dokazali da su svi takvi brojevi djeljivi s 11.

b) U prvom dijelu zadatka smo pokazali da je broj $\overline{abba} = 11 \cdot (91a + 10b)$ djeljiv s 11.

Da bi broj $\overline{abba}$ bio djeljiv sa 121, faktor $(91a + 10b)$ mora biti djeljiv s 11.

Prikazat ćemo ovaj zbroj na drugačiji način:

$$91a + 10b = 88a + 11b + 3a - b = 11(8a + b) + (3a - b)$$

Budući su a i b znamenke i $a \neq 0$ vrijedi $3a - b \leq 27$ pa postoje tri različite mogućnosti.

Prvi slučaj

Ako je $3a - b = 0$ onda je $11(8a + b) + (3a - b) = 11(8a + b)$, pa je broj $\overline{abba} = 11 \cdot (91a + 10b)$ djeljiv s $11 \cdot 11 = 121$. Vrijedi $3 \cdot 1 - 3 = 3 \cdot 2 - 6 = 3 \cdot 4 - 9 = 0$ i to su jedine mogućnosti za znamenke a i b .

Drugi slučaj

Ako je $3a - b = 11$ onda je $11(8a + b) + (3a - b) = 11(8a + b) + 11 = 11(8a + b + 1)$, pa je broj $\overline{abba}$ djeljiv sa 121. Vrijedi $3 \cdot 4 - 1 = 3 \cdot 5 - 4 = 3 \cdot 6 - 7 = 11$ i drugih mogućnosti nema.

Treći slučaj

Ako je $3a - b = 22$ onda je $11(8a + b) + (3a - b) = 11(8a + b) + 22 = 11(8a + b + 2)$, pa je broj $\overline{abba}$ djeljiv sa 121. Vrijedi $3 \cdot 8 - 2 = 3 \cdot 9 - 5 = 22$ i drugih mogućnosti nema.

Jedini brojevi s traženim svojstvom su 1331, 2662, 3993, 4114, 5445, 6776, 8228, 9559.

Napomena: Zbog preglednosti sve dobivene mogućnosti zapisujemo u tablici.

$3a - b$	a	b	$\overline{abba}$
0	1	3	1331
0	2	6	2662
0	3	9	3993
11	4	1	4114
11	5	4	5445
11	6	7	6776
22	8	2	8228
22	9	5	9559

4. Devet djevojčica sudjeluje na matematičkom kampu. Trebaju se smjestiti u sobe, a na raspolaganju su im jedna trokrevetna soba i tri dvokrevetne sobe – crvena, plava i zelena. Među djevojčicama su dva para sestara: sestre Božić i sestre Lovrić. Na koliko se načina djevojčice mogu rasporediti po sobama tako da sestre ne budu u različitim sobama? Bitno je samo tko je u kojoj sobi, a ne i raspored unutar soba.

Rješenje.

Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li u trokrevetnoj sobi jedan par sestara ili ne.

Prvi slučaj. Oba para sestara su raspoređene u dvokrevetne sobe.

Na tri načina možemo odabrati dvokrevetnu sobu u kojoj se nalaze sestre Božić, te na dva načina dvokrevetnu sobu u kojoj se nalaze sestre Lovrić. U treću dvokrevetnu sobu trebamo rasporediti dvije od preostalih pet djevojčica. Prvu djevojčicu možemo odabrati na 5 načina, drugu na 4 načina, a budući da nije važan njihov poredak unutar sobe ukupno imamo $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina za odabir tog para. Sve tri preostale djevojčice raspoređene su u trokrevetnu sobu.

U ovom slučaju ima ukupno $3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$ rasporeda.

Drugi slučaj. Jedan par sestara je raspoređen u trokrevetnu sobu.

Na dva načina možemo odabrati koji par sestara (Božić ili Lovrić) je raspoređen u trokrevetnu sobu, a na tri načina možemo odabrati u koju dvokrevetnu sobu je raspoređen drugi par sestara.

Od preostalih pet djevojčica na pet načina možemo odabrati djevojčicu koja će biti u trokrevetnoj sobi sa sestrama. Još moramo prebrojati na koliko načina možemo rasporediti četiri djevojčice u dvije dvokrevetne sobe. Za jednu od te dvije dvokrevetne sobe imamo $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina odabrati dvije djevojčice (slično kao u prethodnom slučaju). Preostale dvije djevojčice su raspoređene u preostalu dvokrevetnu sobu.

U ovom slučaju ima ukupno $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 180$ rasporeda.

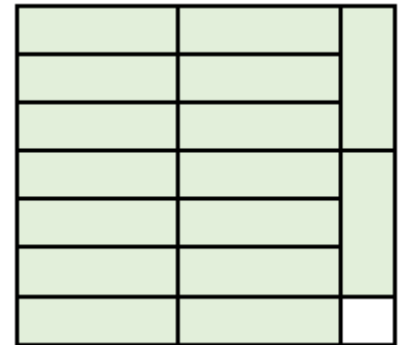
Ukupan broj rasporeda je $60 + 180 = 240$.

Napomena: U rješenjima za grupu A isti zadatak je riješen postupnije uz crteže.

5. Na ploču dimenzija 7×7 Luka postavlja *brod*, figuru dimenzija 3×1 , tako da prekriva tri uzastopna polja nekog retka ili stupca. Mia ne zna na koja je polja Luka postavio brod te odabire jedno po jedno polje pokušavajući pogoditi neko od polja na kojima se brod nalazi. Koliki je minimalni broj pokušaja potreban da Mia sa sigurnošću pogodi barem jedno polje na kojem se nalazi brod?

Rješenje.

Pokažimo da Mia ne može odabrati 15 polja na ploči tako da bude sigurna da će Lukin brod pokrivati jedno od tih 15 polja. Na slici je prikazano 16 pozicija brodova koji se ne preklapaju. Kako god Mia odabrala 15 polja na ploči, najviše 15 od 16 brodova na slici će pokrivati jedno od 15 polja koja je Mia odabrala. To znači da bi se moglo dogoditi da je Luka postavio brod na poziciju koja ne sadrži nijedno od 15 polja koja je Mia odabrala. Dakle, Mia ne može biti sigurna da će u 15 pokušaja pogoditi polje na kojem je brod.



1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

Pokazat ćemo da Mia može (unaprijed) odabrati 16 polja tako da, kako god Luka postavio brod, jedno od tih 16 polja bude pokriveno brodom.

Obojimo ploču u tri boje (označene 1, 2, 3) kao na slici. Na ploči je ukupno 17 polja s oznakom 1 i po 16 polja s oznakama 2 i 3.

Primijetimo da brod, bez obzira na kojem se mjestu nalazi, prekriva po jedno polje svake boje. Posebno, kako god Luka postavio brod, taj brod će pokrivati jedno polje s oznakom 2.

Ako Mia odabire redom polja s oznakom 2, sigurno će pogoditi polje na kojoj se nalazi brod. Dakle, sigurno će pogoditi polje na kojoj se nalazi brod u najviše 16 pokušaja.

Napomena.

U drugom dijelu rješenja dovoljno je uočiti 16 polja označenih kao na slici te obrazložiti zašto u bilo kojem položaju brod sadrži jedno od označenih polja.

