

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 22. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Koliki je najmanji mogući zbroj dvaju troznamenkastih brojeva sa svojstvom da je znamenka stotica prvog broja dvostruko veća od znamenke jedinica drugog broja, a svih šest znamenaka je različito?

Rješenje.

Neka su ta dva troznamenkasta broja $\overline{abc}$ i $\overline{def}$. Zbroj promatranih brojeva je

$$\overline{abc} + \overline{def} = (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) = 100(a + d) + 10(b + e) + (c + f).$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi $a = 2 \cdot f$. Budući da tražimo najmanji mogući zbroj, krenimo od najmanje moguće vrijednosti znamenke stotica a . Naravno, a ne može biti nula.

Promotrimo slučajeve:

- Neka je $f = 1$. Tada je $a = 2$.

Troznamenkasti brojevi su tada $\overline{2bc}$ i $\overline{de1}$, a njihov zbroj je

$$\overline{2bc} + \overline{de1} = 201 + 100d + 10(b + e) + c.$$

Kako bi zbroj bio što manji, za znamenku stotica d biramo najmanju neiskorištenu znamenku koja nije nula, tj. $d = 3$. Nadalje, za znamenke desetice, b i e , biramo najmanje neiskorištene znamenke, a to su 0 i 4. Zbroj će biti jednak bez obzira na to koja od njih je 0, a koja 4. Konačno, znamenka c je najmanja neupotrijebljena znamenka, a to je 5.

Zbroj tih brojeva je $205 + 341 = 245 + 301 = 546$.

- Neka je $f = 2$. Tada je $a = 4$.

Troznamenkasti brojevi su tada $\overline{4bc}$ i $\overline{de2}$, a njihov zbroj je

$$\overline{4bc} + \overline{de2} = 402 + 100d + 10(b + e) + c.$$

Kako bi zbroj bio što manji, za znamenku stotica d biramo najmanju neiskorištenu znamenku koja nije nula, tj. $d = 1$. Nadalje, za znamenke desetice, b i e , biramo najmanje neiskorištene znamenke, a to su 0 i 3. Zbroj će biti jednak bez obzira na to koja od njih je 0, a koja 3. Konačno, znamenka c je najmanja neupotrijebljena znamenka, a to je 5.

Zbroj tih brojeva je $435 + 102 = 405 + 132 = 537$.

- Neka je $f \geq 3$. Tada je $a \geq 6$.

U tom je slučaju $\overline{abc} > 600$ pa je i zbroj $\overline{abc} + \overline{def} > 600$. Budući da je taj zbroj veći od 537, on nije kandidat za najmanji zbroj i ne trebamo ga promatrati.

Najmanji mogući zbroj je 537.

2. Ivica je popunio tablicu sa 7 redaka i 99 stupaca. Najprije je u prvom retku zapisao sve prirodne brojeve od 101 do 199. U drugom je retku ispod svakog od tih brojeva zapisao njegov dvokratnik. Nastavio je na isti način, tj. u svakom od preostalih redaka zapisao je dvokratnike brojeva iz prethodnog retka. Koliki je zbroj svih brojeva u tako popunjenoj tablici?

Prvo rješenje.

U tablici su sljedeći umnošci:

101	102	103	...	197	198	199
$2 \cdot 101$	$2 \cdot 102$	$2 \cdot 103$	...	$2 \cdot 197$	$2 \cdot 198$	$2 \cdot 199$
$4 \cdot 101$	$4 \cdot 102$	$4 \cdot 103$	...	$4 \cdot 197$	$4 \cdot 198$	$4 \cdot 199$
$8 \cdot 101$	$8 \cdot 102$	$8 \cdot 103$	...	$8 \cdot 197$	$8 \cdot 198$	$8 \cdot 199$
$16 \cdot 101$	$16 \cdot 102$	$16 \cdot 103$	...	$16 \cdot 197$	$16 \cdot 198$	$16 \cdot 199$
$32 \cdot 101$	$32 \cdot 102$	$32 \cdot 103$	...	$32 \cdot 197$	$32 \cdot 198$	$32 \cdot 199$
$64 \cdot 101$	$64 \cdot 102$	$64 \cdot 103$	...	$64 \cdot 197$	$64 \cdot 198$	$64 \cdot 199$

Zbroj svih brojeva u prvom retku je $A = 101 + 102 + 103 + \dots + 197 + 198 + 199$.

Kako bismo odredili zbroj A , zbrojimo $A + A$ na sljedeći način:

$$A = 101 + 102 + 103 + \dots + 197 + 198 + 199$$

$$A = 199 + 198 + 197 + \dots + 103 + 102 + 101$$

$$A + A = 300 + 300 + 300 + \dots + 300 + 300 + 300$$

Uočimo da je u svakom retku 99 pribrojnika, pa je $2 \cdot A = 99 \cdot 300 = 29700$, odnosno $A = 14850$.

Zbroj svih brojeva u drugom retku tablice dvostruko je veći od zbroja svih brojeva u prvom retku, a isto vrijedi i dalje: zbroj svih brojeva u bilo kojem retku dvostruko je veći od zbroja svih brojeva u prethodnom retku. Zato je zbroj brojeva po retcima redom

$$1 \cdot 14850, 2 \cdot 14850, 4 \cdot 14850, 8 \cdot 14850, 16 \cdot 14850, 32 \cdot 14850, 64 \cdot 14850.$$

Zbroj svih brojeva u tablici je

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) \cdot 14850 = 127 \cdot 14850 = 1885950.$$

Drugo rješenje.

Promotrimo tablicu:

101	102	103	...	197	198	199
$2 \cdot 101$	$2 \cdot 102$	$2 \cdot 103$	...	$2 \cdot 197$	$2 \cdot 198$	$2 \cdot 199$
$4 \cdot 101$	$4 \cdot 102$	$4 \cdot 103$	...	$4 \cdot 197$	$4 \cdot 198$	$4 \cdot 199$
$8 \cdot 101$	$8 \cdot 102$	$8 \cdot 103$	...	$8 \cdot 197$	$8 \cdot 198$	$8 \cdot 199$
$16 \cdot 101$	$16 \cdot 102$	$16 \cdot 103$	...	$16 \cdot 197$	$16 \cdot 198$	$16 \cdot 199$
$32 \cdot 101$	$32 \cdot 102$	$32 \cdot 103$	...	$32 \cdot 197$	$32 \cdot 198$	$32 \cdot 199$
$64 \cdot 101$	$64 \cdot 102$	$64 \cdot 103$	...	$64 \cdot 197$	$64 \cdot 198$	$64 \cdot 199$

Zbroj brojeva u prvom stupcu je

$$\begin{aligned} 101 + 2 \cdot 101 + 4 \cdot 101 + 8 \cdot 101 + 16 \cdot 101 + 32 \cdot 101 + 64 \cdot 101 &= \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) \cdot 101 = 127 \cdot 101. \end{aligned}$$

Na isti način određujemo zbroj brojeva u ostalim stupcima. Zbroj brojeva u svakom stupcu je jednak je umnošku broja 127 i prvog broja u tom stupcu.

Stoga je zbroj svih brojeva u tablici

$$\begin{aligned} 127 \cdot 101 + 127 \cdot 102 + 127 \cdot 103 + \dots + 127 \cdot 197 + 127 \cdot 198 + 127 \cdot 199 &= \\ &= 127 \cdot (101 + 102 + 103 + \dots + 197 + 198 + 199) = 127 \cdot A, \end{aligned}$$

gdje je A zbroj brojeva u zagradi, tj. $A = 101 + 102 + \dots + 197 + 198 + 199$.

Zbroj A možemo odrediti kao u prvom rješenju, te dobijemo $A = 99 \cdot (101 + 199) : 2 = 14850$.

Konačno, zbroj svih brojeva u tablici je $127 \cdot A = 127 \cdot 14850 = 1885950$.

Napomena:

Zbroj A možemo odrediti i ovako:

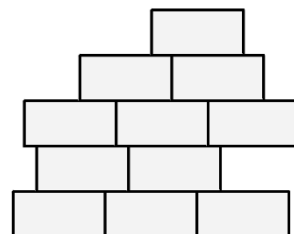
$$\begin{aligned} A &= (100 + 1) + (100 + 2) + \dots + (100 + 99) \\ A &= 99 \cdot 100 + (1 + 2 + \dots + 99) \\ A &= 99 \cdot 100 + 99 \cdot 100 : 2 \\ A &= 9900 + 4950 \\ A &= 14850 \end{aligned}$$

ili ovako:

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2 + \dots + 199) - (1 + 2 + \dots + 100) \\ A &= 199 \cdot 200 : 2 - 100 \cdot 101 : 2 \\ A &= 19900 - 5050 \\ A &= 14850 \end{aligned}$$

U oba slučaja koristili smo formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva.

3. Lik na slici sastavljen je od 11 jednakih pravokutnika takvih da je trostruka duljina jedne stranice jednaka dvostrukoj duljini druge stranice. Opseg lika je 308. Kolika je površina tog lika?



Rješenje.

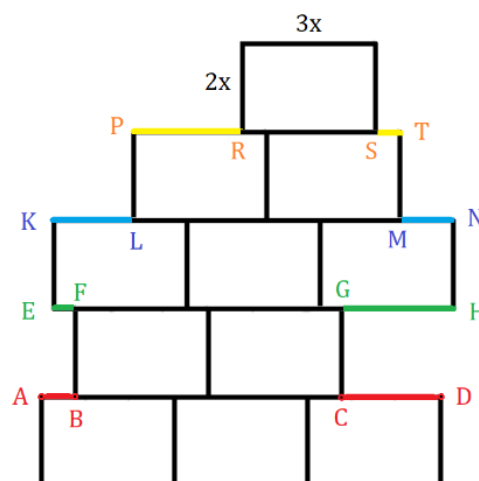
Neka su a i b duljine susjednih stranica pravokutnika, pri čemu je $a < b$.

Budući da je trostruka duljina jedne stranice jednaka je dvostrukoj duljini druge stranice, $3 \cdot a = 2 \cdot b$, kraću stranicu možemo podijeliti na dva, a dulju na tri jednaka dijela. Neka je duljina svakog takvog dijela x .

Kako bismo odredili opseg lika, trebamo odrediti zbroj duljina svih dužina koje taj lik omeđuju.

Lik omeđuju (vidi sliku):

- deset vertikalnih dužina čija je duljina a
- četiri horizontalne dužine čija je duljina b
- crveni dio ruba lika duljine
 $|AB| + |CD| = |AD| - |BC| = 3b - 2b = b$
- zeleni dio ruba lika duljine
 $|EF| + |GH| = |EH| - |FG| = 3b - 2b = b$
- plavi dio ruba lika duljine
 $|KL| + |MN| = |KN| - |LM| = 3b - 2b = b$
- žuti dio ruba lika duljine
 $|PR| + |ST| = |PT| - |RS| = 2b - b = b$.



Stoga je opseg lika

$$10a + 4b + b + b + b + b = 10a + 8b,$$

odnosno

$$10a + 8b = 10 \cdot 2x + 8 \cdot 3x = 20x + 24x = 44x.$$

Sada iz uvjeta $44x = 308$ slijedi $x = 7$.

Duljine susjednih stranica pravokutnika su $a = 2x = 14$ i $b = 3x = 21$. Površina jednog pravokutnika je $14 \cdot 21 = 294$, a površina cijelog lika $11 \cdot 294 = 3234$.

4. Razrednica je najavila da će na kraju školske godine nagraditi učenike – oni koji završe razred s odličnim uspjehom dobit će po dvije čokolade, oni koji je završe s vrlo dobrim uspjehom dobit će po polovinu čokolade, a oni koji završe s dobrim uspjehom po trećinu čokolade. U razredu je ukupno 27 učenika, a na kraju školske godine nitko nije imao dovoljan niti nedovoljan uspjeh. Kako bi ispunila najavljeno, razrednici je trebalo točno 13 čokolada. Koliko je učenika završilo školsku godinu s odličnim, koliko s vrlo dobrim, a koliko s dobrim uspjehom?

Prvo rješenje.

Čokolade treba dijeliti na polovine i trećine pa zamislimo da je svaka čokolada podijeljena na 6 jednakih komadića. Ukupno je $13 \cdot 6 = 78$ komadića čokolade. Odlični učenici dobit će po 12, vrlo dobri po 3, a dobri po 2 komadića.

Uočimo da će svaki učenik dobiti najmanje dva komadića. Nakon što svaki učenik dobije po dva komadića, ostat će još $78 - 27 \cdot 2 = 24$ komadića čokolade. Njih će podijeliti vrlo dobri i odlični učenici. Vrlo dobri učenici će dobiti još po jedan, a odlični još po 10 komadića. Broj preostalih komadića je 24, pa mogu biti najviše dva odlična učenika.

1. slučaj: Dvoje odličnih učenika dobit će još 20 komadića čokolade, a preostala 4 komadića podijelit će četiri vrlo dobra učenika. U ovom su slučaju u razredu dva odlična učenika, četiri vrlo dobra učenika i $27 - (2 + 4) = 21$ dobar učenik.

2. slučaj: Jedan odličan učenik dobit će još 10 komadića, a preostalih 14 komadića podijelit će 14 vrlo dobrih učenika. U ovom su slučaju u razredu: jedan odličan učenik, 14 vrlo dobrih učenika i $27 - (1 + 14) = 12$ dobrih učenika.

3. slučaj: Nema odličnih učenika, a 24 komadića podijelit će 24 vrlo dobra učenika.

U ovom slučaju u razredu su 24 vrlo dobra učenika i $27 - 24 = 3$ dobra učenika.

Drugo rješenje.

Svaki vrlo dobar učenik dobit će polovinu čokolade. Kada bi broj vrlo dobrih učenika bio neparan, preostala bi jedna polovina čokolade koju ne bi mogli u potpunosti iskoristiti dobri učenici (tako da, nakon podjele, ne ostane čokolade). Zaključujemo da je broj vrlo dobrih učenika paran

To znači da su svi vrlo dobri učenici zajedno dobili određeni broj cijelih čokolada, a isto vrijedi i za odlične učenike. Zato i dobri učenici dijele određeni broj cijelih čokolada pa broj učenika s dobrim uspjehom mora biti višekratnik broja 3.

Svaki odličan učenik dobio je dvije čokolade. Budući da razrednica planira podijeliti ukupno 13 čokolada, barem su jednu čokoladu podijelili vrlo dobri i dobri učenici, a u razredu može biti najviše 6 odličnih učenika.

Zaključujemo da će u razredu biti najmanje $27 - 6 = 21$ vrlo dobar ili dobar učenik. Za njih je potrebno barem $21 : 3 = 7$ čokolada (ako su svi dobri, onda točno 7, a ako su neki vrlo dobri, onda treba i više od 7 čokolada). To znači da odlični učenici mogu dobiti najviše $13 - 7 = 6$ čokolada, pa broj odličnih učenika nije veći od 3.

U razredu je najmanje $27 - 3 = 24$ vrlo dobrih i dobrih učenika, pa je za njih potrebno barem $24 : 3 = 8$ čokolada. To znači da odlični učenici mogu dobiti najviše $13 - 8 = 5$ čokolada, što znači da su u razredu najviše dva odlična učenika.

Promotrimo mogući broj učenika, ovisno o broju odličnih učenika u razredu, vodeći računa o tome da je broj vrlo dobrih učenika paran broj, broj dobrih učenika višekratnik broja 3, te da broj odličnih učenika nije veći od 3.

a) Ako su u razredu tri odlična učenika, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 3 = 24$. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 6 = 7$ čokolada. To nije dovoljno da svatko od njih dobije barem trećinu čokolade. Dakle, ovaj slučaj nije moguć.

b) Ako su u razredu dva odlična učenika, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 2 = 25$. Nije moguće da su svi oni vrlo dobri. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 4 = 9$ čokolada. Zato najviše 8 čokolada mogu podijeliti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 16.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
16 učenika	8 čokolada	9 učenika	3 čokolade	15 čokolada
14 učenika	7 čokolada	11 učenika	nemoguće	
12 učenika	6 čokolada	13 učenika	nemoguće	
10 učenika	5 čokolada	15 učenika	5 čokolada	14 čokolada
8 učenika	4 čokolade	17 učenika	nemoguće	
6 učenika	3 čokolade	19 učenika	nemoguće	
4 učenika	2 čokolade	21 učenik	7 čokolada	13 čokolada
2 učenika	1 čokolada	23 učenika	nemoguće	
0 učenika	0 čokolada	25 učenika	nemoguće	

Jedno je rješenje da su u razredu 2 odlična učenika, 4 vrlo dobra učenika i 21 dobar učenik.

c) Ako je u razredu jedan odličan učenik, tada je ukupan broj vrlo dobrih i dobrih učenika $27 - 1 = 26$. Vrlo dobrim i dobrim učenicima preostaje $13 - 2 = 11$ čokolada, a to ne bi bilo dovoljno za 26 vrlo dobrih učenika. Zato najviše 10 čokolada mogu dobiti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 20.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
20 učenika	10 čokolada	6 učenika	2 čokolade	14 čokolada
18 učenika	9 čokolada	8 učenika	nemoguće	
16 učenika	8 čokolada	10 učenika	nemoguće	
14 učenika	7 čokolada	12 učenika	4 čokolade	13 čokolada
12 učenika	6 čokolada	14 učenika	nemoguće	

Ako je broj vrlo dobrih učenika manji od 12, smanjit će se ukupan broj čokolada, pa u ovom slučaju nema drugih rješenja. U razredu je jedan odličan učenik, 14 vrlo dobrih i 12 dobrih.

d) Ako u razredu nema odličnih učenika, tada 27 vrlo dobrih i dobrih učenika dijeli 13 čokolada. Nije moguće da su svi učenici vrlo dobri. Zato najviše 12 čokolada mogu dobiti vrlo dobri učenici pa njih nema više od 24.

Promatramo sljedeće mogućnosti:

vrlo dobri učenici		dobri učenici		ukupan broj čokolada
24 učenika	12 čokolada	3 učenika	1 čokolada	13 čokolada
22 učenika	11 čokolada	5 učenika	nemoguće	
20 učenika	10 čokolada	7 učenika	nemoguće	
18 učenika	9 čokolada	9 učenika	3 čokolade	12 čokolada

Ako se broj vrlo dobrih učenika još smanji, smanjit će se ukupan broj čokolada i neće biti drugih rješenja. U ovom slučaju, u razredu su 24 vrlo dobra i 3 dobra učenika.

5. Devet djevojčica sudjeluje na matematičkom kampu. Trebaju se smjestiti u sobe, a na raspolaganju su im jedna trokrevetna soba i tri dvokrevetne sobe – crvena, plava i zelena. Među djevojčicama su dva para sestara: sestre Božić i sestre Lovrić. Na koliko se načina djevojčice mogu rasporediti po sobama tako da sestre ne budu u različitim sobama? Bitno je samo tko je u kojoj sobi, a ne i raspored unutar soba.

Rješenje.

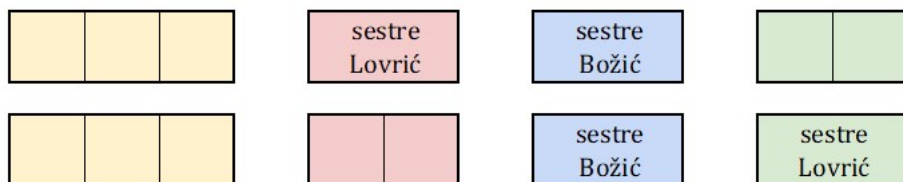
Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li u trokrevetnoj sobi jedan par sestara ili nije.

Prvi slučaj Oba para sestara smještena su u dvokrevetne sobe.

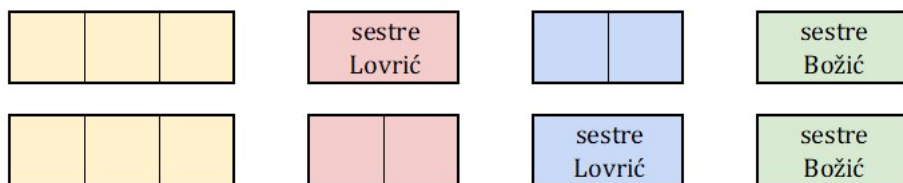
Ako sestre Božić smjestimo u crvenu sobu, imamo sljedeće rasporede:



Ako sestre Božić smjestimo u plavu sobu, imamo sljedeće rasporede:



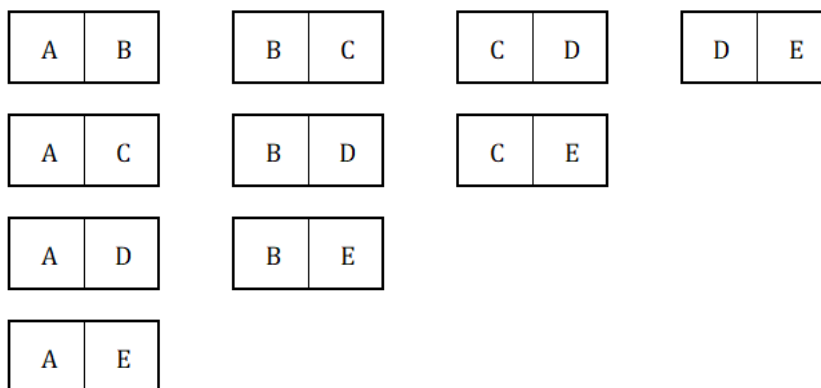
Ako sestre Božić smjestimo u zelenu sobu, imamo sljedeće rasporede:



Dvokrevetnu sobu za sestre Božić možemo odabrati na tri načina, a za svaki od tih odabira potom dvokrevetnu sobu za sestre Lovrić možemo odabrati na dva načina.

Dakle, postoji ukupno šest načina za rasporediti oba para sestara u dvokrevetne sobe.

Za svaki od gornjih šest rasporeda sestara moramo od preostalih pet djevojčica odabrati dvije koje su smještene u treću dvokrevetnu sobu. To možemo učiniti na sljedećih 10 načina (djevojčice su označene slovima A, B, C, D i E):



Preostale tri djevojčice su smještene u trokrevetnu sobu.

U ovom slučaju postoji ukupno $6 \cdot 10 = 60$ rasporeda.

Drugi slučaj Jedan par sestara je smješten u trokrevetnu sobu.

Na dva načina možemo odabrati koji par sestara je smješten u trokrevetnu sobu, a na tri načina možemo odabrati u koju dvokrevetnu sobu je smješten drugi par sestara.

sestre Božić		sestre Lovrić					
sestre Božić				sestre Lovrić			
sestre Božić						sestre Lovrić	
sestre Lovrić		sestre Božić					
sestre Lovrić				sestre Božić			
sestre Lovrić						sestre Božić	

Za svaki od gornjih šest rasporeda sestara, od preostalih pet djevojčica (A, B, C, D i E) na pet načina možemo odabrati djevojčicu koja će biti u trokrevetnoj sobi sa sestrama.

sestre Božić	A	sestre Lovrić			
-----------------	---	------------------	--	--	--

Još treba prebrojati na koliko načina možemo rasporediti preostale četiri djevojčice u dvije dvokrevetne sobe.

Ako je u trokrevetnu sobu sa sestrama smještena djevojčica A, preostale su djevojčice B, C, D i E.

Odabir dvije djevojčice koje će se smjestiti u prvu od te dvije dvokrevetne možemo napraviti na šest načina:

B	C	C	D	D	E
B	D	C	E		
B	E				

Preostale dvije djevojčice smještene su u preostalu dvokrevetnu sobu.

Za bilo koji odabir djevojčice koja je smještena u trokrevetnu sobu sa sestrama ponovno bismo na šest načina mogli rasporediti preostale četiri djevojčice u dvije dvokrevetne sobe.

Zato u ovom slučaju ima ukupno $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$ rasporeda.

Ukupan broj rasporeda je $60 + 180 = 240$.