

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x traženi troznamenkasti broj.

Ako mu s desna dopišemo znamenku 2, dobit ćemo broj $10 \cdot x + 2$.

Nakon dijeljenja sa 7 dobije se broj $(10 \cdot x + 2) : 7$.

Ako se ovom broju dopiše znamenka 3, dobije se broj $10 \cdot [(10 \cdot x + 2) : 7] + 3$.

Taj broj podijeljen s 43 daje 41, pa jednačba koju treba riješiti glasi:

$$\{10 \cdot [(10 \cdot x + 2) : 7] + 3\} : 43 = 41$$

Slijedi:

$$10 \cdot [(10 \cdot x + 2) : 7] + 3 = 1\,763$$

$$10 \cdot [(10 \cdot x + 2) : 7] = 1\,760$$

$$(10 \cdot x + 2) : 7 = 176$$

$$10 \cdot x + 2 = 1\,732$$

$$x = 123$$

Drugi način:

Zadatak rješavamo unatrag:

Broj koji podijeljen s 43 daje 41 je $43 \cdot 41 = 1\,763$.

Nakon što se izbriše dopisana znamenka 3, dobije se broj 176.

Broj koji podijeljen sa 7 daje 176 je $176 \cdot 7 = 1\,232$.

Nakon što se izbriše dopisana znamenka 2, dobije se početni broj 123.

2. Najmanji broj koji je zamislio Roko označimo s x .

Tada su ostali brojevi $3x$, $9x$, $27x$ i $81x$.

Iz uvjeta zadatka možemo postaviti jednačbu:

$$x + 81x = 3x + 9x + 27x + 172$$

Slijedi:

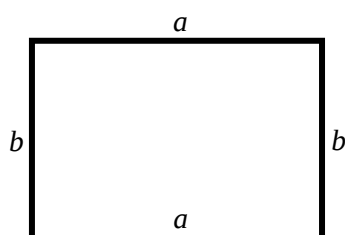
$$82x = 39x + 172$$

$$43x = 172$$

$$x = 4$$

Roko je zamislio brojeve 4, 12, 36, 108 i 324.

3.



Iz $2a + 2b = 154$ zaključujemo da je $a + b = 77$.

Kako je $b = \frac{5}{6}a$, vrijedi:

$$a + \frac{5}{6}a = 77$$

$$\frac{11}{6}a = 77$$

$$\frac{1}{6}a = 7$$

$$a = 6 \cdot 7$$

$$a = 42 \text{ m}$$

Tada je širina vrta:

$$b = \frac{5}{6} \cdot 42$$

$$b = 5 \cdot 7$$

$$b = 35 \text{ m}$$

Stranice vrta iznose 42 m i 35 m, pa je njegova površina:

$$P = 42 \cdot 35$$

$$P = 1\,470 \text{ m}^2$$

Tražena površina vrta djeda Mate je $1\,470 \text{ m}^2$.

4. Označimo nepoznate brojeve u prvom retku s a i b .

18	a	b
	36	
42		

Zbroj u prvom retku i po dijagonali je jednak. Dakle:

$$18 + a + b = 42 + 36 + b$$

Broj b pojavljuje se s obje strane, pa mora biti

$$18 + a = 78, \text{ odnosno}$$

$$a = 60.$$

(Ili, bez jednadžbe: $a = 42 + 36 - 18 = 60$.)

Sa c i d označimo nepoznate brojeve u drugom retku:

18		
c	36	d
42		

Zbroj u drugom retku i u prvom stupcu je jednak, pa vrijedi:

$$c + 36 + d = 18 + c + 42$$

Broj c se pojavljuje s obje strane, pa mora biti

$$36 + d = 60, \text{ odnosno}$$

$$d = 24.$$

(Ili, bez jednadžbe: $d = 42 + 18 - 36 = 24$.)

Označimo s e i f nepoznate brojeve u trećem retku.

18		
	36	
42	e	f

Zbroj u trećem retku jednak je zbroju u dijagonali, pa vrijedi:

$$42 + e + f = 18 + 36 + f$$

Broj f se pojavljuje s obje strane, pa mora biti

$$42 + e = 54, \text{ odnosno}$$

$$e = 12.$$

(Ili, bez jednadžbe: $e = 18 + 36 - 42 = 12$.)

Popunimo tablicu izračunatim brojevima i označimo još uvijek nepoznate brojeve:

18	60	b
c	36	24
42	12	f

Iz drugog stupca se izračuna zbroj $60 + 36 + 12 = 108$.

Sada se izračunaju i ostale nepoznanice.

$$b = 108 - 78 = 30$$

$$c = 108 - 60 = 48$$

$$f = 108 - 54 = 54$$

Popunjeni „magični kvadrat“ izgleda ovako:

18	60	30
48	36	24
42	12	54

5. Ukupni broj utakmica jednak je broju neuređenih parova ekipa, a to je $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

Neka je x broj utakmica koje su završile neriješeno.

Tada je ukupni broj bodova jednak $x \cdot 4 + (21 - x) \cdot 5$. Dakle, imamo

$$x \cdot 4 + (21 - x) \cdot 5 = 90$$

odnosno

$$105 - x = 90,$$

tj. $x = 15$. Dakle, 15 utakmica završilo je neriješeno, a $21 - 15 = 6$ pobjedom neke od ekipa.

Svaka je ekipa odigrala 6 utakmica (po jednu sa svakom preostalom ekipom).

Ekipa koja je osvojila najviše bodova ima osvojenih 24 boda, što znači da je ostvarila 4 pobjede i 2 neriješena rezultata ($4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 24$).

To znači da su sve ostale ekipe ukupno ostvarile 2 pobjede i da je najveći broj bodova koji je mogla ostvariti neka od tih ekipa jednak $2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 18$ bodova.

(To je moguće ako je drugoplasirana ekipa odigrala s prvoplasiranom ekipom neriješeno, a od preostalih pet ekipa dvije je pobijedila i s tri ekipe odigrala neriješeno. Svi međusobni rezultati nižeplasiranih ekipa su u tom slučaju neriješeni.)

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Broj a možemo zapisati u obliku:

$$a = 3 \cdot 11\,111\,111 \cdot 4 \cdot 11\,111\,111 \cdot 5 \cdot 11\,111\,111, \text{ odnosno}$$

$$a = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 = 60 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111.$$

Na isti način i broj b možemo zapisati u obliku:

$$b = 6 \cdot 11\,111\,111 \cdot 7 \cdot 11\,111\,111 \cdot 8 \cdot 11\,111\,111, \text{ odnosno}$$

$$b = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 = 336 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111.$$

Sada vidimo da je zbroj zadanih brojeva jednak:

$$a + b = 60 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 + 336 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$$

$$a + b = (60 + 336) \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$$

Dakle, zbroj brojeva a i b možemo pisati u obliku umnoška:

$$a + b = 396 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$$

Broj $a + b$ je djeljiv brojem 9 jer je faktor 396 djeljiv brojem 9.

Drugi način:

Broj a je oblika $(9k + 6) \cdot (9k + 5) \cdot (9k + 4)$, gdje je k prirodan broj,

a oblika $(9l + 3) \cdot (9l + 2) \cdot (9l + 1)$, gdje je l prirodan broj.

Kako je $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 = 9 \cdot 13 + 3$, slijedi da je a je oblika $9m + 3$, gdje je m prirodan broj,

a iz $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ slijedi da je b oblika $9n + 6$, gdje je n prirodan broj.

Stoga je $a + b = 9m + 3 + 9n + 6 = 9(m + n + 1)$, pa je $a + b$ djeljiv s 9.

2. U 20 sati i 21 minutu kazaljke sata krakovi su tupog i izbočenog kuta. Potrebno je odrediti mjere tih kutova.

Početni položaj i male i velike kazaljke ure neka je 12 sati. Velika kazaljka za 1 sat (60 minuta) načini puni kut pa za jednu minutu zatvara kut veličine 6° . Za 21 minutu ona će zatvoriti kut veličine $21 \cdot 6^\circ = 126^\circ$.

Mala će kazaljka za 1 sat (60 minuta) zatvoriti kut od $360^\circ : 12 = 30^\circ$ pa će za 8 sati zatvoriti kut veličine 240° . Još je potrebno izračunati koliki će kut mala kazaljka prijeći za 21 minutu.

Za 1 minutu mala kazaljka zatvori kut veličine 0.5° , a za 21 minutu, bit će to kut veličine $21 \cdot 0.5^\circ = 10.5^\circ$.

Ukupno, za 8 sati i 21 minutu, mala kazaljka zatvara kut veličine 250.5° .

Kut koji zatvaraju mala i velika kazaljka razlika je dobivenih kutova:

$$250.5^\circ - 126^\circ = 124.5^\circ \text{ (tupi kut).}$$

Mjeru izbočenog kuta računamo nadopunom do 360° te ona iznosi 235.5° .

3. Ostatak pri dijeljenju broja n brojem 45 označimo s x .

Ostatak pri dijeljenju broja 2 020 brojem 45 jednak je 40.

Kako je $40 < 45$, može se zaključiti da je ostatak pri dijeljenju broja $(n + 2\ 020)$ brojem 45 broj $(x + 40)$.

Sada vrijedi $x + 40 = 43$, iz čega slijedi $x = 3$.

Dakle, ostatak pri dijeljenju prirodnog broja n brojem 45 jest 3.

4. Prvi način:

Neka je bilo n učenika petog razreda.

Između njih se može smjestiti jedan učenik manje od tog broja, dakle $n - 1$. Toliko je bilo „šestaša“.

U tom je trenutku na igralištu bilo $n + n - 1 = 2n - 1$ učenika oba razreda.

I između njih može stati jedan učenik manje, pa je „sedmaša“ bilo $2n - 2$.

Zajedno, od petog do sedmog razreda, bilo je $2n - 1 + 2n - 2 = 4n - 3$ učenika.

Između njih je stao jedan manje, dakle $4n - 4$ „osmaša“.

Ukupan broj svih učenika je $4n - 4 + 4n - 4 = 8n - 7$.

Vrijedi jednačica $8n - 7 = 193$.

Tada je $8n = 200$

i $n = 25$.

U redu su bila 24 učenika šestog razreda.

Drugi način:

Promotrimo postupak dolaska učenika unazad.

Ako je već u redu n učenika, između njih se može smjestiti jedan učenik manje, dakle $n - 1$ učenik.

Zbog $193 = 97 + 96$, može se zaključiti da je na kraju u redu bilo 97 učenika petog, šestog i sedmog razreda, te da se između njih smjestilo još 96 učenika osmog razreda.

Na isti način zaključujemo da je, zbog $97 = 49 + 48$, prije toga u redu bilo 49 učenika petog i šestog razreda, a da se između njih smjestilo 48 učenika sedmog razreda.

I konačno, zbog $49 = 25 + 24$, zaključuje se da je na samom početku bilo 25 učenika petog razreda, te da su se među njih smjestila 24 učenika šestog razreda.

U redu su bila 24 učenika šestog razreda.

Treći način:

Nacrtajmo skicu opisane situacije koja se odnosi na dva susjedna učenika petih razreda (P_1 i P_2).

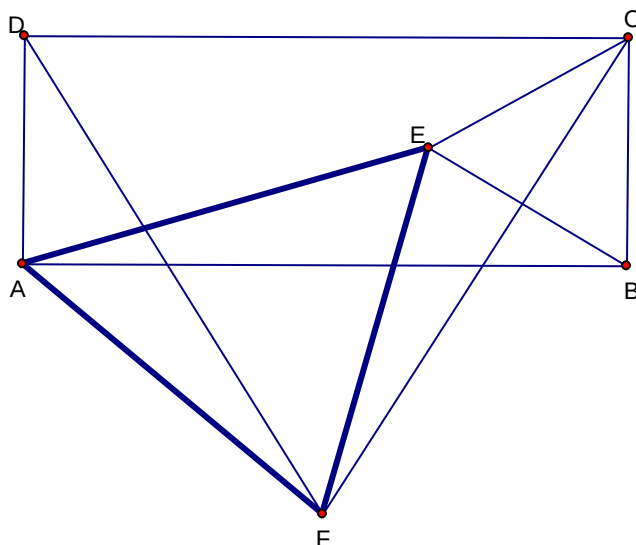


Zaključujemo da se između svaka dva učenika petih razreda nalazi po jedan učenik šestog razreda, dva učenika sedmog te četiri učenika osmog razreda. Ako jednu skupinu od 8 učenika čine učenici od P_1 do O_4 (uključujući njih), prema uvjetima zadatka vrijedi da je

$$8x + 1 = 193$$

gdje je x broj skupina prikazanih skicom. Rješenje jednačice je $x = 24$. S obzirom da je u svakoj skupini jedan učenik šestog razreda, zaključujemo da u redu stoji 24 učenika šestog razreda.

5. Skica:



Prvi način:

Budući da je $|AD| = |BC| = |BE| = b$, $|AB| = |CD| = |DF| = a$ i $|\angle ADF| = |\angle EBA| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, po poučku o sukladnosti trokuta SKS slijedi da je $\triangle AFD \cong \triangle ABE$, pa vrijedi da je $|AF| = |AE|$.

Na sličan način dokazujemo da je $\triangle AFD \cong \triangle FCE$.

Vrijedi da je $|BE| = |EC| = b$, $|DF| = |CF| = a$, te da je $|\angle DCF| = 60^\circ$, $|\angle ECB| = 60^\circ$ i $|\angle DCB| = 90^\circ$.

Iz $|\angle DCF| + |\angle ECB| = 120^\circ$ i $|\angle DCF| + |\angle ECB| = 90^\circ + |\angle ECF|$ slijedi da je $90^\circ + |\angle ECF| = 120^\circ$, tj. $|\angle ECF| = 30^\circ$.

Po poučku o sukladnosti trokuta SKS slijedi da je $\triangle AFD \cong \triangle FCE$, pa vrijedi da je $|EF| = |AF|$.

Time je dokazano da stranice trokuta AFE imaju jednake duljine, tj. da je $\triangle AFE$ jednakostraničan.

Drugi način:

Iz uvjeta zadatka ($\triangle BCE$ i $\triangle FCD$ su jednakostranični) proizlazi $|\angle FCD| = |\angle CDF| = |\angle DFC| = 60^\circ$ i $|\angle EBC| = |\angle BCE| = |\angle CEB| = 60^\circ$ te $|AD| = |BC| = |BE| = b$, $|AB| = |CD| = |DF| = a$.

Budući da je $|AD| = |BE| = b$, $|AB| = |DF| = a$ i $|\angle ADF| = |\angle EBA| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, po poučku o sukladnosti trokuta SKS vrijedi da je $\triangle AFD \cong \triangle AEB$, iz čega slijedi $|AF| = |AE|$.

Kako je $|\angle DCE| = |\angle BCF| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, vrijedi $|\angle FCE| = 90^\circ - |\angle DCE| - |\angle BCF| = 30^\circ$.

Sada se iz $|BE| = |EC| = b$, $|DF| = |CF| = a$ i $|\angle ECF| = |\angle EBA| = 30^\circ$ može zaključiti da po poučku o sukladnosti SKS vrijedi $\triangle AFD \cong \triangle AEB$, iz čega slijedi $|AF| = |EF|$.

Kako je $|AF| = |AE|$ i $|AF| = |EF|$, slijedi $|AF| = |AE| = |EF|$, čime je tvrdnja dokazana, tj. $\triangle AFE$ jest jednakostraničan trokut.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj radnika iz pojedine zemlje označimo na sljedeći način:

a – broj Austrijanaca,

b – broj Belgijanaca,

c – broj Ciprana,

d – broj Danaca,

e – broj Estonaca.

Iz uvjeta zadatka dobivamo sustav:

$$a = \frac{1}{3}e - 1$$

$$a = \frac{1}{2}b - 3$$

$$e + d = c + b + 3$$

$$c + e = \frac{1}{2}(a + b + c + d + e) - 1$$

$$c + b = \frac{7}{16}(a + b + c + d + e)$$

Nadalje, vrijedi:

$$e = 3a + 3$$

$$b = 2a + 6$$

$$e - b - c + d = 3$$

$$a + b - c + d - e = 2$$

$$7a - 9b - 9c + 7d + 7e = 0$$

Iz treće jednadžbe sustava slijedi:

$$-c + d = 3 - e + b$$

Uvrštavanjem u četvrtu jednadžbu dobivamo:

$$a + b + 3 - e + b - e = 2$$

$$a + 2b - 2e = -1$$

Uvrštavanjem $e = 3a + 3$, $b = 2a + 6$ imamo:

$$a + 2(2a + 6) - 2(3a + 3) = -1$$

$$a + 4a + 12 - 6a - 6 = -1$$

$$a = 7$$

$$\text{Slijedi } e = 24 \text{ i } b = 20.$$

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti a , b i e u treću i posljednju jednadžbu sustava dobivamo:

$$4 - c + d = 3$$

$$49 - 180 - 9c + 7d + 168 = 0$$

Slijedi:

$$d = c - 1$$

$$37 - 9c + 7d = 0$$

$$37 - 9c + 7c - 7 = 0$$

$$30 = 2c$$

$$c = 15$$

$$d = 14$$

Dakle, rješenje sustava je:

$$a = 7$$

$$b = 20$$

$$c = 15$$

$$d = 14$$

$$e = 24$$

U tvrtki radi 7 Austrijanaca, 20 Belgijanaca, 15 Ciprana, 14 Danaca i 24 Estonca.

2. Rezultat dvaju izvlačenja kuglica može se zapisati kao uređeni par kojemu je prvi član jednak broju na prvoj izvučenoj kuglici, a drugi član je broj na drugoj izvučenoj kuglici. Takvih uređenih parova ima ukupno

$$100 \cdot 100 = 10\,000.$$

Prebrojimo one uređene parove kod kojih je umnožak članova djeljiv s 9. To je moguće ako je bar jedan član djeljiv s 9 ili ako su oba člana djeljiva s 3.

Uređenih parova kod kojih je prvi član djeljiv s 9, a drugi član je bilo koji broj ima $11 \cdot 100 = 1\,100$.

Uređenih parova kod kojih je drugi član djeljiv s 9, a prvi član je bilo koji broj ima $100 \cdot 11 = 1\,100$.

Uređenih parova kod kojih su i prvi i drugi član djeljivi s 9 ima $11 \cdot 11 = 121$.

Dakle, uređenih parova kod kojih je bar jedan član djeljiv s 9 ima

$$1\,100 + 1\,100 - 121 = 2\,079.$$

Promotrimo uređene parove kod kojih su oba člana djeljiva s 3 i nijedan od njih nije djeljiv s 9 (jer su takvi već prebrojani).

Brojeva od 1 do 100, koji su djeljivi s 3, a nisu s 9, ima $33 - 11 = 22$.

Uređenih parova kod kojih su oba člana djeljiva s 3, ali nisu s 9 ima $22 \cdot 22 = 484$.

Dakle, uređenih parova kod kojih je umnožak prvog i drugog člana djeljiv s 9 ima ukupno

$$2\,079 + 484 = 2\,563.$$

Tražena vjerojatnost je $p = \frac{2\,563}{10\,000} = 25.63\%$.

3. Neka je $n = \overline{abcd}$ broj s traženim svojstvom i neka je x zbroj znamenaka broja n , a y zbroj znamenaka broja $n + 1$. Onda je $x = a + b + c + d$.

Ako je $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ onda je $n + 1 = \overline{abc(d+1)}$ i $y = a + b + c + d + 1 = x + 1$.

To znači da je y neposredni sljedbenik od x , pa su x i y različite parnosti što je suprotno uvjetu zadatka.

Zaključujemo da je $d = 9$.

Tražimo, dakle, sve brojeve oblika $n = \overline{abc9}$ manje od 2 020 sa svojstvom da su x i y neparni.

Kako je $x = a + b + c + 9$, a 9 je neparan, onda $a + b + c$ mora biti paran.

Razmotrimo **prvu mogućnost**, $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Tada je $n + 1 = \overline{ab(c+1)0}$, pa je $y = a + b + (c + 1) + 0 = a + b + c + 1$ i on je neparan ako je $a + b + c$ paran.

Stoga tražimo sve brojeve oblika $n = \overline{abc9}$ manje od 2 020, tako da vrijedi:

$a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $a + b + c$ je paran.

1. Ako je $a = 0$, onda je $b + c$ paran i postoje sljedeće mogućnosti:

	paran + paran	neparan + neparan
b	5 mogućnosti $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	5 mogućnosti $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c	5 mogućnosti $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	4 mogućnosti $c \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b + c$	25 mogućnosti	20 mogućnosti

Za $a = 0$ postoji ukupno 45 mogućnosti.

2. Ako je $a = 1$, onda je $b + c$ neparan i postoje sljedeće mogućnosti:

	paran + neparan	neparan + paran
b	5 mogućnosti $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	5 mogućnosti $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c	4 mogućnosti $c \in \{1, 3, 5, 7\}$	5 mogućnosti $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$b + c$	20 mogućnosti	25 mogućnosti

Za $a = 1$ postoji ukupno 45 mogućnosti.

3. Ako je $a = 2$, onda je $b = 0$ i $c \in \{0, 1\}$ jer je $d = 9$ i prema uvjetu zadatka $n = \overline{abc9} < 2020$.

Kako $a + b + c$ mora biti paran, $2 + 0 + c = 2 + c$, pa c mora biti paran, tj. $c = 0$.

Za $a = 2$ postoji jedna mogućnost, broj 2009.

Dakle, za $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ postoji $45 + 45 + 1 = 91$ broj koji zadovoljava uvjete zadatka.

Razmotrimo sada i **drugu mogućnost**, $c = 9$.

Ako je $c = 9$ i $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, onda je $n = \overline{ab99}$, pa je $x = a + b + 9 + 9 = a + b + 18$ neparan ako je $a + b$ neparan.

No u tom slučaju je $n + 1 = \overline{a(b+1)00}$, pa je $y = a + b + 1 + 0 + 0 = a + b + 1$.

Prema uvjetu zadatka i y mora biti neparan, što je nemoguće jer je $a + b$ neparan pa je $a + b + 1$ paran broj.

Dakle, za $c = 9$ također je i $b = 9$, pa je $n = \overline{a999}$.

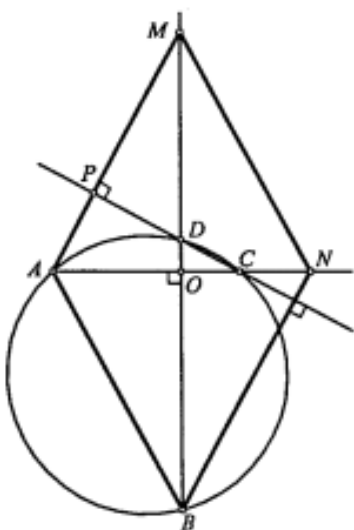
No $x = a + 9 + 9 + 9 = a + 27$ je neparan pa a mora biti paran tj. $a \in \{0, 2\}$.

Za $a = 0$ postoji rješenje $n = 999$, a za $a = 2$ rješenje 2 999 ne zadovoljava uvjete zadatka (prirodni brojevi manji od 2 020).

Dakle, za $c = 9$ postoji samo jedna mogućnost, broj 999.

Konačno, zaključujemo da postoji $91 + 1 = 92$ prirodnih broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

4. Skica:



$ABNM$ je četverokut s okomitim dijagonalama $\overline{AN}$ i $\overline{BM}$. Da bi taj četverokut bio romb, dovoljno je dokazati da su mu sve četiri stranice sukladne.

Primijetimo da je $|\angle DBA| = |\angle DCA|$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{AD}$) i $|\angle DCA| = |\angle NBD|$

($CA \perp BD$ i $CD \perp BN$ pa su kutovi s okomitim kracima iste vrste).

Slijedi $|\angle OBA| = |\angle DBA| = |\angle NBD| = |\angle NBO|$.

Uz zajedničku stranicu $\overline{OB}$, $|\angle OBA| = |\angle NBO|$ i $|\angle AOB| = |\angle BON| = 90^\circ$, prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta je $\triangle ABO \cong \triangle NOB$, odakle slijedi $|AB| = |NB|$.

Također je i $|AO|=|ON|$ što znači da je pravac BM simetrala dužine $\overline{AN}$ (pravac BM je okomit na dužinu $\overline{AN}$ i prolazi njenim polovištem).

M je točka na simetrali dužine $\overline{AN}$, pa je $|AM| = |NM|$.

Preostalo je još dokazati da je $|AB| = |AM|$.

Neka je P nožište okomice iz točke A na pravac CD .

Tada je prema K-K poučku o sličnosti trokuta $\triangle ABO \sim \triangle ACP$ ($|\angle OBA| = |\angle DCA| = |\angle PCA|$ i $|\angle APC| = |\angle AOB| = 90^\circ$), pa slijedi $|\angle OAM| = |\angle CAP| = |\angle BAO|$.

Sada je prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta ($|\angle OAM| = |\angle BAO|$, $\overline{AO}$ zajednička stranica, $|\angle MOA| = |\angle AOB| = 90^\circ$) slijedi $\triangle AOM \cong \triangle ABO$, odakle je $|AB| = |AM|$ te je četverokut $ABNM$ romb.

Napomena: Da je $|AB| = |AM|$ možemo dokazati i na drugi način. Pravci AM i BN su usporedni jer su oba okomita na isti pravac CD . Zaključujemo da je $|\angle MAO| = |\angle ONB|$ (kutovi uz presječnicu iste vrste) te je $|\angle ONB| = |\angle OAB|$ iz već dokazane sukladnosti trokuta $\triangle ABO$ i $\triangle NOB$.

Odavde je $|\angle MAO| = |\angle OAB|$, pa uz zajedničku stranicu $\overline{OA}$ i $|\angle AOB| = |\angle MOA| = 90^\circ$ prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta slijedi $\triangle ABO \cong \triangle MAO$ i vrijedi $|AB| = |AM|$.

5. Ako se osam brojeva smjesti nekim redom u kružnom poretku, dobije se osam zbrojeva od po četiri uzastopno smještene broja. Kako je svaki od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 pribrojnik u točno četiri zbroja, onda je zbroj tih osam zbrojeva jednak

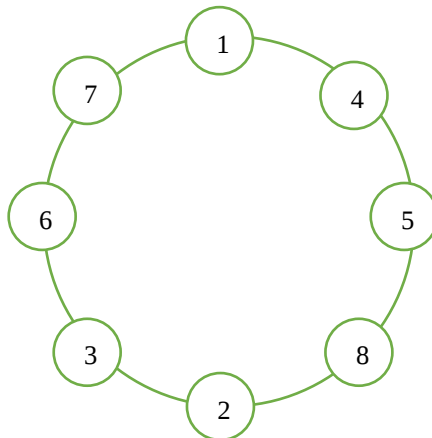
$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144.$$

Pretpostavimo li da je $m = 18$, svih spomenutih osam zbrojeva bi moralo biti jednako 18 jer je $8 \cdot 18 = 144$.

No ako je a, b, c, d, e nekih pet uzastopno smještenih brojeva, onda je $a + b + c + d \neq b + c + d + e$ jer je $a \neq e$. To znači da m ne može biti 18, odnosno vrijedi $m > 18$.

Odredimo jedan raspored tako da najveći zbroj neka četiri uzastopno smještene broja jednak 19.

Smjestimo brojeve tako da brojevi 8 i 7 ne budu u istom zbroju, kao ni brojevi 6 i 5, 4 i 3 te 2 i 1, na način prikazan na slici.



Traženih osam zbrojeva je:

$$1 + 4 + 5 + 8 = 18,$$

$$4 + 5 + 8 + 2 = 19,$$

$$5 + 8 + 2 + 3 = 18,$$

$$8 + 2 + 3 + 6 = 19,$$

$$2 + 3 + 6 + 7 = 18,$$

$$3 + 6 + 7 + 1 = 17,$$

$$6 + 7 + 1 + 4 = 18,$$

$$7 + 1 + 4 + 5 = 17,$$

pa je $m = 19$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ broj učenika koji su planirali ići na izlet, a $x > 0$ cijena izleta po učeniku (u kunama).

Tada je

$$n \cdot x = 2880$$

$$x = \frac{2880}{n}.$$

Nakon odustajanja, broj učenika koji idu na izlet je $n - 3$, a cijena izleta po učeniku je $x + 4$. Sada je

$$(n - 3) \cdot (x + 4) = 2880$$

$$(n - 3) \cdot \left(\frac{2880}{n} + 4 \right) = 2880$$

$$2880 + 4n - \frac{3 \cdot 2880}{n} - 12 = 2880$$

$$4n - \frac{3 \cdot 2880}{n} - 12 = 0 \quad / \cdot n$$

$$4n^2 - 3 \cdot 2880 - 12n = 0 \quad / : 4$$

$$n^2 - 3n - 2160 = 0$$

$$n^2 - 48n + 45n - 2160 = 0$$

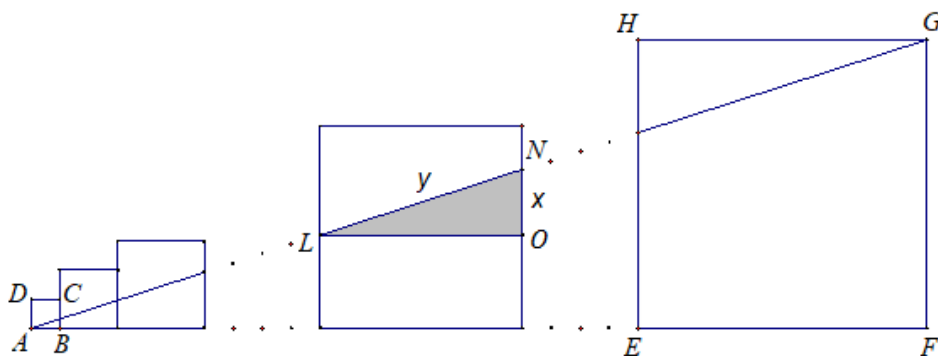
$$n(n - 48) + 45(n - 48) = 0$$

$$(n - 48)(n + 45) = 0.$$

Kako je $n \in \mathbb{N}$, jednadžba ima samo jedno rješenje, $n = 48$.

Na izlet je trebalo ići 48 učenika. (Odnosno, na izlet ih je otišlo 45).

2. Prvi način:



Kako je ukupan broj kvadrata $2n + 1$, srednji kvadrat je $(n + 1)$ -vi po redu, pa se pravokutni trokut $\triangle LON$ nalazi u $(n + 1)$ -vom kvadratu. Kako je kvadrat $(n + 1)$ -vi u nizu, $|LO| = n + 1$. Vrijedi i

$$|FG| = 2n + 1.$$

Označimo duljine dužina $\overline{ON}$ i $\overline{LN}$ redom s x i y te izračunamo njihove duljine.

$\triangle LON \sim \triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna i $\angle OLN \cong \angle FAG$ jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu.

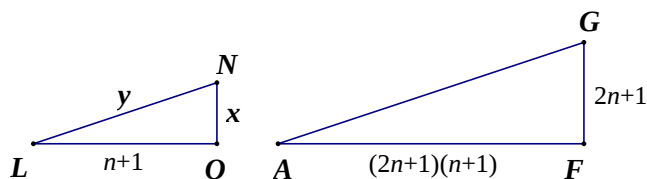
Iz sličnosti slijedi $\frac{x}{n+1} = \frac{(2n+1)}{|AF|}$.

Kako je $|AF| = 1 + 2 + \dots + 2n + 1 = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{2} = (2n+1) \cdot (n+1)$, dobijemo:

$$\frac{x}{n+1} = \frac{(2n+1)}{(2n+1) \cdot (n+1)}$$

$$\frac{x}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$x = 1.$$



Kako je trokut $\triangle LON$ pravokutan, vrijedi:

$$y^2 = (n+1)^2 + x^2$$

$$y^2 = (n+1)^2 + 1^2$$

$$y^2 = n^2 + 2n + 1 + 1$$

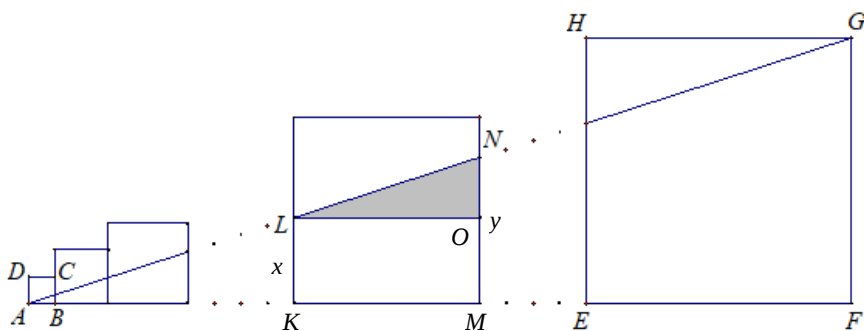
$$y^2 = n^2 + 2n + 2, y > 0$$

$$y = \sqrt{n^2 + 2n + 2}.$$

Konačno, opseg pravokutnog trokuta $\triangle LON$ je $o = n + 2 + \sqrt{n^2 + 2n + 2}$, a njegova je površina

$$P = \frac{(n+1) \cdot 1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Drugi način:



Kako je ukupan broj kvadrata $2n + 1$, srednji kvadrat je $(n + 1)$ -vi po redu, pa se pravokutni trokut $\triangle LON$ nalazi u $(n + 1)$ -vom kvadratu. Odredimo duljine stranica tog trokuta. Kako je kvadrat $(n + 1)$ -vi u nizu, $|LO| = n + 1$.

Označimo duljine dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ redom s x i y te izračunamo njihove duljine.

$\triangle AKL \sim \triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna, a kut pri vrhu A im je zajednički.

Iz sličnosti slijedi $|AK| : x = |AF| : |FG|$.

Odredimo duljine dužina $\overline{AK}$ i $\overline{AF}$:

$$|AK| = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$|AF| = 1 + 2 + \dots + 2n + 1 = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{2} = (2n+1) \cdot (n+1).$$

Kako je $|FG| = 2n+1$, imamo:

$$x = \frac{|AK| \cdot |FG|}{|AF|} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot (2n+1) \cdot (n+1)} = \frac{n}{2}.$$

$\triangle AMN \sim \triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna, a kut pri vrhu A im je zajednički.

Iz sličnosti slijedi $|AM| : y = |AF| : |FG|$.

Odredimo duljinu dužine $\overline{AM}$:

$$|AM| = 1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Kako je $|AF| = (2n+1) \cdot (n+1)$ i $|FG| = 2n+1$, imamo:

$$y = \frac{|AM| \cdot |FG|}{|AF|} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+1)}{2 \cdot (2n+1) \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{2}.$$

Sada je:

$$|ON| = y - x = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{2} = 1.$$

Kako su duljine kateta pravokutnog trokuta $\triangle LON$ jednake $n+1$ i 1 , duljina hipotenuze je:

$$|LN| = \sqrt{(n+1)^2 + 1^2} = \sqrt{n^2 + 2n + 2}.$$

Konačno, opseg pravokutnog trokuta $\triangle LON$ je $o = n + 2 + \sqrt{n^2 + 2n + 2}$, a njegova je površina

$$P = \frac{(n+1) \cdot 1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

3. Dokažimo najprije da je ostatak pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja s 4 uvijek 0 ili 1, odnosno ne može biti niti 2 niti 3.

Naime, svaki se prirodan broj može zapisati na jedan od četiri načina:

$$4k+1, 4k+2, 4k+3 \text{ ili } 4k+4 = 4(k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Kvadrirajmo ove izraze i promotrimo ostatke pri dijeljenju s četiri:

$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1, \text{ stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 1.}$$

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4, \text{ stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0.}$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1, \text{ stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 1.}$$

$$(4(k+1))^2 = 16(k+1)^2, \text{ stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0.}$$

Zaključujemo da kvadrat bilo kojeg prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1, odnosno, ne može biti niti 2 niti 3.

Napomena: Možemo to dokazati i na drugi način. Ako je prirodan broj paran, odnosno oblika $2k$, onda je njegov kvadrat jednak $4k^2$, tj. djeljiv s 4 (ostatak je 0). Ako je prirodan broj neparan, odnosno oblika $2k + 1$, onda je njegov kvadrat jednak $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ pa daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4.

Pokažimo sada da, za neparan prirodan broj n , broj $m(m+2) + n(n+2)$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 2 ili 3.

Naime, brojevi n i $n + 2$ su dva uzastopna neparna prirodna broja pa daju ostatke 1 i 3 pri dijeljenju s 4, što znači da $n(n+2)$ daje ostatak $1 \cdot 3 = 3$ pri dijeljenju s 4.

- 1) Ako je m neparan, onda i $m(m+2)$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, pa $m(m+2) + n(n+2)$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4.
- 2) Ako je m paran, onda je $m(m+2)$ djeljivo s 4, pa $m(m+2) + n(n+2)$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4.

Dakle, s obzirom da, za neparan prirodan broj n , broj $m(m+2) + n(n+2)$ daje ostatak 2 ili 3 pri dijeljenju s 4, a kvadrat prirodnog broja ne može dati ostatke 2 i 3 pri dijeljenju s 4, slijedi da $m(m+2) + n(n+2)$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.

4. Iz uvjeta zadatka slijedi da točke B, C, D i E pripadaju istoj kružnici sa središtem u A duljine polumjera 1 te da je $\overline{BE}$ promjer te kružnice.

Potrebno je izračunati $|BD|$, $|CE|$ i $|DE|$.

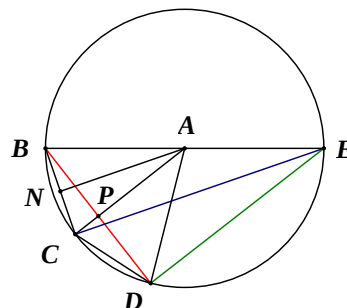
Prema Talesovom poučku, kut $\angle ECB$ je pravi pa primjenom Pitagorinog poučka na $\triangle CEB$ dobivamo:

$$|CE|^2 = |BE|^2 - |BC|^2$$

$$|CE|^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$|CE|^2 = \frac{15}{4}$$

$$\text{odnosno, } |CE| = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$



Nadalje, po poučku S-S-S o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ pa je $|\angle ACB| = |\angle DCA|$.

Neka je točka P sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle BCP \cong \triangle CDP$.

To znači da je $|\angle BPC| = |\angle CPD| = 90^\circ$. Zato je $\overline{BP}$ visina trokuta $\triangle ABC$.

Neka je N nožište visine trokuta $\triangle ABC$ povučene iz vrha A . Kako je $\triangle ABC$ jednakokračan, onda je

$$|AN|^2 = |AC|^2 - |CN|^2$$

$$|AN|^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$|AN|^2 = \frac{15}{16}$$

$$|AN| = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Prema poučku K-K o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ANC \sim \triangle BCP$ pa je

$$\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|AN|}{|AC|}$$

$$|BP| = \frac{|AN|}{|AC|} \cdot |BC|$$

$$|BP| = \frac{1}{|AC|} \cdot |AN| \cdot |BC|$$

$$|BP| = \frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\text{Nadalje, } |BD| = 2 \cdot |BP| = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Konačno, prema Talesovom poučku, kut $\angle EDB$ je pravi pa primjenom Pitagorinog poučka na $\triangle DEB$ dobivamo:

$$|DE|^2 = |BE|^2 - |BD|^2$$

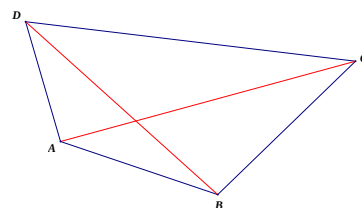
$$|DE|^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2$$

$$|DE| = \frac{7}{4}.$$

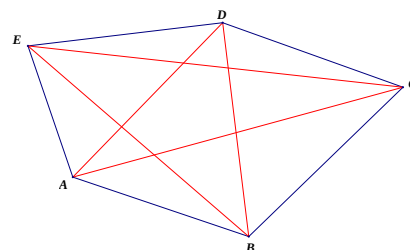
Napomena: $|BP|$ smo mogli izračunati i izražavajući površinu trokuta $\triangle ABC$ na dva načina:

$$\frac{|BC| \cdot |AN|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BP|}{2}.$$

5. Za $n = 4$, stranice obojimo u jednu, npr. plavu boju, a dijagonale u drugu – crvenu boju. Tada je očito da ne postoji trokut čiji su vrhovi vrhovi tog četverokuta, a sve stranice su obojane u istu boju.



Za $n = 5$, stranice obojimo u jednu, npr. plavu boju, a dijagonale u drugu – crvenu boju. Tada je očito da ne postoji trokut čiji su vrhovi vrhovi tog peterokuta, a sve stranice su obojane u istu boju.

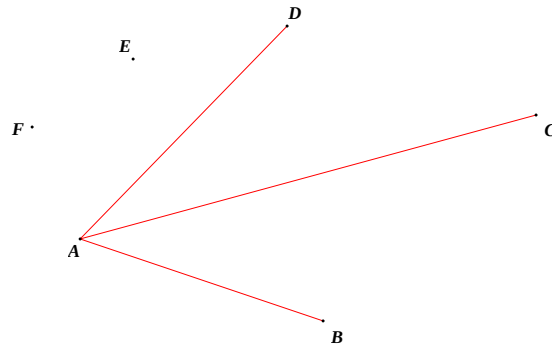


Time smo dokazali da je traženi $n > 5$.

Dokažimo sada da za svaki šesterokut vrijedi da, na koji god način obojali svaku od stranica i dijagonala pravilnog šesterokuta u plavu ili crvenu boju, mora postojati barem jedan trokut čiji su vrhovi ujedno vrhovi tog šesterokuta i čije su stranice sve obojane u istu boju.

Uočimo jedan vrh tog šesterokuta, nazovimo ga A. Iz njega izlazi pet spojnica s drugim vrhovima koje su obojane ili u plavu ili u crvenu boju.

Kako je $5 = 2 \cdot 2 + 1$, prema Dirichletovom principu, postoji boja takva da su barem tri takve spojnice obojane u tu boju. Npr. neka je to crvena boja.



Označimo vrhove koji određuju te spojnice s vrhom A npr. s B , C i D , pa su crvene spojnice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$.

Ako je barem jedna od spojnica $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ ili $\overline{CD}$ obojana u crvenu boju, imamo istobojni (crveni) trokut.

Ako nije, onda je trokut $\triangle BCD$ istobojan (plavi).

Napomena: Ukoliko učenik ne promatra slučaj $n = 4$, ali promatra slučaj $n = 5$ i pokaže da je moguće obojiti peterokut tako da niti jedan trokut nema istobojne stranice, ne gubi bodove.