HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 12. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 2024\}$.

Odredi sve funkcije $f\colon S \to \mathbb{N}$ takve da za sve $m, n \in S$ vrijedi

$$2m(f(m) + f(n)) = \sum_{k=0}^{f(m)} f(n+k).$$

Prvo rješenje.

Neka je f funkcija koja zadovoljava uvjet zadatka.

Pretpostavimo da je $f(m_1) = f(m_2) = c$ za $m_1 \neq m_2$ iz S. Ako uvrstimo m_1 i m_2 umjesto m, te bilo koji $n \in S$, dobijemo da je desna strana u oba slučaja jednaka $f(n)+f(n+1)+\ldots+f(n+c)$, a lijeve strane su različite. Točnije, imamo

$$2m_1(c + f(n)) \neq 2m_2(c + f(n)).$$

Dakle, došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo da je f injekcija.

Promotrimo jednakost iz zadatka za parove $(m, n+1)$ i (m, n) za proizvoljne $m, n \in S$. Imamo

$$\begin{aligned} 2m(f(m) + f(n)) &= f(n) + f(n+1) + \ldots + f(n + f(m)) \\ 2m(f(m) + f(n+1)) &= f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+1+f(m)). \end{aligned}$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo

$$2m(f(n+1) - f(n)) = f(n+1+f(m)) - f(n), \tag{1}$$

jer se članovi oblika $f(n+k)$ za $k = 1, \ldots, f(m)$ pojavljuju na obje desne strane, pa se pokrate.

Pretpostavimo da je $f(n+1) < f(n)$ za neki $n \in S$. Onda je u (1) lijeva strana negativna i manja od $-2m$, a desna strana je veća od $-f(n)$. Ako odaberemo m takav da je $2m > f(n)$, dobivamo kontradikciju. Dakle, $f(n+1) \geqslant f(n)$ za svaki $n \in S$, a zbog injektivnosti je onda i $f(n+1) > f(n)$. Dakle, f je strogo rastuća.

Vratimo se u početnu jednakost. Imamo

$$\begin{aligned} 2m(f(m) + f(n)) &= f(n) + f(n+1) + \ldots + f(n + f(m)) \\ &> (f(m)+1)f(n) \end{aligned}$$

jer je funkcija strogo rastuća. Ta nejednakost je ekvivalentna s

$$f(n)(2m - 1 - f(m)) > -2mf(m).$$

Ako je $f(m) > 2m-1$ za neki $m \in S$, onda je lijeva strana manja od $-f(n)$, odnosno $f(n) < 2mf(m)$. Međutim, kako je f strogo rastuća, tako $f(n)$ poprima proizvoljno velike vrijednosti, pa dobivamo kontradikciju. Dakle, $f(m) \leqslant 2m-1$ za svaki prirodan broj m.

Promotrimo sada početni izraz za $m = n$. Imamo

$$4mf(m) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(m + f(m)).$$

Desnu stranu možemo ograditi odozgo sumom

$$(2m-1)+(2m+1)+\ldots+(2(m+f(m))-1) = (m+f(m))^2-(m-1)^2 = f(m)^2+2mf(m)+2m-1,$$

gdje smo koristili činjenicu da je suma prvih k neparnih brojeva jednaka k^2. Dakle, imamo nejednakost

$$4mf(m) \leqslant f(m)^2 + 2mf(m) + 2m - 1,$$

koja je ekvivalentna s

$$(f(m) - 1)(2m - 1 - f(m)) \leqslant 0.$$

Ova nejednakost može vrijediti samo za $f(m) = 1$ ili $f(m) = 2m-1$, pa je $f(m) \in \{1, 2m-1\}$ za svaki $m \in S$.

Ako je $f(m) = 1$ za neki $m \in S$, onda uvrštavanjem (m, m) dobivamo

$$4m = 4mf(m) = f(m) + f(m+1) = 1 + f(m+1) \leqslant 2m + 2 < 4m,$$

kontradikcija. Dakle, $f(m) = 2m - 1$ za svaki $m \in S$.

Preostaje provjeriti da ta funkcija zadovoljava uvjet iz zadatka. Lijeva strana je jednaka

$$2m(2m + 2n - 2),$$

a desna strana je

$$(2n-1) + (2n+1) + \ldots + 2(n+2m-1) - 1 = (n+2m-1)^2 - (n-1)^2 = 2m(2m+2n-2),$$

pa ta funkcija stvarno jest rješenje zadatka.

Drugo rješenje.

Dokaz da je f strogo rastuća injekcija te da je $f(m) \leqslant 2m-1$ je isti kao u prvom rješenju.

Pretpostavimo da je $f(n+1) = f(n) + 1$ za neki $n \in S$. Sada uvrstimo $(n+1, n)$ i $(n, n+1)$ u početnu jednadžbu i dobivamo

$$2(n+1)(2f(n)+1) = \sum_{k=0}^{f(n)+1} f(n+k),$$

$$2n(2f(n)+1) = \sum_{k=0}^{f(n)} f(n+1+k).$$

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo $2(2f(n)+1) = f(n)$, što je kontradikcija. Prema tome, imamo $f(n+1) \geqslant f(n) + 2$ za svaki $n \in S$.

Sada promotrimo izraz (1):

$$2m(f(n+1) - f(n)) = f(n+1+f(m)) - f(n).$$

Uvrstimo $m = n$ u taj izraz, dobivamo

$$2m(f(m+1) - f(m)) = f(m+1+f(m)) - f(m).$$

Kako je $f(m+1+f(m)) \leqslant 2m + 2f(m) + 1$, desna strana je manja ili jednaka $2m + f(m) + 1$. S druge strane, iz $f(m+1) \geqslant f(m) + 2$ slijedi da je lijeva strana barem $4m$, pa imamo

$$4m \leqslant 2m + f(m) + 1,$$

odnosno $f(m) \geqslant 2m - 1$ za svaki $m \in S$.

Kako otprije imamo suprotnu nejednakost, slijedi $f(m) = 2m - 1$ za svaki $m \in S$. Provjera da je ta funkcija stvarno rješenje zadatka je ista kao u prvom rješenju.

Treće rješenje.

Dokaz da je f strogo rastuća injekcija te da je $f(m) \leqslant 2m - 1$ je isti kao u prvom rješenju.

Sada primijetimo da je desna strana početne jednakosti zbog stroge rastućosti ograničena odozgo s $(f(m)+1)f(n+f(m))$, odnosno imamo

$$2mf(m) + 2mf(n) \leqslant (f(m)+1)f(n+f(m)). \tag{2}$$

Dokažimo sada pomoćnu tvrdnju.
Lema. Za svaki realan broj $c > 1$ i svaki prirodan broj d, postoji $n \in S$ takav da je

$$f(n+d) < cf(n).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, onda za svaki n osim konačno mnogo vrijedi $f(n+d) \geqslant cf(n)$, pa je

$$2n + 2kd - 1 \geqslant f(n+kd) \geqslant c^k f(n) \geqslant c^k$$

za svaki prirodan broj k. Međutim, lijeva strana je linearna po k, a desna strana je eksponencijalna, pa za dovoljno velik k dobivamo kontradikciju.

□

Podijelimo sada (2) sa $f(n)$. Imamo

$$\frac{2mf(m)}{f(n)} + 2m \leqslant (f(m)+1)\frac{f(n+f(m))}{f(n)}.$$

Sada fiksirajmo m, i promotrimo proizvoljan $c > 1$, te primijenimo dokazanu tvrdnju na $d = f(m)$.

Onda je desna strana za neki $n \in S$ manja od $c(f(m)+1)$. S druge strane, lijeva strana je veća od $2m$, pa imamo

$$\frac{2m}{f(m)+1} < c.$$

Kako je $c > 1$ bio proizvoljan, slijedi $2m \leqslant f(m) + 1$ odnosno $f(m) \geqslant 2m - 1$.

Kako otprije imamo suprotnu nejednakost, slijedi $f(m) = 2m - 1$ za svaki $m \in S$. Provjera da je ta funkcija stvarno rješenje zadatka je ista kao u prvom rješenju.

Zadatak 2.

Antun i Bernarda igraju igru u kojoj naizmjence biraju uređene parove brojeva. Bernarda počinje igru i bira uređeni par $(n, 1)$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Ako je prethodni igrač odabrao uređeni par (a, b), igrač na potezu bira jedan od parova $(a-b, b)$ i $(a-2b, 2b)$. Igru gubi igrač koji odabere par u kojem je jedan od brojeva negativan.

Za koliko prirodnih brojeva $n < 2^{100}$ Antun može osigurati pobjedu neovisno o tome kako Bernarda igra nakon svog prvog poteza?

Rješenje.

Definirajmo funkciju $P\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ rekurzivno na sljedeći način. Neka je $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ te

$$P(n) := \begin{cases} 1 & \text{ako } P(n-1) = 0 \text{ ili } P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

za $n \geqslant 2$. Za $a \in \mathbb{N}_0$ te $b \in \mathbb{N}$ neka je par (a, b) *pobjednički* ukoliko Antun može osigurati pobjedu kada igra počinje s (a, b), a *gubitnički* inače.

Tvrdnja 1. Ako je $P(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor) = 1$, tada je par (a, b) pobjednički, a inače je gubitnički.

Dokaz. Indukcijom po $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Ako je $a < b$, tada je par (a, b) gubitnički jer nije moguće napraviti potez, dok $P(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor) = P(0) = 0$. Ako je $a \geqslant b$, primijetimo da je (a, b) pobjednički ako i samo ako je barem jedan od parova $(a-b, b)$, $(a-2b, 2b)$ gubitnički. Kako je $\lfloor \frac{a-b}{b} \rfloor = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor - 1$ te $\lfloor \frac{a-2b}{2b} \rfloor = \lfloor \frac{a}{2b} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{1}{2} \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \rfloor - 1$, tvrdnja sada slijedi iz pretpostavke indukcije te definicije funkcije P. $\square$

Tvrdnja 2. Za sve $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $P(2k+1) = 1$.

Dokaz. Indukcijom po k. Tvrdnja je jasna za $k = 0$ pa pretpostavimo da $k \geqslant 1$. Ako je $P(2k) = 0$, tada je $P(2k+1) = 1$ te smo gotovi. Inače je $P(2k) = 1$, a po pretpostavci indukcije vrijedi $P(2k-1) = 1$ pa mora biti $P(k-1) = 0$. No tada po definiciji slijedi $P(2k+1) = 1$, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Za $k \in \mathbb{N}$ označimo $I_k := [2^k - 2, 2^{k+1} - 2) \cap \mathbb{Z}$.

Tvrdnja 3. Za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{n \in I_k \cup I_{k+1}} P(n) = 2^{k+1}$.

Dokaz. Zbog Tvrdnje 2 imamo

$$\sum_{n \in I_{k+1}} (1 - P(n)) = \left| \left\{ n \in I_{k+1} \middle| n \equiv 0 \pmod{2},\ P\left(\frac{n}{2} - 1\right) = 1 \right\} \right| = \sum_{n \in I_k} P(n),$$

odakle slijedi tvrdnja jer $|I_{k+1}| = 2^{k+1}$. $\square$

Tvrdnja 4. Ako je k paran, tada je $P(2^k - 2) = 1$, a inače je $P(2^k - 2) = 0$.

Dokaz. Indukcijom po k. Za $k = 1$, tvrdnja je jasna. Za $k \geqslant 2$, iz Tvrdnje 2 slijedi $P(2^k - 3) = 1$. Dakle, $P(2^k - 2) = 1$ ako i samo ako vrijedi $P(2^{k-1} - 2) = 0$ pa tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije. $\square$

Konačno, iz Tvrdnji 2 i 4 imamo $P(2^{100} - 1) = 1 = P(2^{100} - 2)$ pa koristeći Tvrdnju 3 dobivamo

$$\sum_{n=1}^{2^{100}-1} P(n) = P(1) + \sum_{k=2}^{99} \sum_{n \in I_k} P(n) + P(2^{100} - 2) + P(2^{100} - 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= 3 + \sum_{\ell=1}^{49} \sum_{n \in I_{2\ell} \cup I_{2\ell+1}} P(n) \\
&= 3 + \sum_{\ell=1}^{49} 2^{2\ell+1} \\
&= \frac{2^{101}+1}{3},
\end{aligned}
$$

a to je po Tvrdnji 1 odgovor na pitanje u zadatku.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AC| > |BC|$ i neka je D točka na dužini $\overline{AC}$ takva da vrijedi $|BC| = |CD|$. Označimo s N nožište okomice iz točke D na pravac AB. Neka je k opisana kružnica trokuta ABC i neka je r njen polumjer. Na pravcu DN odabrana je točka P tako da vrijedi $|PD| = r$, a D se nalazi između N i P. Neka je Q drugo sjecište pravca BD s kružnicom k. Okomica iz točke A na pravac CP i okomica iz točke B na pravac PQ sijeku se u točki K. Dokaži da je točka K na kružnici k.

Rješenje.

Koristimo standardne oznake za kutove trokuta $\triangle ABC$. Uočimo da je dovoljno dokazati da je $\sphericalangle AEB = \gamma$, tada će $ABCE$ biti tetivan pa će E biti na kružnici k.

Kutevi $\sphericalangle DQC$ i $\sphericalangle AEB$ su kutovi s okomitim kracima pa je dovoljno dokazati $\sphericalangle DQC = 180° - \gamma$.

Uočimo i da je $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DBC = \sphericalangle CPB = \sphericalangle DPA$ pa je $|DP| = |DA|$.

Neka je O centar kružnice k. Znamo da je $|PQ| = |BO| = R$. Znamo i po uvjetu zadatka da je $|BC| = |CP|$. Imamo $\sphericalangle QPC = \sphericalangle APS = 90° - \alpha$. Također je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ kao središnji kut nad $\overline{BC}$. Zato je $\sphericalangle OBC = 90° - \alpha/2 = \sphericalangle QPC$ jer je $\triangle BOC$ jednakokračan.

Sada možemo zaključiti da je $\triangle BOC \cong \triangle PQC$ po SKS poučku. Slijedi $\sphericalangle PQC = 2\alpha$.

Promotrimo jednakokračan trokut $\triangle AOD$. Imamo da je $\sphericalangle DAO = 90° - \sphericalangle AOD/2 = 90° - \sphericalangle ABD = \sphericalangle SPB = \sphericalangle DPQ$.

Kada to kombiniramo s $|DA| = |DP|$ i $|PQ| = |AO| = R$, imamo da je $\triangle AOD \cong \triangle DQP$ po SKS poučku.

Kako je $\triangle BCP$ jednakokračan, imamo $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CBP = 90° - \gamma/2$. Uočimo da je $\sphericalangle DPQ = 180° - \sphericalangle QPC - \sphericalangle CPB = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \gamma/2) = \alpha + \gamma/2$.

Zato je $\sphericalangle DQP = 180° - 2\sphericalangle DPQ = 180° - 2\alpha - \gamma$. Slijedi $\sphericalangle DQC = \sphericalangle DQP + \sphericalangle PQC = 180° - \gamma$ pa je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Neka su k i n prirodni brojevi takvi da vrijedi $k \leqslant 2n$. Dokaži da je

$$2^{2n+2} + 2^{k+2} + 1$$

kvadrat prirodnog broja ako i samo ako vrijedi $k = n$.

Rješenje.

Uočimo da je $(2^{n+1}+1)^2 = 2^{2n+2}+2^{n+2}+1$. Kada bi bilo $m < n$, vrijedilo bi $(2^{n+1}+1)^2 = 2^{2n+2}+2^{n+2}+1 > 2^{2n+2}+2^{m+2}+1 > (2^{n+1})^2$. Tada $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ sigurno nije kvadrat jer je između dva potpuna kvadrata.

Dakle, $m \geqslant n$. Uočimo da za $m = n$ vrijedi $2^{2n+2}+2^{m+2}+1 = (2^{n+1}+1)^2$. Neka je $m > n$.

Imamo $2^{2n+2}+2^{m+2}+1 = k^2$, tj. $2^{m+2}(2^{2n-m}+1) = (k-1)(k+1)$.

Kad bi bilo $2n = m$, imali bismo $(k-1)(k+1) = 2^{m+3}$. Zato su $k-1$ i $k+1$ potencije od 2, a jedine potencije od 2 koje se razlikuju za 2 su 2 i 4. Zato bi bilo $m = 0$, što nije pozitivan broj.

Dakle, $2^{2n-m}+1$ je neparan. Uočimo da su $k-1$ i $k+1$ iste parnosti pa su oba parni. Od dva uzastopna parna broja, jedan neće biti djeljiv s 4. Kako 2^{m+2} dijeli $(k-1)(k+1)$, slijedi da 2^{m+1} dijeli $k-1$ ili $k+1$.

Neka 2^{m+2} dijeli $k-1$. Onda je $k = 2^{m+1}t+1$ za neki pozitivan cijeli broj t, pa je

$$2^{m+2}(2^{2n-m}+1) = 2^{m+2}t(2^m t+1).$$

Dakle, imamo $2^{2n-m} = t(2^m t+1)-1$. Kako je $m > n$, vidimo da je:

$$2^n > 2^{2n-m} = t(2^m t+1)-1 \geqslant 2^m > 2^n.$$

To je kontradikcija.

Neka 2^{m+2} dijeli $k+1$. Onda je $k = 2^{m+1}t-1$ za neki pozitivan cijeli broj t, pa je

$$2^{m+2}(2^{2n-m}+1) = 2^{m+2}t(2^m t-1).$$

Dakle, imamo $2^{2n-m} = t(2^m t-1)-1$. Kako je $m > n > 0$, vidimo da je:

$$2^n > 2^{2n-m} = t(2^m t-1)-1 \geqslant 2^m-2 \geqslant 2^{m-1} \geqslant 2^n.$$

To je kontradikcija i tvrdnja je dokazana.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 13. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj. Za niz prirodnih brojeva $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, kažemo da je par (i,j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *zlatni* ako vrijedi jednakost

$$a_j^2 - a_i^2 = 2\left(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j\right).$$

Odredi najveći mogući broj zlatnih parova (koji se može postići u nekom nizu od n prirodnih brojeva).

Rješenje.

Fiksiramo neki indeks j i pretpostavimo da postoje dva $i_1 < i_2 < j$ takvi da su (i_1, j) i (i_2, j) parovi koji zadovoljavaju jednakost. Tada imamo

$$a_j^2 - a_{i_1}^2 = 2(a_{i_1} + a_{i_1+1} + \ldots + a_j)$$

$$a_j^2 - a_{i_2}^2 = 2(a_{i_2} + a_{i_2+1} + \ldots + a_j)$$

i oduzimanjem dobivamo

$$a_{i_2}^2 - a_{i_1}^2 = 2(a_{i_1} + a_{i_1+1} + \ldots + a_{i_2-1})$$

Međutim, sada vrijedi:

$$\begin{aligned}
2(a_{i_1} + a_{i_1+1} + \ldots + a_{i_2-1}) &= a_{i_2}^2 - a_{i_1}^2 \\
&= \sum_{k=i_1}^{i_2-1} (a_{j+1}^2 - a_j^2) \\
&= \sum_{k=i_1}^{i_2-1} (a_{j+1} - a_j)(a_{j+1} + a_j) \\
&\geqslant \sum_{k=i_1}^{i_2-1} (a_{j+1} + a_j) \\
&= a_{i_1} + 2a_{i_1+1} + \ldots + 2a_{i_2-1} + a_{i_2}
\end{aligned}$$

što kraćenjem daje $a_{i_1} \geqslant a_{i_2}$, a to je kontradikcija sa rastućosti niza $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Prema tome, za svaki indeks j postoji najviše jedan indeks i za koji je (i, j) par koji zadovoljava jednakost. Kako za $j = 1$ ne postoji niti jedan, može biti najviše $n - 1$ takvih parova.

Jedan primjer gdje $n - 1$ parova i postoji je $a_k = 2k$ za sve $1 \leqslant k \leqslant n$, gdje su parovi svi $(i, i + 1)$ za $1 \leqslant i \leqslant n - 1$. Za njih je

$$a_{i+1}^2 - a_i^2 = (a_{i+1} - a_i)(a_i + a_{i+1}) = 2(a_i + a_{i+1}).$$

Zadatak 2.

Za 2024–člani podskup skupa prirodnih brojeva kažemo da je *skladan* ako umnožak bilo kojih 100 njegovih elemenata dijeli umnožak preostalih 1924 elemenata.

Koliko najviše prostih brojeva može biti u skladnom skupu?

Rješenje.

Tvrdimo da je najveći broj prostih brojeva koje može sadržavati skladan skup jednak 1824. Kroz čitavo rješenje, s $v_p(n)$ označavat ćemo eksponent prostog broja p u rastavu na proste faktore broja prirodnog broja n.

Pokažimo najprije primjerom da postoji skladan skup koji sadrži 1824 prosta broja. Za $k \geqslant 1$ neka je p_k k-ti po redu prost broj. Promotrimo skup

$$S = \{p_k \mid 1 \leqslant k \leqslant 1824\} \cup \{Qp_k \mid 1 \leqslant k \leqslant 200\},$$

pri čemu definiramo $Q = \prod_{k=1}^{1824} p_k$. Jasno je da S ima 2024 elemenata, od kojih je točno 1824 prostih. Neka je $T \subseteq S$ proizvoljan podskup veličine 100. Trebamo dokazati da za svaki prost broj q vrijedi $v_q(\prod_{t\in T} t) \leqslant v_q(\prod_{s\in S\setminus T} s)$, tj. da za sve $1 \leqslant k \leqslant 1824$ imamo $\sum_{t\in T} v_{p_k}(t) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{s\in S} v_{p_k}(s)$. Ako je $k > 200$, tada je $\sum_{s\in S} v_{p_k}(s) = 201$, dok $\sum_{t\in T} v_{p_k}(t) \leqslant 100$ jer $v_{p_k}(s) \leqslant 1$ za sve $s \in S$. Ako je $k \leqslant 200$, tada $\sum_{s\in S} v_{p_k}(s) = 202$ te $\sum_{t\in T} v_{p_k}(t) \leqslant 101$ jer za jedinstven $s \in S$ vrijedi $v_{p_k}(s) = 2$, a za ostale $s \in S$ imamo $v_{p_k}(s) \leqslant 1$.

Pretpostavimo sada da postoji skladan skup S koji sadrži $m \leqslant 199$ brojeva koji nisu prosti. Fiksirajmo prost broj p koji dijeli barem jedan element skupa S te enumerirajmo $S = \{s_1, \dots, s_{2024}\}$ tako da $v_p(s_i) \geqslant v_p(s_{i+1})$ za sve $1 \leqslant i \leqslant 2023$. Budući da $\prod_{i=1}^{100} s_i$ dijeli $\prod_{i=101}^{2024} s_i$, slijedi $\sum_{i=1}^{100} v_p(s_i) \leqslant \sum_{i=101}^{2024} v_p(s_i)$. No, skup S sadrži najviše $m+1$ brojeva koji su djeljivi s p pa slijedi $v_p(s_i) = 0$ za sve $i > m+1$. Dakle, $\sum_{i=1}^{100} v_p(s_i) \leqslant \sum_{i=101}^{m+1} v_p(s_i)$ pa mora vrijediti $m = 199$, $p \in S$ te $v_p(s_1) = \ldots = v_p(s_{m+1}) = 1$. Zbog proizvoljnosti broja p zaključujemo da je svaki broj iz S koji nije prost jednak umnošku svih prostih brojeva iz S, što je kontradikcija.

Zadatak 3.

Kružnice k_1 i k_2, redom sa središtima O_1 i O_2, sijeku se u točkama A i B. Pravac p prolazi točkom B i siječe kružnicu k_1 još u točki C, a kružnicu k_2 još u točki D, pri čemu se točka B nalazi između C i D. Tangenta na kružnicu k_1 u točki C i tangenta na kružnicu k_2 u točki D sijeku se u točki E. Pravac AE siječe opisanu kružnicu trokuta AO_1O_2 u točkama A i F.

Dokaži da duljina $|EF|$ ne ovisi o odabiru pravca p.

Rješenje.

Pokažimo da je četverokut $ACDE$ tetivan. Prema teoremu o kutu između tetive i tangente imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle CED &= 180^\circ - (\sphericalangle DCE + \sphericalangle CDE)\\ &= 180^\circ - (\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD)\\ &= 180^\circ - \sphericalangle CAD.\end{aligned}$$

Nadalje, pokažimo da su trokuti AO_1O_2 i ACD slični.

Korištenjem da su točke O_1 i O_2 na simetrali dužine $\overline{AB}$ te primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu redom računamo:

$$\sphericalangle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_2B = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC.$$

Budući da trokuti dijele vrh A, postoji spiralna sličnost s koja prenosi trokut AO_1O_2 u trokut ACD. Označimo koeficijent te sličnosti sa k.

Neka je H središte opisane kružnice četverokutu $ACDE$ te neka je G drugo sjecište pravca EH i opisane kružnice četverokuta $ACDE$. Pokažimo da se točke H i G nalaze na opisanoj kružnici trokuta AO_1O_2.

Korištenjem da su točke H i O_1 na simetrali dužine $\overline{AC}$ te točke H i O_2 na simetrali dužine $\overline{AD}$ redom imamo

$$\begin{aligned}
\sphericalangle O_1HO_2 &= \sphericalangle AHO_1 + \sphericalangle AHO_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle AHC + \frac{1}{2}\sphericalangle AHD \\
&= \sphericalangle AEC + \sphericalangle AED = \sphericalangle CED \\
&= 180^\circ - \sphericalangle CAD = 180^\circ - \sphericalangle O_1AO_2.
\end{aligned}$$

Time je H zaista na opisanoj kružnici trokuta AO_1O_2.

Nadalje, pokažimo da se točka H slika u točku E pri sličnosti s. Za to nam je dovoljno pokazati da je $\sphericalangle CDE = \sphericalangle O_1O_2H$.

Redom računamo

$$\begin{aligned}
\sphericalangle CDE &= \sphericalangle BAD = 180^\circ - \sphericalangle ABD - \sphericalangle CDA \\
&= \sphericalangle CBA - \sphericalangle CEA = \frac{1}{2}\sphericalangle CO_1A - \frac{1}{2}\sphericalangle CHA \\
&= \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - 2\sphericalangle CAO_1) - \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - 2\sphericalangle CAH) \\
&= \sphericalangle CAH - \sphericalangle CAO_1 = \sphericalangle O_1AH = \sphericalangle O_1O_2H.
\end{aligned}$$

Korištenjem činjenice da se točka H slika u točku E pri spiralnoj sličnosti s redom imamo

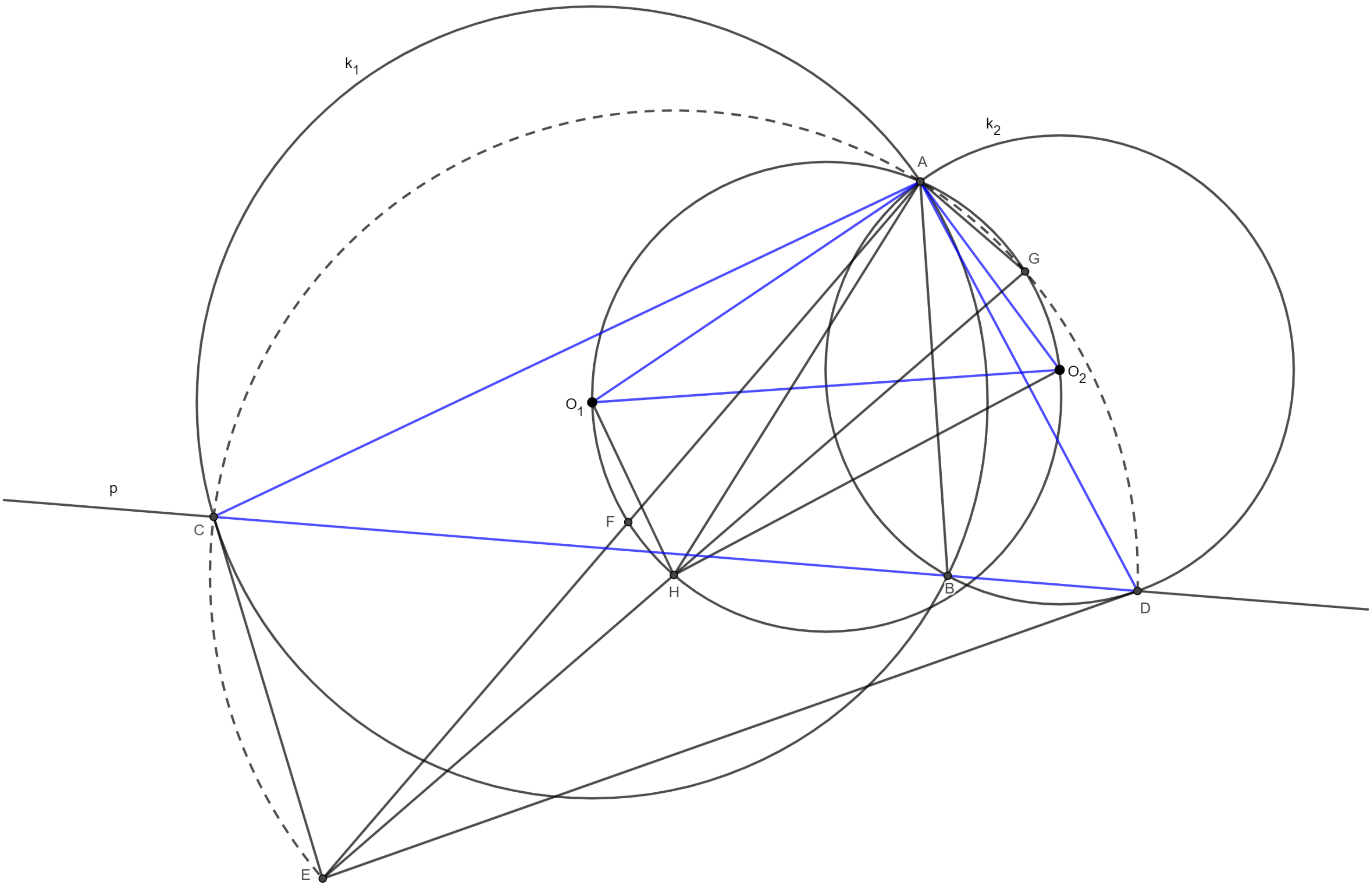
$$\sphericalangle AO_2H = \sphericalangle ADE = \sphericalangle AGE = \sphericalangle AGH$$

iz čega slijedi da je točka G na opisanoj kružnici trokuta AO_1O_2.

Konačno, neka je r polumjer opisane kružnice trokuta AO_1O_2. Iz potencije točke E na opisanu kružnicu trokuta AO_1O_2 slijedi

$$|EF| = \frac{|EH|\cdot|EG|}{|EA|} = \frac{2k^2r^2}{k|AH|} = 2r$$

što ne ovisi o odabiru pravca p.



Zadatak 4.

Neka je n prirodni broj. Za prirodni broj k kažemo da je *dobar za* n ako postoji prirodni broj r takav da je $n < r < k$ i da r dijeli nk.

Dokaži da je najmanji broj dobar za n broj

$$(d+1)\left(\frac{n}{d}+1\right),$$

gdje je d najveći djelitelj broja n koji nije veći od $\sqrt{n}$.

Prvo rješenje.

Primijetimo da za $r = n + d$ imamo

$$n + d \mid n(d+1)\left(\frac{n}{d}+1\right) = \frac{n}{d} \cdot (d+1)(n+d)$$

pa je broj iz zadatka uistinu dobar za n.

Pokažimo da je i najmanji takav. Neka je $n+b$ neki broj dobar za n. Neka je $r = n+a$. Imamo

$$n + a \mid n(n+b)$$

te znamo $a < b$. Oduzimajući sa desne strane $(n+b-a)(n+a)$ imamo

$$n + a \mid n^2 + nb - n^2 - an - bn - ab + an + a^2 = a(b-a).$$

Uzmimo sada $p = M(n, a)$ i $n' = n/p, a' = a/p$. Djeljivost se pretvara u $n' + a' \mid a'(b - pa')$, a kako su $n' + a', a'$ relativno prosti imamo $n' + a' \mid b - pa'$. Kako je $b - pa' = b - a > 0$ po pretpostavci, imamo

$$b \geqslant n' + (p + 1)a'.$$

Fiksiramo li p, minimum izraza sa desne strane se poprima upravo za $a' = 1$, ali ako uzmemo $b = \frac{n}{p} + p + 1$ (što je upravo jednako $n' + p + 1$) uvjet zadatka je ispunjen za $a = p$ (to jest $a' = 1$) pa je dovoljno minimizirati njega, znajući da je p neki djelitelj n. Međutim, imamo

$$b = \frac{n}{p} + p + 1 = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} - \sqrt{p}\right)^2 + 2\sqrt{n} + 1$$

pa se minimum postiže za p najbliži $\sqrt{n}$, a to je upravo d.

Drugo rješenje.

Primijetimo da za $r = n + d$ imamo

$$n + d \mid n(d + 1)\left(\frac{n}{d} + 1\right) = \frac{n}{d} \cdot (d + 1)(n + d)$$

pa je broj iz zadatka uistinu dobar za n.

Pokažimo da je i najmanji takav. Neka je $n+b$ neki broj dobar za n. Neka je $r = n+a$. Imamo $n + a \mid n(n + b)$, te znamo $a < b$.

Onda je omjer $\frac{n(n+b)}{n+a}$ veći od n. Označimo ga s $n + c$. Imamo

$$n(n + b) = (n + a)(n + c) = n(n + a + c) + ac,$$

pa n dijeli ac. Dokažimo sada dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 1. Ako su a, c, n prirodni brojevi takvi da $n \mid ac$, onda postoje prirodni brojevi a_1, c_1 takvi da $a_1 \mid a$, $c_1 \mid c$ i $n = a_1c_1$.
Dokaz. Promotrimo prost broj p koji dijeli n. Neka su p^α, p^β i p^γ najveće potencije od p koje dijele a, b, n redom. Tada je $\alpha + \beta \geqslant \gamma$. Uzmimo da je a_1 djeljiv točno s $p^{\min(\alpha,\gamma)}$, te da je c_1 djeljiv točno s $p^{\gamma-\min(\alpha,\gamma)}$. Tako napravimo za svaki p koji dijeli n, i stavimo da a_1 i c_1 nisu djeljivi ni s jednim drugim prostim brojem. Lako vidimo da je onda $a_1c_1 = n$.

Lema 2. Ako je $a_1c_1 = n$ za neke prirodne brojeve a_1 i c_1, onda je $a_1 + c_1 \geqslant d + \frac{n}{d}$.
Dokaz. Funkcija $f(x) = x + \frac{n}{x}$ je padajuća na $(0, \sqrt{n}]$. Naime, za $0 < x < y \leqslant \sqrt{n}$ imamo

$$f(y) - f(x) = (y - x)\left(1 - \frac{n}{xy}\right) < 0,$$

jer je $xy < n$. Iz toga slijedi tvrdnja jer je $\min(a_1, c_1)$ manji ili jednak d, pa je $f(\min(a_1, c_1)) \geqslant f(d)$.

Iz ove dvije leme direktno slijedi da je $a + c \geqslant d + \frac{n}{d}$. Onda je

$$n(n + b) > n(n + a + c) > n\left(n + d + \frac{n}{d}\right),$$

pa je

$$n + b \geqslant n + d + \frac{n}{d} + 1 = (d + 1)\left(\frac{n}{d} + 1\right),$$

kao što je i trebalo dokazati.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 26. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(y)f(1 + xf(y)) + xf(y^2) = 2yf(xy) + f(f(y)).$$

Prvo rješenje.

Uvrštavanje $(x, 0)$ daje

$$f(0)f(1 + xf(0)) + xf(0) = f(f(0)).$$

U slučaju da $f(0) \neq 0$, odmah iz prethodnog imamo da je f linearna funkcija sa ne-nula slobodnim članom. Direktnom provjerom ili uvrštavanjem $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ dobivamo kontradikciju. Prema tome, imamo da je $f(0) = 0$.

Neka je $f(t_0) = 0$ za neki $t_0 \neq 0$. Uvrštavanjem (x, t_0) dobijamo $xf(t_0^2) = 2t_0 f(xt_0)$ i $x = 1$ daje $f(t_0^2) = 0$, ali tada je $f(xt_0) = 0$ za sve x pa je $f \equiv 0$, što je jedno rješenje.

Uvrštavanjem $(0, y)$ dobivamo $f(f(y)) = f(y)f(1)$, a $(1, 1)$ daje

$$f(1)f(1 + f(1)) + f(1) = 2f(1) + f(f(1)) = 2f(1) + f(1)^2$$

što se preuredi u

$$f(1)(f(1 + f(1)) - 1 - f(1)) = 0.$$

Dijeljenjem s $f(1) \neq 0$, imamo $f(1 + f(1)) = 1 + f(1)$. Sada $(0, 1 + f(1))$ daje

$$(1 + f(1))(1 - f(1)) = 0$$

i imamo dva slučaja.

Ako je $f(1) = -1$, imamo $f(f(y)) = -f(y)$ te uvrštavanjem $(x, 1)$ u početnu jednadžbu i primjenom prethodnog imamo

$$-f(1 - x) - x = 2f(x) + 1.$$

Zamjenom x i $1 - x$ dobivamo

$$-f(x) + x - 1 = 2f(1 - x) + 1$$

i rješavanjem sustava imamo $f(x) = -x$.

Ako je $f(1) = 1$, vrijedi $f(f(y)) = f(y)$ i uvrštavanjem $(x, 1)$ imamo

$$f(1 + x) = 2f(x) - x + 1$$

i primjenom obje tvrdnje na početnu jednakost dobivamo

$$2f(y)f(xf(y)) + xf(y^2) = 2yf(xy) + xf(y)^2.$$

Daljnja uvrštavanja se odnose na ovu jednadžbu. Korištenje $(1, y)$ daje $f(y^2) = 2yf(y) - f(y)^2$ što opet možemo primijeniti na početnu jednakost da bi dobili

$$f(y)f(xf(y)) + xyf(y) = yf(xy) + xf(y)^2$$

Daljnja uvrštavanja se odnose na ovu jednadžbu. Preko prethodnog izraza za $f(y^2)$ uvrštavanjem $f(y)$ umjesto y imamo $f(f(y)^2) = f(y)^2$, a zatim uvrštavanjem $(f(y), y)$ imamo

$$f(y)^3 + yf(y)^2 = yf(yf(y)) + f(y)^3$$

pa dobivamo $f(yf(y)) = f(y)^2$. Uvrštavanje (y, y) daje

$$f(y)^3 + y^2f(y) = yf(y^2) + yf(y)^2 = 2y^2f(y)$$

pa dobivamo $f(y)^2 = y^2$. Konačno, uvrstimo li to na obje strane izraza za $f(y^2)$, imamo

$$f(y)^2 = f(f(y)^2) = f(y^2) = 2yf(y) - f(y)^2 = 2yf(y) - y^2$$

to jest $(f(y) - y)^2 = 0$ pa je $f(y) = y$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Provjerom, nulfunkcija te funkcije $f(x) = x, f(x) = -x$ jesu rješenja jednadžbe.

Drugo rješenje.

Rješavanje slučajeva kad je $f(1) \in \{0, 1\}$ ili kad je $f(0) \neq 0$ je isto kao u prvom rješenju, kao i provjera rješenja.

U slučaju kad je $f(1) = -1$, imamo $f(f(y)) = -f(y)$ (pa i $f(-1) = 1$) što primjenom f daje i $f(-f(y)) = f(y)$ i početna jednadžba postaje

$$f(y)f(1 + xf(y)) + xf(y^2) + f(y) = 2yf(xy)$$

i daljnja uvrštavanja se odnose na ovu jednadžbu. Uvrštavanjem $(x, -1)$ dobivamo

$$f(1 + x) = x - 1 - 2f(-x)$$

što koristimo sa $x = f(y)$ da bismo dobili $f(1 + f(y)) = -1 - f(y)$. Uvrštavanje $(1, y)$ uz korištenje tog izraza sad daje $f(y^2) = f(y)(2y + f(y))$, iz čega imamo $f(f(y)^2) = -f(y)^2$ i $f(-f(y)^2) = f(y)^2$. Koristeći izraz za $f(1 + x)$ tako dobivamo i $f(1 + f(y)^2) = -1 - f(y)^2$. Uvrštavanje $(f(y), y)$ daje

$$-f(y)(1 + f(y)^2) + f(y)^2(2y + f(y)) + f(y) = 2yf(yf(y))$$

što povlači $f(yf(y)) = f(y)^2$, a analogno sa $(-f(y), y)$ dobivamo $f(-yf(y)) = -f(y)^2$. Tada možemo izračunati

$$f(1 + yf(y)) = yf(y) - 1 - 2f(y)^2$$

iz izraza za $f(1 + x)$ i uvrštavanje (y, y) daje

$$yf(y)^2 - f(y) - 2f(y)^3 + yf(y)(2y + f(y)) + f(y) = 2yf(y)^2$$

pa imamo $f(y)^2 = y^2$, te primjenom f i $f(y^2) = -f(y)^2 = -y^2$. Konačno, imamo

$$-y^2 = f(y^2) = f(y)(2y + f(y)) = 2yf(y) + f(y)^2$$

što daje $(f(y) + y)^2 = 0$ pa je $f(y) = -y$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.

Za tročlani podskup skupa prirodnih brojeva kažemo da je *jeftin* ako u njemu postoje dva broja koja su relativno prosta te dva broja od kojih jedan dijeli drugoga.

Dan je prirodni broj n. Koliko najviše jeftinih tročlanih podskupova može imati skup koji sadrži točno $2n+1$ prirodnih brojeva?

Prvo rješenje.

Svaki tročlani skup prirodnih brojeva koji sadrži broj 1 je jeftin, pa ako je S skup koji ne sadrži 1, onda skup S' dobiven uklanjanjem bilo kojeg elementa iz S i dodavanjem broja 1 sigurno nema manje jeftinih podskupova od S. To znači da bez smanjenja općenitosti možemo promatrati samo skupove koji sadrže 1.

Tvrdimo da je odgovor n^3+n^2-n. Primjer skupa s $2n+1$ elemenata za koji se taj broj jeftinih podskupova postiže je

$$\{1, 2, 4, \ldots, 2^n, 3, 9, \ldots, 3^n\}.$$

Tada su jeftini podskupovi svi oni koji sadrže 1, kojih ima $n(2n-1)$, te svi oblika $\{2^a, 2^b, 3^c\}$ ili $\{2^a, 3^b, 3^c\}$ kojih ima $2 \cdot n \cdot \binom{n}{2} = n^3 - n^2$.

Promotrimo sada bilo koji skup S brojeva većih od 1 koji ima $2n$ elemenata. Trebamo dokazati da S nema više od $n^3 - n^2$ jeftinih podskupova.

Promotrimo graf čiji vrhovi su elementi S, a povezani su crvenim bridom ako jedan dijeli drugog i plavim bridom ako su relativno prosti. Dopunimo graf proizvoljno crvenim i plavim bridovima tako da između svaka dva vrha postoji točno jedan brid.

Tada je broj jeftinih podskupova manji ili jednak broju trokuta u grafu koji nisu svi plavi i nisu svi crveni. Takve trokute ćemo zvati raznobojnima.

Za par bridova kažemo da je dobar ako nisu iste boje i dijele vrh. Tada je dvostruki broj raznobojnih trokuta jednak broju parova dobrih bridova, jer svaki raznobojni trokut sadrži točno dva para dobrih bridova.

Za fiksan vrh x, neka su $c(x)$ i $p(x)$ redom broj crvenih odnosno plavih bridova kojima je x jedan od vrhova. Tada je $c(x) + p(x) = 2n - 1$, a broj dobrih parova bridova kojima je x zajednički vrh je

$$c(x)p(x) \leqslant \left(\frac{c(x)+p(x)}{2}\right)^2 = n^2 - n + \frac{1}{4},$$

odnosno manji je ili jednak $n^2 - n$. Sumiranjem po svim x, dobivamo da je ukupan broj dobrih parova bridova najviše

$$2n(n^2 - n) = 2(n^3 - n^2),$$

pa je ukupan broj raznobojnih trokuta najviše $n^3 - n^2$, pa je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje.

Konstrukcija i argumentacija da je dovoljno promatrati $2n+1$-člane skupove koji sadrže 1 je ista kao u prvom rješenju.

Promotrimo sada bilo koji skup S brojeva većih od 1 koji ima $2n$ elemenata. Trebamo dokazati da S nema više od $n^3 - n^2$ jeftinih podskupova.

Za $x \in S$, označimo sa $f(x)$ broj elemenata $S \setminus \{x\}$ relativno prostih sa x, sa $g(x)$ broj elemenata $S \setminus \{x\}$ koji dijele x, sa $h(x)$ broj elemenata $S \setminus \{x\}$ djeljivih s x i sa $j(x)$ broj preostalih elemenata $S \setminus \{x\}$. Primijetimo da za svaki x vrijedi

$$f(x) + g(x) + h(x) + j(x) = 2n - 1.$$

Za jeftin podskup kažemo da je tipa A ako u njemu postoji samo jedan par brojeva koji se međusobno dijele, i da je tipa B ako u njemu postoje dva para brojeva koji se međusobno dijele. Neka su a i b redom broj jeftinih podskupova tipa A i B, i neka je $c = a + b$ ukupan broj jeftinih podskupova.

Prebrojimo za fiksan $x \in S$ koliko ima parova $(y, z) \in S^2$ takvih da $x \mid y$ i da je x relativno prost sa z, odnosno koliko ima jeftinih trojki oblika $\{x, y, z\}$ gdje x dijeli neki element trojke. Njih ima $f(x)h(x)$ jer na $f(x)$ načina biramo y, a na $h(x)$ načina biramo z.

Sada tvrdimo da je

$$\sum_{x \in S} f(x)h(x) = a + 2b = c + b.$$

Zaista, vidimo da lijeva strana zapravo broji koliko ukupno ima parova koji se dijele u svim jeftinim podskupovima, a to je upravo jednako $a + 2b$.

Prebrojimo sada za fiksan $x \in S$ koliko ima jeftinih podskupova $\{x, y, z\}$ tipa A u kojima y dijeli x. Ima ih najviše $g(x)(f(x) + j(x))$, jer y možemo izabrati na $g(x)$ načina, a z ne dijeli x i nije djeljiv s x.

Sumiranjem po svim $x \in S$, dobivamo

$$\sum_{x \in S} g(x)(f(x) + j(x)) \geqslant a = c - b.$$

Zbrajanjem jednakosti i nejednakosti koje smo izveli, dobivamo

$$\sum_{x \in S} f(x)h(x) + g(x)(f(x) + j(x)) \geqslant 2c.$$

Sada iskoristimo sljedeći niz nejednakosti za svaki $x \in S$:

$$\begin{aligned} f(x)h(x) + g(x)(f(x) + j(x)) &\leqslant (f(x) + j(x))(g(x) + h(x)) \\ &\leqslant \left(\frac{(f(x) + g(x) + h(x) + j(x)}{2}\right)^2 = n^2 - n + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Prva nejednakost je očita, a druga je AG nejednakost. Zaključujemo da je pribrojnik u sumi za svaki x manji ili jednak $n^2 - n$. Kako ima $2n$ pribrojnika, dobivamo nejednakost

$$2n(n^2 - n) \geqslant 2c,$$

odnosno $c \leqslant n^3 - n^2$, kao što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3.

Neka je ABC raznostranični šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| > |BC|$. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki X. Na toj kružnici nalazi se točka Y takva da je CA simetrala kuta $\sphericalangle YCB$. Neka je D nožište okomice iz B na AY. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{XY}$ sijeku se u točki E, a dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ u točki K. Ako je T točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je TK simetrala kuta $\sphericalangle ETD$, dokaži da je TK okomito na AB.

Rješenje.

Neka je Y' osnosimetrična slika od Y s obzirom na pravac AC. Uočimo da će zbog uvjeta na točku Y točka Y' ležati na BC i na kružnici promjera $\overline{AC}$. Dakle, Y' je nožište okomice iz A na BC.

Iz simetrije i tetivnosti redom imamo:

$$\sphericalangle AY'E = \sphericalangle AYE = \sphericalangle ACX = 90^\circ - \alpha.$$

Dakle, $\sphericalangle EY'C = \alpha = \sphericalangle EAB$ pa je zato $AEY'B$ tetivan iz čega slijedi da je E nožište okomice iz B na AC.

Označimo s F presjek BE i AY. Iz gornjeg imamo da je sada točka K ortocentar trokuta $\triangle AFB$.

Neka njegova visina iz F siječe $\overline{AB}$ u T'. Želimo dobiti $T \equiv T'$. Znamo po lemi o nožišnom trokutu da je $\sphericalangle DT'K = \sphericalangle KT'E$.

Promotrimo kružnice oko tetivnih četverokuta $AT'KD$ i $T'BEK$. Uočimo da je svaka točka dužine $\overline{AB}$ unutar točno jedne od tih kružnica, osim točke T'.

Ako je T unutar prve kružnice, tada je izvan druge pa je tada:

$$\sphericalangle DTK > \sphericalangle DT'K = \sphericalangle KT'E > \sphericalangle KTE.$$

To je kontradikcija s uvjetom zadatka i analogno se riješi drugi slučaj. Slijedi da T mora biti baš na sjecištu tih kružnica pa je $T \equiv T'$.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje postoje prirodni brojevi a, b, c i d takvi da je

$$\frac{m^a}{n^b} + \frac{n^c}{m^d}$$

prirodan broj, ali broj $\dfrac{m^a}{n^b}$ nije prirodan.

Rješenje.

Za prost broj p i cijeli broj x, sa $\nu_p(x)$ označimo najveći cijeli broj $a \geqslant 0$ takav da $p^a \mid x$. Primijetimo da vrijedi $\nu_p(x^e) = e\nu_p(x)$ za prirodne brojeve e.

Pretpostavimo da m, n, a, b, c, d zadovoljavaju uvjete zadatka.

Kako $\frac{m^a}{n^b}$ nije cijeli broj, postoji prost broj p takav da je $\nu_p(m^a) < \nu_p(n^b)$. Da bi zbroj

$$\frac{m^a}{n^b} + \frac{n^c}{m^d}$$

bio cijeli, i za drugi pribrojnik mora vrijediti da u nazivniku ima broj djeljiv s p, odnosno $\nu_p(n^c) < \nu_p(m^d)$. Koristeći spomenuto svojstvo ν_p, dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a\nu_p(m) &< b\nu_p(n), \\ c\nu_p(n) &< d\nu_p(m). \end{aligned}$$

Iz toga slijedi $\nu_p(m), \nu_p(n) \neq 0$, pa možemo pomnožiti nejednakosti, i dobivamo

$$ac\nu_p(m)\nu_p(n) < bd\nu_p(m)\nu_p(n),$$

odnosno $ac < bd$.

Pretpostavimo sada da za neki prost broj q vrijedi $\nu_q(m^a) > \nu_q(n^b)$, odnosno da dijeli brojnik razlomka dobivenog potpunim kraćenjem

$$\frac{m^a}{n^b}.$$

Onda taj prost broj ne može dijeliti nazivnik razlomka dobivenog potpunim kraćenjem $\frac{n^c}{m^d}$, pa je $c\nu_q(n) \geqslant d\nu_q(m)$.

Međutim, sada imamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a\nu_q(m) &> b\nu_q(n), \\ c\nu_q(n) &\geqslant d\nu_q(m). \end{aligned}$$

Iz toga slijedi $\nu_q(m), \nu_q(n) \neq 0$, a množenjem nejednakosti dobivamo

$$ac\nu_q(m)\nu_q(n) > bd\nu_q(m)\nu_q(n),$$

odnosno $ac > bd$, što je kontradikcija. Dakle, $\frac{m^a}{n^b} = \frac{1}{k}$ za neki prirodan broj $k > 1$. Analogna tvrdnja vrijedi i za drugi pribrojnik, $\frac{n^c}{m^d} = \frac{1}{\ell}$ za neki prirodan broj $\ell > 1$. Jedini način da $\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}$ bude cijeli broj je ako je $k = \ell = 2$. Iz toga imamo jednadžbe

$$\begin{aligned} 2m^a &= n^b, \\ 2n^c &= m^d. \end{aligned}$$

Množenjem dobivamo $m^{a+d} = n^{b+c}$, pa je $m^{b(a+d)} = n^{b(b+c)} = 2^{b+c}m^{a(b+c)}$, iz čega vidimo da je m potencija broja 2. Po simetriji, isto vrijedi i za n.

Neka je $m = 2^x$ i $n = 2^y$. Onda imamo

$$\begin{aligned} 2^{ax+1} &= 2^{by}, \\ 2^{cy+1} &= 2^{dx}, \end{aligned}$$

odnosno $ax + 1 = by$ i $cy + 1 = dx$. Ako x i y nisu relativno prosti, ove jednadžbe nemaju rješenja.

Ako jesu, onda uzmimo bilo koji prirodan broj a takav da je $ax+1$ djeljiv s y i bilo koji prirodan broj c takav da je $cy + 1$ djeljiv s x. Poznato je da takvi brojevi postoje, a onda pripadne b i d definiramo tako da gornje jednadžbe budu zadovoljene.

Dakle, parovi (m, n) koji su rješenja zadatka su svi oblika $(2^x, 2^y)$ za relativno proste prirodne brojeve x i y.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 26. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy) = \max\{f(x), f(y)\} \cdot \min\{x, y\}.$$

Prvo rješenje.

Uvrštavanje (x, x) daje $f(x^2) = xf(x) = -xf(-x)$ pa imamo da je f neparna. Sada možemo uvrstiti $(-x, -y)$ i vrijedi

$$\begin{aligned} f(xy) &= \max(f(-x), f(-y)) \cdot \min(-x, -y) \\ &= -\max(-f(x), -f(y)) \cdot \max(x, y) \\ &= \min(f(x), f(y)) \cdot \max(x, y). \end{aligned}$$

Sada uzmimo neki $x \geqslant 1$ i uvrstimo $(x, 1)$. Imamo

$$f(x) = \max(f(x), f(1))$$

pa mora vrijediti $f(x) \geqslant f(1)$ ali iz jednakosti koju smo dobili vrijedi i

$$f(x) = \min(f(x), f(1)) \cdot x = xf(1)$$

za sve $x \geqslant 1$. Uzmimo sada neki $y \in \langle 0, 1\rangle$ i uvrstimo $(\frac{1}{y}, y)$. Imamo

$$f(1) = \max\left(\frac{f(1)}{y}, f(y)\right) \cdot y = \frac{\min\left(\frac{f(1)}{y}, f(y)\right)}{y}.$$

Ako je $f(1) \leqslant yf(y)$ za neki takav y, vrijedi $f(1) = yf(y) = \frac{f(1)}{y^2}$ pa je $f(1) = 0$ i $f(x) = 0$, prvo za sve $x \geqslant 1$ zbog prethodno dobivenog, pa za $y \in \langle 0, 1\rangle$ zbog prethodne jednakosti, a zatim i za sve $x \in \mathbb{R}$ po neparnosti.

U suprotnom, imamo $f(1) \geqslant yf(y)$ za sve $y \in \langle 0, 1\rangle$ te vrijedi $f(y) = yf(1)$ za sve $y \in \langle 0, 1\rangle$ te po neparnosti imamo $f(x) = xf(1)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Provjerom dobivamo da jednakost vrijedi za sve funkcije oblika $f(x) = cx$ gdje je $c \geqslant 0$ i gotovi smo.

Drugo rješenje.

Dobijemo neparnost i
$$f(xy) = \min(f(x), f(y)) \cdot \max(x, y)$$
isto kao u prvom rješenju. Pomnožimo li ovu jednakost sa početnom, dobivamo
$$f(xy)^2 = xyf(x)f(y).$$

Pretpostavimo da $f(t_0) = 0$ za neki $t_0 \neq 0$. Tada je $f(t_0 y)^2 = 0$ za sve $y \in \mathbb{R}$ pa je f nulfunkcija, što jest rješenje. Inače, imamo da je $f(x) \neq 0$ za sve $x \neq 0$ pa stavljanjem $y = 1$ u tu jednakost imamo $f(x)^2 = xf(x)f(1)$ što daje $f(x) = xf(1)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Provjera je ista kao u prvom rješenju.

Zadatak 2.

Neka su m i n prirodni brojevi, $m, n > 1$. U svakom polju ploče dimenzija $m \times n$ nalazi se jedan novčić. Svaki novčić ima dvije strane - pismo i glavu.

Jedan *potez* sastoji se od sljedećeg:

(i) Odaberemo 2×2 potkvadrat na ploči.

(ii) Preokrenemo točno tri novčića u tom potkvadratu:

- novčić u gornjem lijevom polju
- novčić u donjem desnom polju
- jedan od novčića u gornjem desnom i donjem lijevom polju (po izboru).

Ako na početku svi novčići pokazuju pismo, odredi sve parove (m, n) za koje se konačnim nizom poteza može postići da svi novčići pokazuju glavu.

Rješenje.

Traženi su parovi oni takvi da $3 \mid m$ ili $3 \mid n$.

Dokažimo prvo nužnost. Označimo retke brojevima $0, 1, \ldots, m-1$ odozgo prema dolje, a stupce brojevima $0, 1, \ldots, n-1$ slijeva nadesno. Obojimo polje svako polje (i, j) bojom $k \in \{0, 1, 2\}$ takvom da je $i + j \equiv k \pmod 3$. Ključno je primijetiti da se u svakom potezu mijenja parnost broja glava na poljima svake boje. S obzirom da su ti brojevi na početku iste parnosti (svi su jednaki 0), isto mora vrijediti i na kraju. Dakle, brojevi polja svih boja moraju imati istu parnost. No, vrijedi sljedeće:

Tvrdnja. Za svake dvije boje, brojevi polja tih boja razlikuju se za najviše 1.

Dokaz. Indukcijom po $m + n$, gdje su m, n nenegativni cijeli brojevi (ako je $m = 0$ ili $n = 0$, ploču tretiramo kao praznu). Ako je $m \geqslant 3$, tada se u posljednja tri retka svaka boja pojavljuje jednak broj puta jer su posljednja tri polja u svakom stupcu različitih boja. Dakle, tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije za ploču dimenzija $(m - 3) \times n$. Sličan zaključak vrijedi i u slučaju kada $n \geqslant 3$. U preostalom slučaju, kada je $m \leqslant 2$ i $n \leqslant 2$, tvrdnju je lako provjerti direktno. $\square$

Zbog Tvrdnje slijedi da svakom bojom mora biti obojan jednak broj polja, dakle $3 \mid mn$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada dovoljnost. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $3 \mid n$. Dokazat ćemo da konačnim nizom poteza možemo preokrenuti sva polja u proizvoljnom retku, odakle će ponavljanjem ovog postupka za svaki redak slijediti tvrdnja. Kako $3 \mid n$ te $m \geqslant 2$, u tu je svrhu dovoljno dokazati da u proizvoljnom 2×3 potpravokutniku možemo preokrenuti sva polja iz gornjeg/donjeg retka. Za donji redak, možemo napraviti oba poteza u lijevom 2×2 potkvadratu te onaj koji uključuje donje lijevo polje u desnom 2×2 potkvadratu. Tvrdnja za gornji redak dokazuje se analogno.

Zadatak 3.

Neka je O središte opisane kružnice k trokuta ABC u kojem je $|AB| > |BC|$.

Kružnica k_1 prolazi točkama O i B, a pravac AB joj je tangenta. Neka se kružnice k i k_1 sijeku još i u točki P, $P \neq B$. Kružnica k_2 prolazi točkama P i C, a pravac AC joj je tangenta. Neka se kružnice k_1 i k_2 sijeku još u točki M, $M \neq P$.

Dokaži da je $|MP| = |MC|$.

Rješenje.

Prvo želimo pokazati da vrijedi $M \in BC$. Možemo računati:

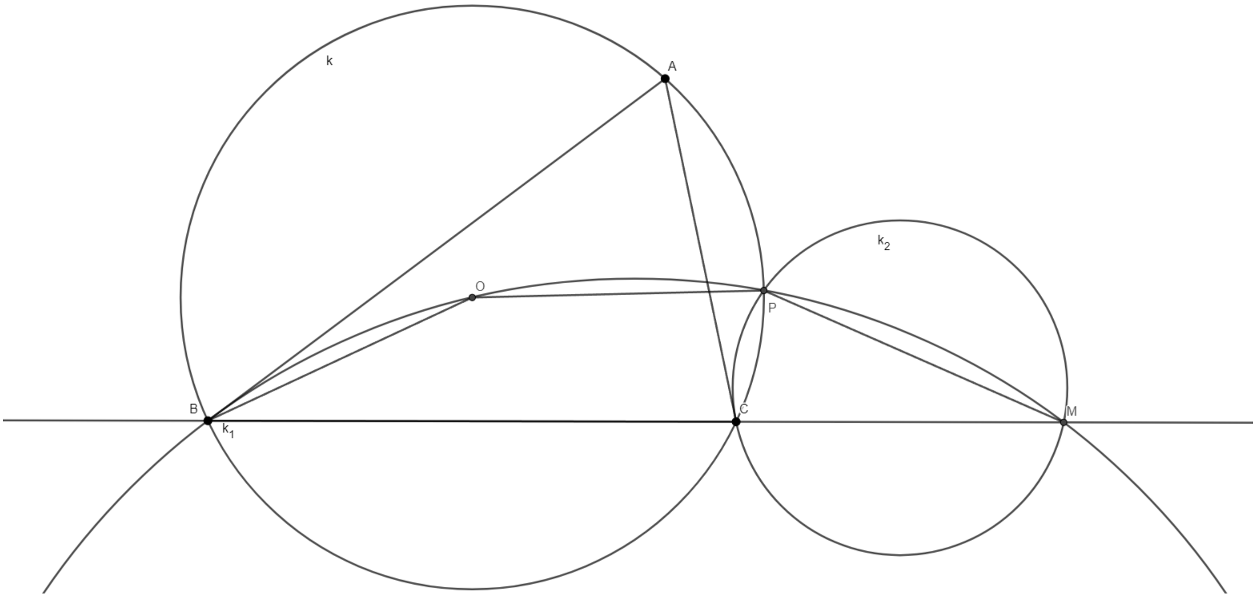
$$\sphericalangle PMC = 180^\circ - \sphericalangle ACP = \sphericalangle ABP = 180^\circ - \sphericalangle PMB$$

pa tvrdnja vrijedi. Koristili smo kut tangente i tetive pa tetivnost četverokuta $ABPC$ i zatim još jednom kut tangente i tetive.

Nadalje, dovoljno je pokazati da je $\sphericalangle MCP = \sphericalangle MPC$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}\sphericalangle MPC &= 180^\circ - \sphericalangle PMC - \sphericalangle MCP = \sphericalangle PMB - \sphericalangle MCP \\ &= \sphericalangle POB - \sphericalangle MCP = 2\sphericalangle PCB - \sphericalangle MCP \\ &= \sphericalangle MCP.\end{aligned}$$

Koristili smo obodni kut nad tetivom $\overline{PB}$ i poučak o obodnom i središnjem kutu. Ovime je tvrdnja dokazana.



Zadatak 4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, p) takve da je p prost i da vrijedi

$$n(n+1)(n+p)(n+p+1)p^6m^2 = (4n+3)^6(p+1)^2(p-4)^2.$$

Rješenje.

Ako je $p = 2$, vidimo da je lijeva strana djeljiva s 2^6, a desna nije djeljiva s 8, kontradikcija.

Neka je sada $p > 2$. Onda p ne dijeli $p+1$ ni $p-4$, pa $p \mid 4n+3$.

Promotrimo sada lijevu stranu jednadžbe. Ona je potpun kvadrat, pa je i broj

$$n(n+1)(n+p)(n+p+1)$$

potpun kvadrat. Međutim, primijetimo da je $n(n+p+1)+p = (n+1)(n+p)$, pa ako sa t označimo broj $n(n+p+1)$, slijedi da je $t(t+p)$ potpun kvadrat. Ako $p \mid t$, onda je broj $\frac{t}{p} \cdot \left(\frac{t}{p}+1\right)$ kvadrat, što je nemoguće jer umnožak dva uzastopna prirodna broja nikad nije kvadrat. Dakle, $p \nmid t$. Onda je $\gcd(t, t+p) = 1$ pa su brojevi t i $t+p$ oba kvadrati.

Neka je sada

$$\begin{aligned} t &= x^2, \\ t+p &= y^2 \end{aligned}$$

za prirodne brojeve x, y. Oduzimanjem dobivamo $(y-x)(y+x) = y^2 - x^2 = p$, iz čega slijedi da je nužno $y - x = 1$, $y + x = p$, iz čega imamo $x = \frac{p-1}{2}$.

Dakle, vrijedi

$$n(n+p+1) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Pomnožimo obje strane s 4. Dobivamo

$$4n^2 + 4np + 4n = (p-1)^2.$$

Reducirajmo obje strane modulo p. Vrijedi

$$4n^2 + 4n \equiv 1 \pmod{p},$$

odnosno $p \mid 4n^2 + 4n - 1$. Znamo otprije da $p \mid 4n + 3$. Oduzimanjem slijedi

$$p \mid 4n^2 - 4,$$

odnosno $p \mid (n-1)(n+1)$. Ako je $n \equiv 1 \pmod{p}$, onda $p \mid 4 + 3 = 7$ pa je $p = 7$. Ako je $n \equiv -1 \pmod{p}$, onda $p \mid -4 + 3 = -1$, kontradikcija. Dakle, $p = 7$ je jedina mogućnost.

Tada imamo $n(n+8) = 3^2$, odnosno $n = 1$. Provjerom u početnoj jednadžbi vidimo da treba vrijediti

$$1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7^6 \cdot m^2 = 7^6 \cdot 8^2 \cdot 3^2.$$

Iz toga lako vidimo da jednakost vrijedi za $m = 2$, pa je $(2, 1, 7)$ jedino rješenje zadatka.