HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 10. svibnja 2025.

Zadatak 1.

Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC u kojem je $|BC| > |AC|$, te neka je N nožište okomice iz točke A na dužinu $\overline{CM}$. Neka je P točka na pravcu AN takva da je PB okomito na CB.

Ako vrijedi $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CBA$, dokaži da je $\sphericalangle BAC = 90°$.

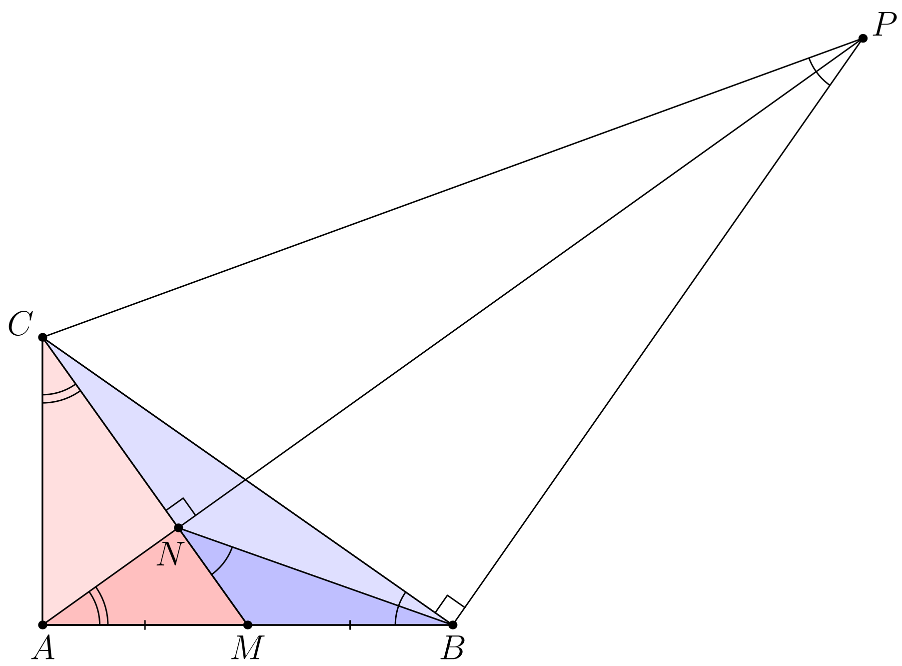
Prvo rješenje.

Četverokut $BPCN$ je tetivan jer je $\sphericalangle PNC = 90° = \sphericalangle PBC$.

Time imamo da je

$$\sphericalangle MNB = \sphericalangle CPB = \sphericalangle CBA$$

iz čega slijedi da su trokuti NMB i BMC slični prema K–K poučku o sličnosti trokuta.



Iz gornje sličnosti redom imamo

$$|MN| \cdot |MC| = |MB|^2 = |MA|^2$$

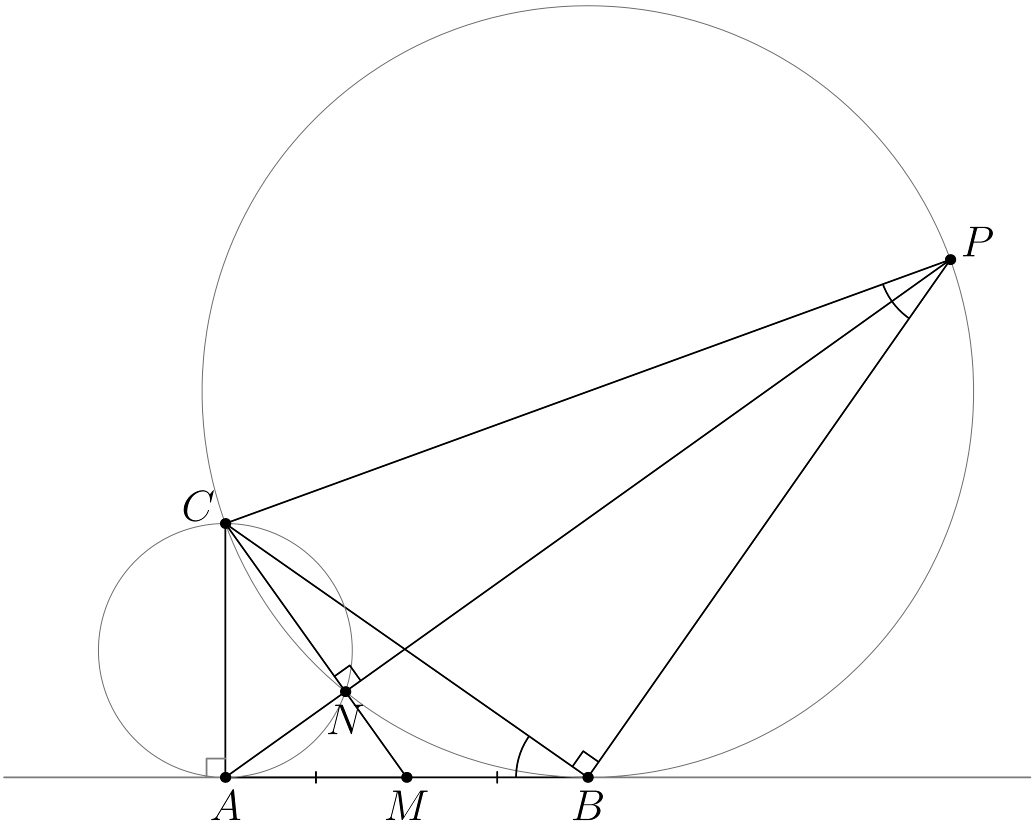
iz čega slijedi da je $\dfrac{|MN|}{|MA|} = \dfrac{|MA|}{|MC|}$ pa su trokuti AMN i CMA slični prema S–K–S poučku o sličnosti trokuta.

Konačno, iz gornje sličnosti slijedi da je $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ACM$ te redom imamo

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle MAN + \sphericalangle NAC = \sphericalangle ACN + \sphericalangle NAC = 90°.$$

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju četverokut $BPCN$ je tetivan. Neka je ω_A opisana kružnica trokuta $\triangle BCN$. Po obratu teorema o tetivi i tangenti zbog $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CBA$ imamo da je pravac AB tangenta na kružnicu ω_A u točki B.



Označimo sa ω_B opisanu kružnicu $\triangle ANC$. Uočimo da je M na radikalnoj osi kružnica ω_A i ω_B. Kako je M polovište stranice $\overline{AB}$ to je

$$|MA|^2 = |MB|^2 = |MN| \cdot |MC|.$$

Dakle $|MA|^2$ je potencija točke M na ω_B, stoga je $|MA|$ tangenta na ω_B. Po teoremu o tetivi i tangenti sljedi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CNA = 90°$.

Zadatak 2.

Leon ima 99 praznih vreća i za svaki cijeli broj n neograničenu količinu kuglica mase 3^n.

Leon je rasporedio u vreće konačno mnogo kuglica tako da nijedna vreća ne bude prazna i da masa kuglica u svakoj vreći bude ista. Pritom nije iskoristio više od k kuglica iste mase. Koja je najmanja moguća vrijednost k?

Prvo rješenje.

Skaliranjem možemo postići da su mase izabranih kuglica jednake $1, 3, 3^2, \ldots, 3^n$. Neka je $a_{i,j}$ broj kuglica mase 3^i u j-toj vreći. Tada je $\sum_{j=1}^{99} a_{i,j} \leqslant k$ za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Nadalje, postoji broj a takav da je

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i,j} 3^i = a$$

za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, 99\}$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{99} a_{i,j} 3^i = 99a.$$

Kako je $\sum_{j=1}^{99} a_{i,j} \leqslant k$, slijedi $k \cdot (1 + 3 + \ldots + 3^n) \geqslant 99a$. S druge strane, $a \geqslant 3^n$ jer smo izabrali barem jednu kuglicu težine 3^n. Dakle,

$$k \cdot (1 + 3 + \ldots + 3^n) \geqslant 99 \cdot 3^n.$$

Zbrajanjem ovog geometrijskog niza, dobivamo

$$k \geqslant 2 \cdot 99 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3^{n+1} - 1} > \frac{2 \cdot 99}{3} = 66.$$

Primjer u kojem je $k = 67$ je sljedeći.

U prvih 67 vreća je 1 kuglica mase 27, u drugih 22 su 3 kuglice mase 9, u trećih 7 je 9 kuglica mase 3, u predzadnje dvije je 27 kuglica mase 1, a u zadnjoj je ukupno 11 kuglica sa masama $9, 3, 1$, od kojih je jedna mase 9, četiri su mase 3 i šest ih je mase 1.

Ukupno smo iskoristili 67 kuglica mase 27, 67 kuglica mase 9, 67 kuglica mase 3 i 60 kuglica mase 1, pa je $k = 67$.

Drugo rješenje.

Skaliranjem možemo postići da su mase izabranih kuglica jednake $1, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3^n}$. Neka je a_i ukupan broj izabranih kuglica za $i = 0, \ldots, n$ i neka je ukupna masa u svakoj vreći jednaka a. Tada za ukupnu masu T u svih 99 vreća vrijedi

$$T = a_0 + \frac{a_1}{3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} = 99a.$$

Tvrdimo da je $k = 67$. Ako je $k \leqslant 66$, tada je

$$T \leqslant 66 \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) < 66 \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots\right) = 99$$

pa je $a < 1$. Iz toga slijedi da je $a_0 = 0$. To znači da je

$$T \leqslant 66 \left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) < 66 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\right) = 33$$

pa je $a < \frac{1}{3}$. Iz toga slijedi da je $a_1 = 0$ i tako dalje ponavljamo postupak. Dobivamo da su svi a_i jednaki 0 što je kontradikcija s tim da vreće nisu prazne.

Za $k = 67$ postoji konstrukcija sa $a = 1$.

U prvih 67 vreća je 1 kuglica mase 1, u drugih 22 su 3 kuglice mase $\frac{1}{3}$, u trećih 7 je 9 kuglica mase $\frac{1}{9}$, u predzadnje 2 je 27 kuglica mase $\frac{1}{27}$, a u zadnjoj je ukupno 11 kuglica sa masama $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ koje zadovoljavaju

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{27} = 1.$$

Zadatak 3.

Niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u kojem je $a_1 > 1$ zadovoljava relaciju

$$a_{n+1} = a_n + p^n \quad \text{za } n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $p = 2$ ako je a_n potencija broja 2, a inače je p najmanji neparan prosti djelitelj broja a_n. Dokaži da postoji beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva (m, n) uz $m \neq n$ takvih da a_m dijeli a_n.

Rješenje.

Uočimo da se prost broj p iz teksta zadatka ne može povećati kako n raste, osim ako je a_n potencija od 2. Postoje dvije opcije: $p = 2$ se dešava konačno ili beskonačno mnogo puta.

Ako se $p = 2$ dešava beskonačno mnogo puta, tada niz sadrži beskonačno mnogo potencija od 2 pa tvrdnja zadatka slijedi.

Sada pretpsotavimo da se $p = 2$ dešava konačno mnogo puta. Uočimo da ako $p \mid a_n$, tada $p \mid a_{n+1}$. To znači da p u nekom trenutku postaje konstantan jer od nekog trenutka nadalje više ne može biti jednak 2 pa je niz p-ova padajuć.

Neka je p konstantan nakon nekog indeksa $A \geqslant 1$. Odaberimo neki $B > A + 100$ (tako da znamo da je p konstantan već neko vrijeme, za svaki slučaj). Sada ćemo pokazati da $p^{n+1} \nmid a_n$ za sve dovoljno velike $n \geqslant M \geqslant B$.

Pretpostavimo da imamo $p^{N+1} \mid a_N$ za neki $N \geqslant B$. Tada, kako je $a_{N+1} = a_N + p^N$, imamo da $p^{N+1} \nmid a_{N+1}$. Ali, kako $a_{N+2} = a_{N+1} + p^{N+1}$, zaključujemo da $p^{N+1} \nmid a_{N+2}$. Možemo nastaviti induktivno i pokazati da vrijedi $p^{N+1} \nmid a_{N+k}$ za sve $k \geqslant 1$. Ovo pokazuje da $p^{n+1} \nmid a_n$ za sve $n \geqslant N + 1$.

Sada uzmimo $n \geqslant M$, tako da imamo da je p konstantan već neko vrijeme i da $p^{n+1} \nmid a_n$. Imamo $a_{n+k} = a_n + p^n + \ldots + p^{n+k-1}$. Neka je $a_n = p^t m$, $\gcd(m, p) = 1$. Znamo da je $t \leqslant n$.

Tada imamo:

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{m + p^{n-t} + \ldots + p^{n+k-1-t}}{m} = 1 + \frac{p^{n-t}}{m} \cdot \frac{p^k - 1}{p - 1}.$$

Sada odaberimo k oblika $2^C \phi(m)$ za prirodan broj C. Znamo da $p \nmid m$ pa po Eulerovom teoremu imamo $m \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$. Također znamo da $2^{C+1} \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$ jednostavno faktorizirajući:

$$p^{2^C \phi(m)} - 1 = (p^{\phi(m)} - 1)(p^{\phi(m)} + 1)(p^{2\phi(m)} + 1) \ldots (p^{2^{C-1}\phi(m)} + 1).$$

Uočimo da je $\gcd(m, p-1)$ potencija od 2 pošto $m \mid a_n$ i p je najmanji neparan prost djelitelj od a_n. Znamo da $m \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$, $p - 1 \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$ i $2^{C+1} \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$ za svaki C. Tada, ako odaberemo C dovoljno velik, možemo dobiti $m(p-1) \mid p^{2^C \phi(m)} - 1$ iz čega slijedi $a_n \mid a_{n+k}$.

Kako je $n \geqslant M$ bio proizvoljan, tvrdnja zadatka slijedi.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 11. svibnja 2025.

Zadatak 1.

Dokaži da u svakom aritmetičkom nizu prirodnih brojeva postoji beskonačno mnogo članova koji su djelitelji umnoška svih prethodnih članova.

Napomena. Za niz brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *aritmetički* ako je $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$.

Prvo rješenje.

Svaki aritmetički niz prirodnih brojeva možemo zapisati kao $a_n = a(n-1) + b, n \in \mathbb{N}$, za nenegativan cijeli broj a i prirodan broj b. Dakle, treba dokazati da za svaki izbor brojeva a i b postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da

$$an + b \mid b \cdot (a + b) \cdot (2a + b) \cdot \ldots \cdot (a(n-1) + b).$$

Kako je $ak + b \equiv -(n-k)a \pmod{an + b}$, ta tvrdnja je ekvivalentna s

$$an + b \mid (-na) \cdot (-(n-1)a) \cdot \ldots \cdot (-2a) \cdot (-a),$$

odnosno

$$an + b \mid n! \cdot a^n.$$

Neka je p prost broj veći od $a + b$. Tada postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje p dijeli $an + b$. Naime, kako su a i p relativno prosti, slijedi da kongruencija $an \equiv -b \pmod{p}$ ima rješenja, pa ih ima i beskonačno mnogo.

Promotrimo takav prirodan broj n. Vrijedi da je $an + b = px$ za neki prirodan broj x, te je $x < \frac{an+b}{a+b} < n$. Ako dodatno uzmemo n takav da je $an + b \neq p^2$ i $n > p$, onda su p i x različiti brojevi manji od n, pa $an + b = px$ dijeli $n!$, pa dijeli i $n! \cdot a^n$. Takvih brojeva n ima beskonačno mnogo, pa tvrdnja zadatka slijedi.

Drugo rješenje.

Koristit ćemo činjenicu da za svaki aritmetički niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postoje cijeli brojevi a, b takvi da $a_n = an + b$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo prvo da tvrdnja vrijedi u slučaju kada je $b = 1$. Tada moramo pokazati da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$an + 1 \mid \prod_{k=1}^{n-1} (ak + 1) = t_n \cdot a + 1$$

gdje je $t_n \in \mathbb{Z}$, koji postoji jer je umnožak s desne strane kongruentan $1 \pmod{a}$. Lako vidimo da za dovoljno velike n vrijedi $t_n > n$ pa ako promotrimo a_{t_n} imamo da on dijeli (i štoviše iznosi) umnožak svih a_k gdje je $k < n$ (koji svakako dijeli umnožak svih a_k sa $k < t_n$) a kako je t_n strogo rastuć niz imamo i beskonačno takvih članova.

Sada promotrimo slučaj u kojem je $a = ub$ za neki $u \in \mathbb{Z}$. Tada tvrdnja koju želimo pokazati ima oblik

$$b(un+1) \mid \prod_{k=1}^{n-1} b(uk+1) = b^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (uk+1)$$

te dijeljem sa b vidimo da slijedi iz prethodno dokazanje tvrdnje primijenjene na niz $(un+1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Konačno, uzmimo niz $a_n = an + b$ bez ikakve pretpostavke na a, b. Ako sada promotrimo samo one n koji su djeljivi sa b (to jest, gledamo članove niza a_{bn} za $n \in \mathbb{N}$ možemo primijetiti da je umnožak svih a_k sa $k < bn$ također djeljiv sa umnoškom svih a_{bk} gdje je $k < n$ i sveli smo zadatak na prethodno dokazani slučaj.

Treće rješenje.

Kao i u prvom rješenju, neka je $a(n-1)+b$ traženi niz, te neka je $d = \gcd(a, b)$ te $a = Ad$, $b = Bd$. Treba dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje

$$d(nA + B) \mid d^n \cdot B \cdot (A + B) \cdot (2A + B) \cdot \ldots \cdot ((n-1)A + B).$$

Ignoriranjem faktora d, dobivamo da je dovoljno dokazati

$$nA + B \mid B \cdot (A + B) \cdot (2A + B) \cdot \ldots \cdot ((n-1)A + B).$$

Vidimo da desna strana daje ostatak B^n pri dijeljenju s A, pa ako uzmemo $n \equiv 1 \pmod{\varphi(A)}$, onda je desna strana prema Eulerovom teoremu oblika $A \cdot t_n + B$ za neki prirodan broj t_n. Taj t_n je za sve osim konačno mnogo n veći ili jednak n, jer bi inače bilo $B(A+B)(2A+B)\ldots((n-1)A+B) < nA+B$, što je nemoguće jer je $(A+B)((n-1)A+B) \geqslant A+B+(n-1)A+B-1 \geqslant nA+B$.

Međutim, onda je $A \cdot t_n + B$ djelitelj od $B(A+B)\ldots(A(n-1)+B)$, pa je i djelitelj od $B(A+B)\ldots((t_n-1)A+B)$, pa brojevi t_n čine tražen beskonačni skup.

Zadatak 2.

Odredi sve polinome P s realnim koeficijentima takve da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj m takav da vrijedi

$$P(n+1) = P(n) + P(m).$$

Prvo rješenje.

Jedini konstantan polinom koji zadovoljava tvrdnju zadatka je $P = 0$.

Pronađimo sve linearne polinome koji zadovoljavaju tvrdnju zadatka. Neka je $P(x) = ax + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$. Tada je $P(n+1) - P(n) = a$. Dakle, polinom $ax + b$ je rješenje ako i samo ako postoji prirodan broj m za koji je $am + b = a$, odnosno $b = a - am$. Dakle, rješenja stupnja 1 su svi polinomi oblika $P(x) = a(x - m + 1)$ za neki prirodan broj m i realan broj $a \neq 0$.

Neka je sada $\deg P = d \geqslant 2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da P ima vodeći koeficijent jednak 1.

Po pretpostavci zadatka za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m = f(n) \in \mathbb{N}$ za koji je

$$P(n+1) - P(n) = P(f(n)).$$

Kako je P polinom s pozitivnim vodećim koeficijentom, postoji $x_0 \in \mathbb{R}^+$ takav da je $P(n+1) - P(n) > 0$ za svaki $n \geqslant x_0$. Naime, $P(n+1) - P(n)$ možemo zapisati kao

$$dn^{d-1} + a_{d-2}n^{d-2} + \ldots + a_0$$

gdje je $d = \deg P$. Tvrdimo da je to veće od 0 za dovoljno velike n. Naime, dijeljenjem s n^{d-1} dobivamo

$$d + a_{d-2}n^{-1} + \ldots + a_0 n^{-d}.$$

Za n dovoljno velik, možemo postići da je svaki član osim vodećeg po apsolutnoj vrijednosti proizvoljno malen, pa je za dovoljno velik n zbroj svih članova osim vodećeg sigurno veći od $-d$ i tvrdnja slijedi.

Polinom $P(n+1) - P(n)$ je polinom stupnja $d-1$ s pozitivnim vodećim koeficijentom. Stoga i za njega postoji $x_1 \in \mathbb{R}^+$ takav da je $(P(n+1) - P(n))_n$ rastuć niz za $n \geqslant x_1$.

Također, niz $(P(n+1) - P(n))_n$ je neograničen odozgo, odnosno poprima proizvoljno velike vrijednosti.

Iz toga slijedi $P(f(n+1)) > P(f(n))$ za dovoljno velik n, pa i $f(n+1) > f(n)$ za dovoljno velik n. S druge strane, kako je $P(n+1) > P(f(n))$, slijedi $f(n) \leqslant n$. Dakle, niz prirodnih brojeva $(f(n) - n)_n$ je rastuć i omeđen odozgo s 0. Slijedi da postoji prirodan broj c takav da je $f(n) = n - c$ za svaki dovoljno velik prirodan broj n.

Onda za beskonačno mnogo vrijednosti n vrijedi

$$P(n+1) = P(n) + P(n-c).$$

Kako su obje strane izraza polinomi, slijedi i da vrijedi jednakost polinoma

$$P(x+1) = P(x) + P(x-c).$$

Međutim, vodeći koeficijent lijeve strane je 1, a vodeći koeficijent desne strane je 2, kontradikcija. Stoga ne postoje traženi polinomi stupnja većeg ili jednakog 2.

Drugo rješenje.

Provjera za polinome stupnja 0 i 1 je ista kao i u prvom rješenju. Definiramo $f(n)$ kao i u prvom rješenju, te neka je $d \geqslant 2$ stupanj od $P(n)$. Opet pretpostavimo da je vodeći koeficijent od P jednak 1.

Polinom $P(n+1) - P(n)$ je stupnja $d-1$. To znači da svaku realnu vrijednost poprima najviše $d-1$ puta, pa $f(n)$ svaku vrijednost poprima najviše $d-1$ puta. Iz toga slijedi da za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n vrijedi $f(n) \geqslant \frac{n}{d-1}$.

Kao i u prvom rješenju, na intervalu oblika $[x_0, +\infty)$ su polinomi $P(x+1) - P(x)$ i $P(x)$ strogo rastući kao funkcije, pa za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n vrijedi

$$P(n+1) \geqslant P(n) + P\left(\frac{n}{d-1}\right).$$

Međutim, polinom s lijeve strane ima vodeći koeficijent 1, a polinom s desne strane ima vodeći koeficijent strogo veći od 1. Dakle, za dovoljno veliki n je desna strana veća od lijeve i dobivamo kontradikciju.

Zadatak 3.

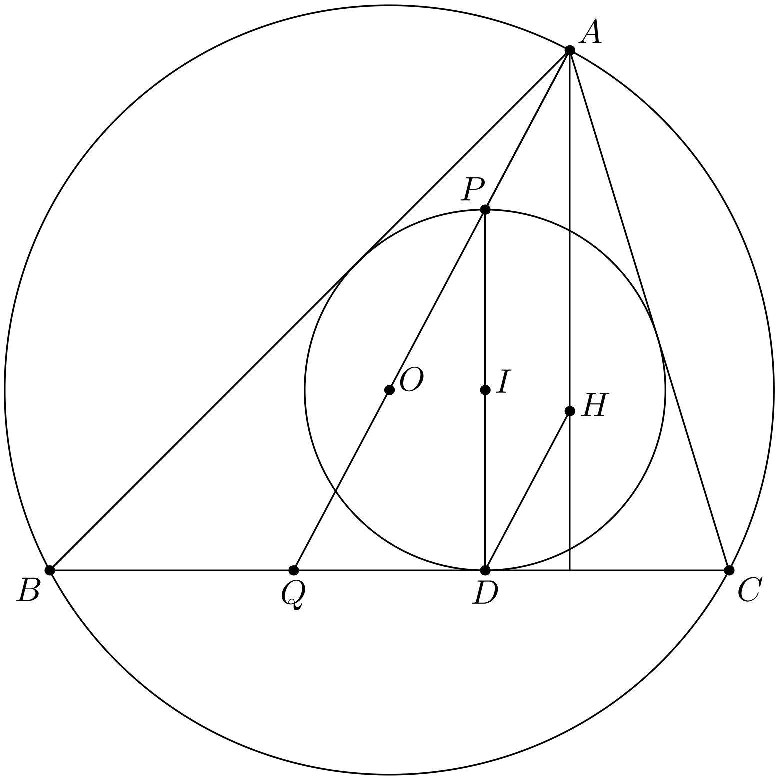
Neka je I središte upisane kružnice, O središte opisane kružnice te H ortocentar trokuta ABC u kojem je kut $\sphericalangle CBA$ manji od kuta $\sphericalangle ACB$. Upisana kružnica dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pretpostavimo da su pravci AO i HD paralelni. Neka se pravci OD i AH sijeku u točki E i neka je F polovište dužine $\overline{CI}$. Dokaži:

a) Pravci OI i BC su paralelni.

b) Točke E, F, I i O pripadaju istoj kružnici.

Rješenje.

a) Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$, točka P presjek pravaca DI i AO te točka Q presjek pravaca AO i BC.



Budući da je četverokut $AHDP$ paralelogram, vrijedi

$$|PD| = |AH| = 2|OM|,$$

pri čemu je zadnja jednakost poznata tvrdnja koja vrijedi u svakom trokutu.

Zbog toga je M polovište dužine $\overline{QD}$ te O polovište dužine $\overline{QP}$.

Iz prve tvrdnje slijedi da je Q dirałište pripisane kružnice te je zbog toga točka P dijametralno suprotna točka točki D u odnosu na upisanu kružnicu trokuta ABC.

Budući da su O i I polovišta stranica trokuta QPD slijedi da su pravci OI i BC paralelni.

b) Dokažimo najprije da se točka E nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Neka je H' osnosimetrična slika točke H preko pravca BC. Poznato je da je točka H' opisanoj kružnici trokuta ABC.

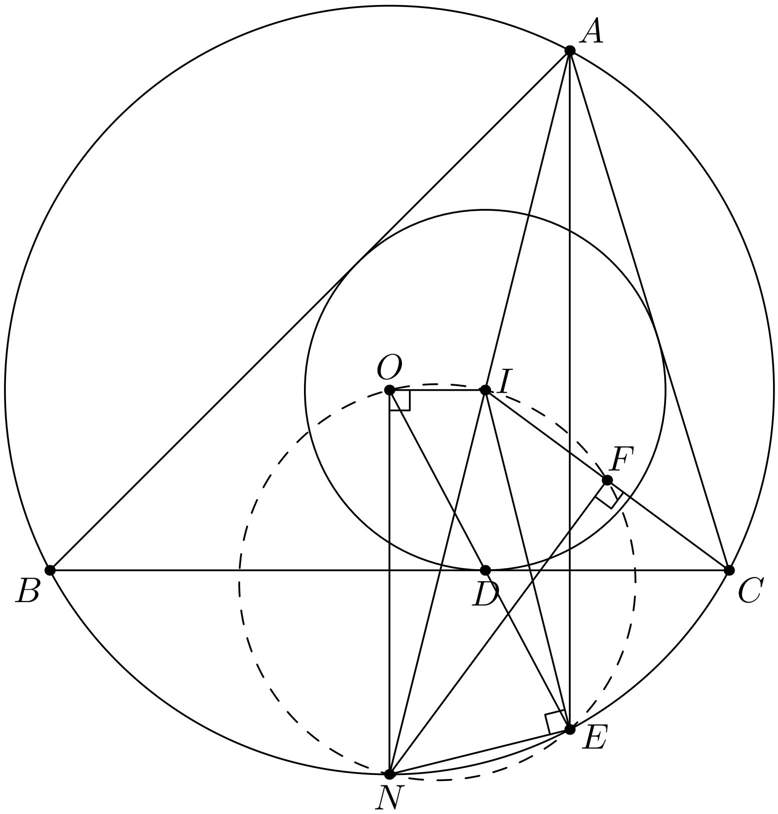
Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle AH'D = \sphericalangle HH'D = \sphericalangle DHH' = \sphericalangle OAH' = \sphericalangle AH'O$$

iz čega slijedi da su točke A, H' i D kolinearne.

Dakle, točka E je upravo točka H' koja leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Naposljetku, dokažimo da točke E, F, I i O leže na istoj kružnici.



Neka je N polovište luka BC kružnice opisane troutu ABC koji ne sadrži vrh A. Tvrdimo da je tražena kružnica upravo kružnica promjer $\overline{IN}$.

Iz a) dijela zadatka slijedi da je $\sphericalangle ION = 90°$.

Iz leme o trozupcu slijedi da je $\sphericalangle IFN = 90°$.

Nadalje, redom možemo izračunati sljedeće kutove:

$$\sphericalangle AEN = \sphericalangle ACN = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCN = \gamma + \frac{\alpha}{2},$$
$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle IAE = \sphericalangle IAC - \sphericalangle EAC = \frac{\alpha}{2} - (90° - \gamma).$$

Dakle, $\sphericalangle IEN = \sphericalangle AEN - \sphericalangle AEI = 90°$

Konačno, kako je $\sphericalangle ION = \sphericalangle IFN = \sphericalangle IEN = 90°$ slijedi da se točke N, E, F, I i O nalaze na kružnici promjera $\overline{IN}$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Treći dan

Zagreb, 17. svibnja 2025.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost

$$m^{f(n)} - n^{f(m)} \leqslant mn.$$

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je jedina takva funkcija $f(n) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za nju vrijedi

$$m^{f(n)} - n^{f(m)} = m - n < m \leqslant mn,$$

pa ona zadovoljava uvjet zadatka.

Pretpostavimo da postoji neka druga funkcija f koja je rješenje zadatka.

Pretpostavimo da je $f(m) = 1$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva m. Uvrstimo proizvoljan n sa $f(n) > 1$, te proizvoljan $m > n$ sa $f(m) = 1$. Vrijedi

$$m^{f(n)} - n \leqslant mn,$$

iz čega slijedi $m^2 - n \leqslant mn$, pa i $m^2 \leqslant n(m+1) \leqslant (m-1)(m+1) < m^2$, kontradikcija. Dakle, ako je $f(m) = 1$ za beskonačno mnogo m, onda je $f(m) = 1$ za sve m.

Zaključujemo da ako je $f(n) \neq 1$ za neki prirodan broj n, onda za sve osim konačno mnogo prirodnih brojeva n vrijedi $f(n) \neq 1$.

Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 1\}$. Dokazat ćemo da S ne može sadržavati dva relativno prosta prirodna broja veća od 1.

Uvrstimo prvo (s^k, s) te (s, s^k) za neki $s \in S$ takav da je $s \geqslant 2$ i $k \geqslant 3$. Dobivamo

$$\left| s^{kf(s)} - s^{f(s^k)} \right| \leqslant s^{k+1}$$

a kako je s lijeve strane $kf(s) > k+1$, mora vrijediti $f(s^k) = kf(s)$, jer je inače lijeva strana strogo veća od s^{k+1} kao razlika potencije s veće od $k+1$ i neke druge potencije s, pa za sve $s \in S$ za koje je $s \geqslant 2$ vrijedi $f(s^k) = kf(s)$ za $k \geqslant 3$.

Neka su sada m i n relativno prosti brojevi iz S koji su veći od 1. Uvrštavanjem (m^k, n^k) dobivamo

$$|m^{k^2 f(n)} - n^{k^2 f(m)}| \leqslant m^k n^k.$$

Lijevu stranu možemo faktorizirati i dobiti

$$|m^{k^2 f(n)} - n^{k^2 f(m)}| = |m^{f(n)} - n^{f(m)}| \cdot (m^{f(n)(k^2-1)} + \ldots + n^{f(m)(k^2-1)}) \geqslant m^{k^2-1} + n^{k^2-1} \geqslant (mn)^{\frac{k^2-1}{2}},$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz A-G, a predzadnja iz toga što $m^{f(n)}$ nije jednako $n^{f(m)}$.

Međutim, za k dovoljno velik je $(mn)^{(k^2-1)/2} > (mn)^k$, pa dobivamo kontradikciju. Dakle, za dva relativno prosta broja m i n, ili je $f(m) = 1$ ili $f(n) = 1$.

Dakle, S sadrži sve osim konačno mnogo prirodnih brojeva, ali ne sadrži nikoja dva relativno prosta broja veća od 1. To je kontradikcija.

Drugo rješenje.

Provjeru, pretpostavku da je S neprazan te dokaz da S sadrži sve osim konačno mnogo prirodnih brojeva provodimo jednako kao u prvom rješenju.

Uvrstimo sada $(2n, n)$ te $(n, 2n)$ za neki $n \in S$ koji nije djeljiv sa $2, 3$ ili 5. Tada imamo

$$\left|(2n)^{f(n)} - n^{f(2n)}\right| \leqslant 2n^2$$

pa kako je broj s lijeve strane neparan i djeljiv sa n^2, imamo $\left|(2n)^{f(n)} - n^{f(2n)}\right| = n^2$. Kako n^3 ne dijeli n^2, mora biti $\min(f(n), f(2n)) = 2$ (jer $n, 2n \in S$).

Ako je $f(2n) = 2$, dobivamo $(2n)^{f(n)} - n^2 = n^2$ pa je $4n^2 \leqslant (2n)^{f(n)} = 2n^2$, što je kontradikcija. Inače, imamo $f(n) = 2$ pa je $|n^{f(2n)} - 4n^2| = n^2$ te vrijedi ili $n^{f(2n)} = 5n^2$ ili $n^{f(2n)} = 3n^2$, ali n nije djeljiv niti sa 3 niti sa 5 pa opet imamo kontradikciju.

Kako u oba slučaja imamo kontradikciju, S je nužno prazan.

Treće rješenje.

Uvrštavanjem $n = 1$ dobivamo $f(1) = 1$. Zbog simetrije možemo pretpostaviti da rješavamo jednadžbu

$$|m^{f(n)} - n^{f(m)}| \leqslant mn.$$

Neka je $n > 6$ broj koji nije potencija broja 2 i $m = 2n$. Tada je

$$|(2n)^{f(n)} - n^{f(2n)}| \leqslant 2n^2$$

pa je ili $f(n) \leqslant 2$ ili $f(2n) \leqslant 2$ jer bi u suprotnom lijeva strana bila djeljiva s n^3 i različita od 0, pa bi bila veća od $2n^2$.

Ako je $f(n) \leqslant 2$, tada slijedi $n^{f(2n)} \leqslant 6n^2$ pa je $f(2n) \leqslant 2$. Ako je $f(2n) \leqslant 2$, tada je $(2n)^{f(n)} \leqslant 3n^2$ pa je $f(n) = 1$.

Dakle, $f(n) = 1$ za sve $n > 6$ koji nisu potencija broja 2.

Pretpostavimo da postoji n sa $f(n) > 1$, te uvrstimo proizvoljan $m > n$ sa $f(m) = 1$. Vrijedi

$$m^{f(n)} - n \leqslant mn,$$

iz čega slijedi $m^2 - n \leqslant mn$, pa i $m^2 \leqslant n(m + 1) \leqslant (m - 1)(m + 1) < m^2$, kontradikcija.

Stoga je jedino rješenje $f \equiv 1$.

Zadatak 2.

Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da je $|AB| = |AD|$. Točke M i N nalaze se redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ i pritom je $|BM| + |DN| = |MN|$. Dokaži da središte opisane kružnice trokuta AMN pripada pravcu AC.

Prvo rješenje.

Napomena: Motivacija za ovo rješenje leži u načinu konstruiranja točaka M i N koje zadovoljavaju jednakost $|DM|+|BN| = |MN|$. Uočimo da za proizvoljno odabranu točku M na stranici $\overline{CD}$ možemo konstruirati točku N na sljedeći način:

odaberemo X na produžetku pravca BC preko B takva da je $|BX| = |MD|$, tada je N dana kao presjek simetrale segmenta $\overline{MX}$ i stranice $\overline{BC}$. Naime trokut MNX je po konstrukciji jednakokračan stoga je

$$|MN| = |NX| = |NB| + |BX| = |NB| + |MD|.$$

Uvedimo točke X i Y redom na produžecima pravaca CB preko B i CD preko D takve da je

$$|BX| = |MD| \quad \text{i} \quad |DY| = |NB|.$$

Zbog jednakosti $|DM| + |BN| = |MN|$ i definicije točaka X i Y po prethodnoj napomeni imamo

$$|YM| = |MN| \quad \text{i} \quad |XN| = |MN|. \tag{1}$$

Iz prethodne jednakosti zaključujemo da su trokuti MNX i NMY jednakokračni.

Nadalje, kako je $ABCD$ tetivan četverokut vrijedi

$$\sphericalangle ABN = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADY.$$

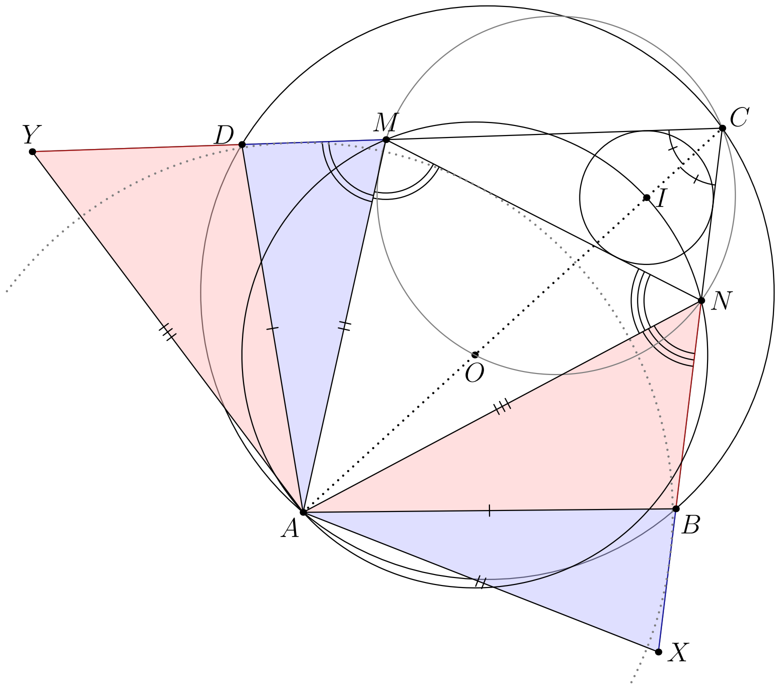
Dodatno, iz uvjeta zadatka imamo $|AB| = |AD|$ što uz $|BN| = |DY|$ i prethodnu jednakost kutova slijedi da su trokuti ABN i ADY sukladni po S–K–S poučku o sukladnosti trokuta.

Analogno imamo da su trokuti ABX i ADM sukladni.

Iz navedenih sukladnosti redom imamo jednakosti

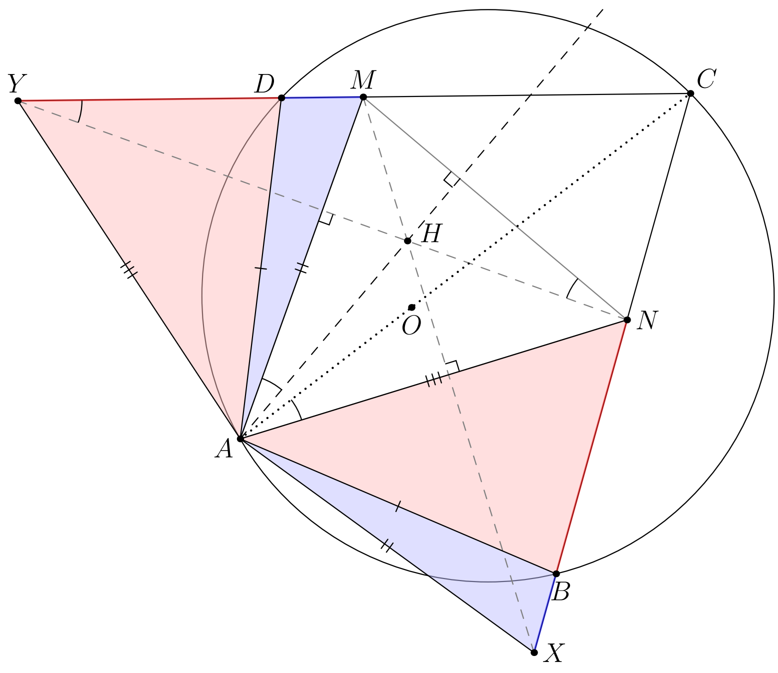
$$|AY| = |AN| \quad \text{i} \quad |AX| = |AM|,$$

što uz (1) povlači da je AM simetrala dužine $\overline{NY}$ i AN je simetrala dužine $\overline{MX}$. Posebno, imamo da su AM i AN redom simetrale kutova $\sphericalangle YMN$ i $\sphericalangle MNX$, odakle zaključujemo da je točka A središte C-pripisane kružnice trokuta CMN. Uvjet $|AB| = |AD|$ povlači da je AC simetrala kuta $\sphericalangle DCB$.



Označimo sa I središte upisane kružnice trokuta CMN. Po lemi o trozupcu imamo da su A, M, I i N na kružnici sa središtem u polovištu kraćeg luka MN opisane kružnice trokutu CMN. Dakle središte opisane kružnice trokuta AMN leži na simetrali kuta $\sphericalangle MCN$, to jest na dijagonali AC četverokuta $ABCD$.

Napomena: Jednom kada se uvedu točke X i Y i dokažu sukladnosti trokuta ABX i ADM te trokuta ADY i ANB, tvrdnja $\sphericalangle NAO = \sphericalangle NAC$ se možemo pokazati na razne načine. Jedan način je prikazan u prethodnom rješenju. Drugi mogući pristup je uvesti ortocentar trokuta $\triangle AMN$. Neka je točka H presjek pravaca NY i MX. Budući da je NY okomito na AM i MX okomito na AN slijedi da je točka H ortocentar trokuta AMN.



Označimo sa O središte opisane kružnice trokuta AMN. Koristeći poznatu činjenicu da su ortocentar i središte opisane kružnice izogonalne konjugate imamo

$$\sphericalangle NAO = \sphericalangle HAM.$$

Iz tetivnost četverokuta kojeg čine točke A , N i nožišta okomica iz A i N redom na stranice $\overline{MN}$ i $\overline{AM}$ dobivamo

$$\sphericalangle HAM = \sphericalangle MNH.$$

Kako je trokut MNY jednakokračan vrijedi da je

$$\sphericalangle MNH = \sphericalangle MNY = \sphericalangle NYM.$$

Nadalje, iz sukladnosti trokuta ADY i ABN imamo

$$\sphericalangle CYA = \sphericalangle DYA = \sphericalangle ANB$$

što povlači tetivnost četverokuta $ANCY$.

Iz navedene tetivnosti je

$$\sphericalangle NYM = \sphericalangle NYC = \sphericalangle NAC$$

Sve zajedno sada imamo da je $\sphericalangle NAO = \sphericalangle NAC$, odakle slijedi tražena kolinearnost točaka A, O i C.

Drugo rješenje.

Kao i u prethodnom rješenju uvodimo točke X, Y i dokazujemo da su trokutovi ABX i ADM te ADY i ANB sukladni. Nadalje, označimo:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sphericalangle ACN = \sphericalangle ACM = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD \\
\theta &= \sphericalangle ANM = \sphericalangle ANB \\
\psi &= \sphericalangle AMN
\end{aligned}$$

Sada lako možemo izračunati, koristeći činjenicu da je O središte opisane kružnice u $\triangle AMN$:

$$\sphericalangle NAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\psi) = 90^\circ - \psi.$$

Također, možemo računati:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle NAC &= 180^\circ - \varphi - \sphericalangle ANC \\
&= 180^\circ - \varphi - (180^\circ - \theta) \\
&= \theta - \varphi.
\end{aligned}$$

Iz sukladnosti trokutova ABX i ADM, ADY i ANB te AMN, AMY, AXN a zatim tetivnosti $ABCD$, vidimo da je

$$\sphericalangle NAM = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BCD) = 90^\circ - \varphi$$

pa imamo, zbog trokuta AMN, da je $(90^\circ - \varphi) + \theta + \psi = 180^\circ$, to jest, $\varphi = \theta + \psi - 90^\circ$. Konačno, time dobivamo

$$\sphericalangle NAC = 90^\circ - \psi = \sphericalangle NAO$$

pa su točke A, O, C kolinearne, što je i trebalo dokazati.

Treće rješenje.

Uočimo da je AC simetrala kuta $\sphericalangle DCB$ jer je $|AB| = |AD|$.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta CMN te neka je O presjek simetrale dužine $\overline{MN}$ i pravca AC.

Dokazat ćemo da je O središte opisane kružnice trokuta ANM iz čega će slijedi tvrdnja zadatka.

Dokažimo najprije da je trokut ANC sličan trokutu MIC.

Budući da je $\sphericalangle CMI = \dfrac{\gamma}{2} = \sphericalangle ACN$, za gornju sličnost dovoljno nam je dokazati da vrijedi

$$\frac{|CM|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|CN|}.$$

Označimo s r polumjer upisane kružnice trokuta CMN, s R polumjer opisane kružnice četverokuta $ABCD$ te s $\gamma = \sphericalangle DCB$.

Primjenom Ptolomejevog teorema na četverokut $ABCD$ slijedi

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC| = |AB| \cdot (|BC| + |CD|),$$

odnosno imamo da je

$$|BC| + |CD| = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB|}.$$

Iz uvjeta $|BN| + |DM| = |MN|$ imamo da je opseg trokuta CMN jednak

$$\begin{aligned} o(CMN) &= |CM| + |CN| + |MN| = |CM| + |CN| + |BN| + |DM| \\ &= (|CN| + |BN|) + (|CM| + |DM|) = |BC| + |CD| \\ &= \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB|}. \end{aligned}$$

Izračunajmo sada duljinu dužine $\overline{CI}$. Imamo sljedeće

$$\begin{aligned} |CI| &= \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2P(CMN)}{o(CMN)\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|CM| \cdot |CN| \sin\gamma}{o(CMN)\sin\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{|CM| \cdot |CN| \cdot |AB|}{|AC| \cdot |BD|}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza za duljinu $|CI|$ u omjer $\dfrac{|CM|}{|CI|} = \dfrac{|AC|}{|CN|}$ i sređivanjem dobivamo da je jednakost tog omjera ekvivalentna jednakosti $\dfrac{|AB|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{|BD|}{\sin\gamma}$.

Primjenom sinusovog poučka na trokutove ABC i BCD redom imamo $\dfrac{|AB|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = 2R = \dfrac{|BD|}{\sin\gamma}$, iz čega slijedi da zaista vrijedi omjer $\dfrac{|CM|}{|CI|} = \dfrac{|AC|}{|CN|}$.

Iz sličnosti trokuta ANC i MIC imamo $\sphericalangle NAI = \sphericalangle NAC = \sphericalangle IMC = \sphericalangle NMI$, iz čega slijedi da je četverokut $ANIM$ tetivan.

Konačno, po lemi o trozupcu točka O je središte opisane kružnice trokuta MNI, a kako je četverokut $ANIM$ tetivan onda je točka O također i središte opisane kružnice trokuta ANM.

Zadatak 3.

Neka je n prirodan broj. Na nogometnom turniru sudjeluje $2n+1$ ekipa, a svake dvije ekipe međusobno igraju po jednu utakmicu. Sve se utakmice igraju na istom terenu, pa nije moguće da se dvije utakmice igraju istovremeno. Nikakvih drugih pravila o redoslijedu odigravanja utakmica nema.

Kažemo da je utakmica između dviju ekipa *ravnopravna* ako su obje ekipe do tada odigrale jednak broj utakmica. Koliko najviše ravnopravnih utakmica može biti odigrano na tom turniru?

Prvo rješenje.

Odgovor je $2n^2$.

Nazovimo utakmicu *neravnopravnom* ako nije ravnopravna. Neka je N ukupan broj utakmica odigranih na turniru. Tada vrijedi $N = \binom{2n+1}{2} = 2n^2 + n$, pa je ekvivalentno pokazati da je najmanji mogući broj neravnopravnih utakmica jednak n. Označimo ekipe s cijelim brojevima od 0 do $2n$ uključivo. Utakmicu između ekipa a i b označimo neuređenim parom $\{a, b\}$. Raspored utakmica možemo prikazati kao niz parova $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_N, b_N\}$ u kojem se svaki par $\{i, j\}$, gdje $1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1$, pojavljuje točno jednom.

Označimo svaku ravnopravnu utakmicu brojem koji odgovara broju prethodno odigranih utakmica za svaki od dva tima. Na taj način, svaka ravnopravna utakmica dobiva oznaku iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$. Primijetimo da su, za svaki k iz tog skupa, utakmice označene s k međusobno disjunktne. Doista, uzmimo dvije ravnopravne utakmice oblika $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, gdje bez gubitka općenitosti pretpostavimo da se $\{a, b\}$ pojavljuje prije $\{a, c\}$ u rasporedu. Tada će tim a imati više odigranih utakmica prije utakmice $\{a, c\}$ nego prije utakmice $\{a, b\}$. Dakle, nije moguće da te dvije utakmice imaju istu oznaku. Slijedi da za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ postoji najviše n utakmica označenih s k. Prema tome, ukupan broj ravnopravnih utakmica je najviše $2n \cdot n = 2n^2$.

Sada dajemo konstrukciju rasporeda s $2n^2$ ravnopravnih utakmica. Ekvivalentno je pronaći raspored s n neravnopravnih utakmica.

Raspored će se sastojati od n kola, gdje se u k-tom kolu, za $0 \leqslant k \leqslant n-1$, igraju sljedeće utakmice. Prvo se igraju utakmice $\{i, j\}$ za koje vrijedi $0 \leqslant i < j \leqslant 2n-1$ i $i + j \equiv 2k+1 \pmod{2n}$. Zatim se igraju utakmice $\{i, j\}$ za koje vrijedi $0 \leqslant i < j \leqslant 2n-1$ i $i + j \equiv 2k \pmod{2n}$. Na kraju se igraju utakmice $\{k, 2n\}$ i $\{k+n, 2n\}$.

Tvrdimo da je ovo valjan raspored u kojem su upravo utakmice $\{k, 2n\}$, za $0 \leqslant k \leqslant n-1$, neravnopravne. Doista, budući da se svaka klasa ostataka modulo $2n$ pojavljuje točno jednom među brojevima $2k$, $2k+1$ dok k varira po skupu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, slijedi da svaki par timova iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ igra međusobno točno jednom. Nadalje, budući da se svaka klasa ostataka modulo $2n$ pojavljuje točno jednom među brojevima k, $k+n$ dok k varira po skupu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, slijedi da tim $2n$ igra točno jednom protiv svakog tima iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$.

Sada promotrimo da, za svaki $0 \leqslant k \leqslant n-1$, parovi $\{i, j\}$ za koje vrijedi $0 \leqslant i < j \leqslant 2n-1$ i $i + j \equiv 2k+1 \pmod{2n}$ čine particiju skupa $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, dok parovi $\{i, j\}$ za koje vrijedi $i + j \equiv 2k \pmod{2n}$ čine particiju skupa $\{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{k, k+n\}$. Sada je lako vidjeti da svaki tim igra točno dvije utakmice u svakom kolu, te da je jedina neravnopravna utakmica u k-tom kolu upravo $\{k, 2n\}$, za svaki $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Time je dokaz završen.

Drugo rješenje.

Razmotrimo proizvoljan raspored $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_N, b_N\}$. Pokazat ćemo da sadrži barem n neravnopravnih utakmica. Za sve $1 \leqslant i \leqslant N+1$ i $0 \leqslant j \leqslant 2n$ neka je $t_{i,j}$ broj ekipa koje su odigrale najviše j utakmica prije i-te utakmice (ili zaključno s N-tom ako je $i = N+1$). Za svaki $1 \leqslant i \leqslant N$ neka su u_i, v_i broj utakmica koje su ekipe a_i, b_i odigrale prije nego što su igrale međusobno.

Razmotrimo fiksni $i \in \{1, \ldots, N\}$. Pretpostavimo najprije da je i-ta utakmica ravnopravna. Tada vrijedi $u_i = v_i$, i za sve $0 \leqslant j \leqslant 2n$ imamo:

$$t_{i+1,j} = \begin{cases} t_{i,j} - 2 & \text{ako je } j = u_i = v_i \\ t_{i,j} & \text{inače} \end{cases}.$$

Ako je pak i-ta utakmica neravnopravna, tj. $u_i \neq v_i$, tada za sve $0 \leqslant j \leqslant 2n$ vrijedi:

$$t_{i+1,j} = \begin{cases} t_{i,j} - 1 & \text{ako je } j \in \{u_i, v_i\} \\ t_{i,j} & \text{inače} \end{cases}.$$

Primjećujemo da je broj indeksa $0 \leqslant j \leqslant 2n$ za koje $t_{i,j}$ i $t_{i+1,j}$ imaju različitu parnost jednak 0 ako je utakmica ravnopravna, odnosno jednak 2 ako je utakmica neravnopravna. Slijedi da je broj indeksa j takvih da $t_{1,j}$ i $t_{N+1,j}$ imaju različitu parnost najviše $2k$, gdje je k broj neravnopravnih utakmica. Budući da vrijedi $t_{1,j} = 2n+1$ i $t_{N+1,j} = 0$ za sve $0 \leqslant j \leqslant 2n-1$, mora vrijediti $2k \geqslant 2n$, tj. $k \geqslant n$, što smo htjeli dokazati.

Sada konstruirajmo raspored s točno n neravnopravnih utakmica. Zamislimo da smo dodali fantomsku ekipu koju označimo s $2n+2$.

Tada postoji raspored s $2n+2$ ekipe u kojem je svaka utakmica ravnopravna, takav da se raspored sastoji od $2n+1$ kola po $n+1$ utakmica, te svaka ekipa igra jednom u svakom kolu.

To je ekvivalentno postojanju $2n+1$ disjunktnih savršenih sparivanja u potpunom grafu K_{2n+2}.

Dokažimo tu činjenicu. Postavimo ekipe $1, 2, \ldots, 2n+1$ u vrhove pravilnog $(2n+1)$-kuta, te ekipu $2n+2$ u sredinu. Izaberimo pravac kroz sredinu mnogokuta i jedan od vrhova, te sparimo ekipe koje su osnosimetrične u odnosu na pravac, a ekipu u centru sparimo s vrhom na pravcu. To napravimo za svih $2n+1$ vrhova.

Uzmimo takav raspored i neka je S_i kolo u kojem i-ta ekipa igra protiv fantomske. Bez smanjenja općenitosti, neka se kolo S_{2n+1} sastoji od utakmica $\{2i-1, 2i\}$ za $i = 1, \ldots, n+1$.

Tada promotrimo sljedeći raspored utakmica (bez utakmica fantomske ekipe):

$$S_1, \{1,2\}, S_2, S_3, \{3,4\}, S_4, S_5, \{5,6\}, \ldots, S_{2n-1}, \{2n-1, 2n\}, S_{2n}.$$

Tada su neravnopravne utakmice jedino one oblika $\{2i-1, 2i\}$ za $i = 1, \ldots, n$. Naime, tijekom bloka utakmica oblika $S_{2i-1}, \{2i-1, 2i\}, S_{2i}$ svaka ekipa igra točno dvije utakmice, sve utakmice iz S_{2i-1} su između ekipa koje su do tada odigrale $2i-2$ utakmice, a sve utakmice iz S_{2i} su između ekipa koje su do tada odigrale $2i-1$ utakmica. Kako takvih utakmica ima n, tvrdnja je dokazana.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Četvrti dan

Zagreb, 18. svibnja 2025.

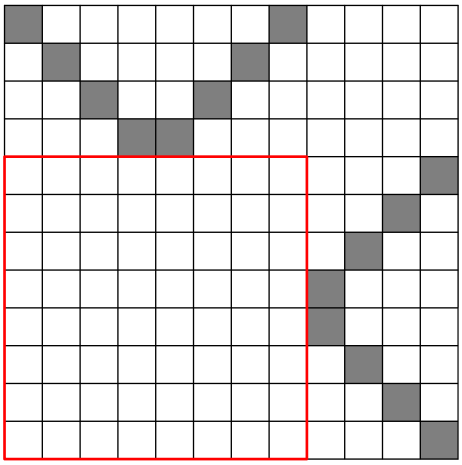
Zadatak 1.

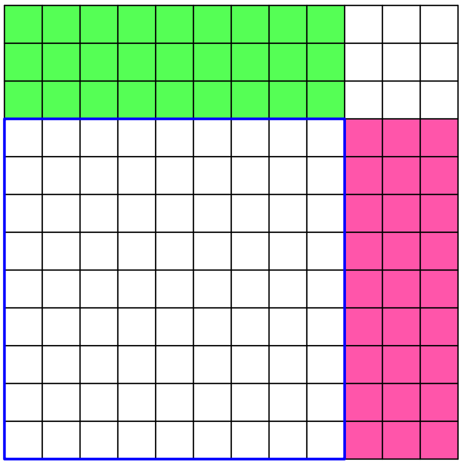
Na nekim poljima ploče dimenzija 300×300 postavljene su kule, figure koje kontroliraju sva polja u svom stupcu i retku. Kule su raspoređene tako da svako polje ploče kontrolira barem jedna kula, a svaka kula kontrolira najviše jedno polje na kojem je neka druga kula. Odredi najmanji prirodni broj k takav da se u svakom kvadratu dimenzija $k \times k$ sigurno nalazi barem jedna kula.

Rješenje.

Dokazat ćemo da je odgovor 201. Za primjer u kojem je 200×200 kvadrat prazan, podijelimo ploču na 9 kvadrata dimenzija 100×100, te u dva takva kvadrata u kutevima ploče smjestimo 100 kula po glavnoj dijagonali, te u dva takva kvadrata kraj kutnih smjestimo 100 kula po sporednoj dijagonali.

Za ilustraciju, na lijevoj slici su označena polja na koja bismo stavili kule u analognoj situaciji kad bismo broj 300 zamijenili s 12.





U svakom od prvih 100 redaka i 200 stupaca postoji kula, kao i u svakom od zadnjih 200 redaka i 100 stupaca, pa je svako polje kontrolirano od strane barem jedne.

Pretpostavimo da neki kvadrat 201×201 ne sadrži ni jednu kulu. Permutacijom redaka i stupaca možemo raspored promijeniti tako da taj kvadrat bude u donjem lijevom kutu ploče (omeđen plavim linijama na slici).

Promotrimo dio ploče koji se sastoji od 99 redaka koji nisu dio plavog kvadrata i 201 stupca koji jest - zeleni dio na slici desno za ploču 12×12; te analogno dio ploče koji se sastoji od 99 stupaca koji nisu dio plavog kvadrata i 201 retka koji jest - ružičasti dio na desnoj slici.

Jedino kule iz tih regija mogu kontrolirati polja iz 201×201 kvadrata. Kako u nikojem retku i nikojem stupcu ne postoje 3 kule, slijedi da u zelenom i ružičastom dijelu ima najviše po $2 \cdot 99 = 198$ kula. Dakle, u nekom stupcu u zelenom dijelu ne postoji kula. To znači da polja u tom stupcu mogu kontrolirati samo kule iz ružičastog dijela. Međutim, za to bi u ružičastom dijelu trebalo biti barem 201 kula, što je kontradikcija.

Zadatak 2.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m,n) takve da je $2n \leqslant m$ i

$$m! + n! \mid (m+n)!$$

Rješenje.

Za $m \leqslant 5$ provjerimo sve mogućnosti za n. Tada je $n \leqslant 2$, i isprobavanjem svih slučajeva dobijemo da je $(2,1)$ rješenje i da ostali brojevi nisu.

Neka je $m > 5$. Podijelimo sa $n!$ obje strane. Vrijedi

$$1 + \frac{m!}{n!} \mid \frac{(m+n)!}{n!}.$$

Ako je p prost broj koji dijeli $m! + n!$, onda je $p \geqslant m$. To vrijedi jer ako je $p \leqslant n$, onda p više puta dijeli $m!$ nego $n!$, jer od $n+1$ do m ima barem p brojeva, pa p dijeli $m!/n!$ i ne dijeli $1 + m!/n!$, a ako je $n < p \leqslant m$, onda opet p dijeli $m!/n!$.

To znači da iz umnoška na desnoj strani možemo ukloniti sve brojeve manje ili jednake m i djeljivost će i dalje vrijediti, pa vrijedi

$$1 + \frac{m!}{n!} \mid (m+1)(m+2)\dots(m+n).$$

Nadalje, svaki prost broj veći od m može najviše s potencijom 1 dijeliti novu desnu stranu, jer je $2p > m+n$ pa je p jedini faktor s desne strane koji je djeljiv s p.

To znači da lijeva strana dijeli umnožak svih prostih brojeva od $m+1$ do $m+n$. Tvrdimo da interval $[m+1,\dots,m+n]$ sadrži najviše $m/4$ prostih brojeva. Dovoljno je to dokazati za interval $[m+1, 3m/2]$.

U tom intervalu ima ukupno $\lfloor 3m/2 \rfloor - m = \lfloor m/2 \rfloor$ brojeva. Parni brojevi iz intervala nisu prosti. Ako je m paran, onda parnih brojeva u $[m+1, 3m/2]$ ima $\lfloor m/4 \rfloor$ a neki od $9, m+1, m+3, m+5$ je neparan, u intervalu i djeljiv s 3, pa također nije prost.

Ako je m neparan, onda parnih brojeva u $[m+1, 3m/2]$ ima više od $m/4$. U svakom slučaju, broj prostih brojeva u intervalu je najviše $m/4$.

Kako je svaki od tih prostih brojeva manji ili jednak od $3m/2$, slijedi da je lijeva strana ograničena odozgo s

$$\left(\frac{3m}{2}\right)^{\frac{m}{4}}.$$

S druge strane,

$$1 + \frac{m!}{n!} \geqslant 1 + \frac{m!}{(\lfloor m/2 \rfloor)!} > \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}},$$

pa je

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} < \left(\frac{3m}{2}\right)^{\frac{m}{4}},$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{m^2}{4} < \frac{3m}{2},$$

odnosno $m < 6$, kontradikcija.

Zadatak 3.

Za realan broj kažemo da je *velik* ako mu je apsolutna vrijednost veća ili jednaka 1. Za svaki prirodan broj m, odredi najveći realan broj C_m takav da za bilo kojih m velikih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vrijedi

$$a_1^2 + (a_1 + a_2)^2 + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^2 \geqslant C_m.$$

Prvo rješenje.

Neka je m neparan. Tada za $i = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ iz nejednakosti $x^2 + y^2 \geqslant \frac{(x-y)^2}{2}$ slijedi

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i})^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i+1})^2 \geqslant \frac{a_{2i+1}^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Kako je $a_1^2 \geqslant 1$, slijedi $C_m \geqslant 1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m+3}{4}$. Za izbor brojeva $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{-3}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1, \ldots, a_{m-1} = -1, a_m = 1$ u svim gornjim nejednakostima se postiže jednakost, pa je $C_m = \frac{m+3}{4}$.

Neka je sada m paran, te označimo $m = 2n$. Za $i = 0, \ldots, 2n-1$, definirajmo

$$u_i = |a_1 + \ldots + a_{i+1}|,$$

tako da minimiziramo izraz $u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{2n-1}^2$, te znamo da vrijedi $u_0 \geqslant 1$ i $u_i + u_{i+1} \geqslant 1$ za $i \geqslant 0$.

Promotrimo izraz

$$\left(u_1 - \frac{n-1}{2n-1}\right)^2 + \left(u_2 - \frac{n}{2n-1}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{n-1}{2n-1}\right)^2 + \ldots + \left(u_{2n-2} - \frac{n}{2n-1}\right)^2 + \left(u_{2n-1} - \frac{n-1}{2n-1}\right)^2.$$

Taj izraz je veći ili jednak 0, što je ekvivalentno s

$$\sum_{i=1}^{2n-1} u_i^2 - \frac{2}{2n-1}((n-1)u_1 + nu_2 + (n-1)u_3 + nu_4 + \ldots + (n-1)u_{2n-1}) + \frac{n(n-1)^2 + (n-1)n^2}{(2n-1)^2} \geqslant 0.$$

Sad ćemo pronaći gornju ogradu za sumu $S := (n-1)u_1 + nu_2 + (n-1)u_3 + nu_4 + \ldots + (n-1)u_{2n-1}$.

Imamo

$$\begin{aligned} S &= (n-1) \cdot (u_1 + u_2) + 1 \cdot (u_2 + u_3) + (n-2) \cdot (u_3 + u_4) + 2 \cdot (u_4 + u_5) + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot (u_{2i-1} + u_{2i}) + \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (u_{2i} + u_{2i+1}). \end{aligned}$$

Ta jednakost vrijedi jer se svaki neparni indeks $2i-1$ pojavljuje s faktorom $n-i$ u lijevoj podsumi, a s faktorom $i-1$ u desnoj, dok se svaki parni indeks $2i$ pojavljuje s faktorom $n-i$ u lijevoj podsumi, a s faktorom i u desnoj.

Primjenom nejednakosti $u_i + u_{i+1} \geqslant 1$, dobivamo $S \geqslant \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)$.

Slijedi

$$\sum_{i=1}^{2n-1} u_i^2 \geqslant \frac{2n(n-1)}{2n-1} - \frac{n(n-1)^2 + (n-1)n^2}{(2n-1)^2} = \frac{n(n-1)}{(2n-1)}.$$

Ako još uračunamo $u_0^2 \geqslant 1$, dobivamo $C_{2n} \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2n-1}$.

Preostaje pronaći brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ za koje se postiže jednakost. Ako uzmemo $a_1 = 1$, $a_2 = -1 - \frac{n-1}{2n-1}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $\ldots$, $a_k = (-1)^{k-1}, \ldots, a_{2n-1} = 1$, dobivamo $u_0 = 1$, $u_{2i-1} = \frac{n-1}{2n-1}$, $u_{2i} = \frac{n}{2n-1}$ i u svim gornjim nejednakostima se postižu jednakosti. Dakle, $C_{2n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2n-1}$. Izraženo preko m, imamo

$$C_m = 1 + \frac{m(m-2)}{4m-4} = \frac{m^2+2m-4}{4m-4}.$$

Drugo rješenje.

Slučaj za neparne m je isti kao u prvom rješenju. Neka je $m = 2n$ paran, te definirajmo $u_0, u_1, \ldots, u_{2n-1}$ kao u prvom rješenju.

Prema K–A nejednakosti slijedi

$$u_1^2 + u_3^2 + \ldots + u_{2n-1}^2 \geqslant \frac{(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1})^2}{n},$$

te analogno

$$u_2^2 + u_4^2 + \ldots + u_{2n-2}^2 \geqslant \frac{(u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n-2})^2}{n-1}.$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1})^2}{n} + \frac{(u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n-2})^2}{n-1} = \\
&= \frac{((n-1)(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}))^2}{n(n-1)^2} + \frac{(n(u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n-2}))^2}{(n-1)n^2} \\
&\geqslant \frac{((n-1)u_1 + nu_2 + (n-1)u_3 + \ldots + nu_{2n-2} + (n-1)u_{2n-1})^2}{n(n-1)^2 + (n-1)n^2}.
\end{aligned}$$

Brojnik ogradimo odozdo sa $(n(n-1))^2$ kao u prvom rješenju. Slijedi

$$C_{2n} \geqslant 1 + \frac{n^2(n-1)^2}{n(n-1)(2n-1)} = 1 + \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

Primjer brojeva za koji se postiže jednakost je isti kao u prvom rješenju.