Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 15. svibnja 2025.

1. Odredi sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da je

$$\begin{aligned} ab(b-c) &= c(c-a), \\ bc(c-a) &= a(a-b), \\ ca(a-b) &= b(b-c). \end{aligned}$$

2. U tablicu dimenzija $3 \times n$ treba upisati sve prirodne brojeve od 1 do $3n$, po jedan u svako polje, tako da vrijedi:

- uzastopni prirodni brojevi nalaze se u susjednim poljima
- brojevi 1 i $3n$ nalaze se u susjednim poljima.

(Susjedna polja su polja sa zajedničkom stranicom.)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće popuniti tablicu na opisani način. Za svaki takav broj n odredi broj različitih tablica koje zadovoljavaju navedene uvjete.

3. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut upisan u kružnicu te neka je P sjecište njegovih dijagonala. Neka su E, F, G i H redom nožišta okomica iz točke P na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Dokaži da se četverokutu $EFGH$ može upisati kružnica.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje je

$$2^m + 5^n$$

kvadrat prirodnog broja.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 16. svibnja 2025.

1. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ac} + \sqrt{c + ab} \leqslant 2.$$

2. Mia stavlja određeni broj žetona na neka polja ploče dimenzija 8×8. Nakon toga Luka bira četiri retka i četiri stupca te uklanja sve žetone iz odabranih redaka i stupaca.

a) Dokaži da kako god Mia rasporedila 12 žetona na ploču, Luka uvijek može odabrati retke i stupce tako da ukloni sve žetone s ploče.

b) Dokaži da Mia može rasporediti 13 žetona na ploču tako da na kraju, bez obzira na Lukin odabir, barem jedan žeton ostane na ploči.

3. Neka je ABC trokut s tupim kutom u vrhu A. Tangente na opisanu kružnicu tog trokuta u točkama B i C sijeku se u točki D. Opisana kružnica trokuta BCD siječe pravac AB u točki K ($K \neq B$), a pravac AC u točki L ($L \neq C$).

Dokaži da pravac AD prolazi polovištem dužine $\overline{KL}$.

4. Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje je

$$\frac{3a^2 + b}{3ab + a}$$

cijeli broj.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.