HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 7. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Odredi sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da je

$$\begin{aligned} ab(b-c) &= c(c-a), \\ bc(c-a) &= a(a-b), \\ ca(a-b) &= b(b-c). \end{aligned}$$

Rješenje.

Pretpostavimo da je $a = 0$. Uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo da je $0 = c^2$, tj. $c = 0$. Uvrštavanjem u treću jednakost dobivamo $0 = b^2$, tj. $b = 0$. Analogno, ako pretpostavimo da je neki od brojeva a, b ili c jednak 0, onda slijedi da svi moraju biti jednaki 0. To nam daje rješenje $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Nadalje, pretpostavimo da je $abc \neq 0$. Ako je $a - b = 0$, uvrštavanjem u posljednju jednakost sustava tada slijedi da je $b(b - c) = 0$, odnosno zbog $b \neq 0$, da je $b - c = 0$, tj. zaključujemo $a = b = c$, što direktnom provjerom utvrđujemo da je rješenje sustava.

Analogno, ako je neka od razlika $a - b$, $b - c$ ili $c - a$ jednaka 0, onda su sve tri jednake 0 i imamo rješenje $(a, b, c) = (t, t, t)$, pri čemu je t realan broj različit od 0.

Pretpostavimo stoga da su svi brojevi a, b, c, $a - b$, $b - c$ i $c - a$ različiti od 0. Množenjem po dvije jednakosti iz početnog sustava i sređivanjem dobivamo novi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a-b &= b^2(b-c), \\ b-c &= c^2(c-a), \\ c-a &= a^2(a-b). \end{aligned}$$

Budući da su $a - b$, $b - c$ i b različiti od 0 te $b^2 > 0$, iz prve jednakosti slijedi da su brojevi $a - b$ i $b - c$ istog predznaka.

Iz druge jednakosti na isti način slijedi da su brojevi $b - c$ i $c - a$ također isto predznak.

Dakle, iz prethodnog imamo da su brojevi $a - b$, $b - c$ i $c - a$ ili svi pozitivni ili svi negativni.

Međutim, to je nemoguće jer je $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$.

Dakle, jedina rješenja početnog sustava su trojke $(a, b, c) = (t, t, t)$, pri čemu je t realan broj.

Zadatak 2.

U tablicu dimenzija $3 \times n$ treba upisati sve prirodne brojeve od 1 do $3n$, po jedan u svako polje, tako da vrijedi:

- uzastopni prirodni brojevi nalaze se u susjednim poljima
- brojevi 1 i $3n$ nalaze se u susjednim poljima.

(Susjedna polja su polja sa zajedničkom stranicom.)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće popuniti tablicu na opisani način. Za svaki takav broj n odredi broj različitih tablica koje zadovoljavaju navedene uvjete.

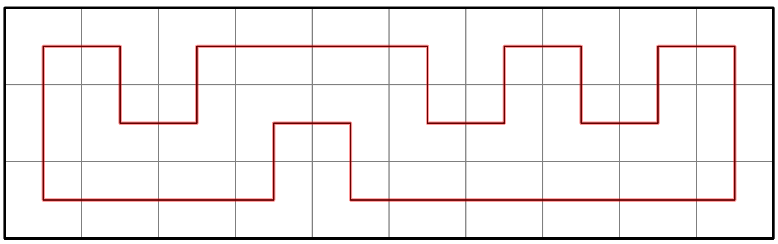
Rješenje.

Obojimo li polja tablice naizmjence u crno i bijelo kao na šahovskoj ploči, susjedna polja će biti različite boje. Pretpostavimo li da je tablicu moguće popuniti na opisani način, zaključujemo da će svi neparni brojevi biti u poljima iste boje kao broj 1, a svi parni brojevi u poljima suprotne boje. Budući da su brojevi 1 i $3n$ upisani u susjedna polja, slijedi da $3n$ mora biti paran broj, tj. n mora biti paran broj.

Pokazat ćemo da za bilo koji paran broj n možemo popuniti tablicu $3 \times n$ na opisani način i opisat ćemo sve različite tablice koje zadovoljavaju navedene uvjete.

Spojimo li redom središta polja prema upisanim brojevima dobit ćemo zatvorenu petlju koja prolazi svim poljima tablice. Za svaku takvu petlju imamo $3n$ načina da odaberemo polje u kojem je upisan broj 1, te dva načina za odabir smjera kojim ćemo upisati ostale brojeve. Time je popunjavanje tablice jednoznačno određeno, pa ukupan broj tablica dobivamo tako da broj mogućih petlji pomnožimo sa $6n$.

Uočimo da kutna polja imaju točna dva susjedna polja, pa su s tim poljima povezana. Promotrimo $n-2$ stupaca bez prvog i zadnjeg. U tim stupcima u srednjem retku imamo $n-2$ polja koja moraju biti povezana u $(n-2)/2$ parova uzastopnih polja. Za svaki od tih parova potrebno je odabrati je li povezan sa svoja dva susjeda iz gornjeg ili donjeg retka (na slici je primjer jedne petlje za $n=10$). Ako je $n=2k$, to daje 2^{k-1} mogućnosti.



Ukupan broj traženih tablica za $n=2k$ iznosi

$$6n \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} = 3k \cdot 2^{k+1}.$$

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ konveksan četverokut upisan u kružnicu te neka je P sjecište njegovih dijagonala. Neka su E, F, G i H redom nožišta okomica iz točke P na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Dokaži da se četverokutu $EFGH$ može upisati kružnica.

Rješenje.

Uočimo da je četverokut $AEPH$ tetivan jer je $\sphericalangle PEA = \sphericalangle AHP = 90°$. Sasvim analogno su i četverokuti $EBFP$, $PFCG$ i $PGDH$ tetivni.

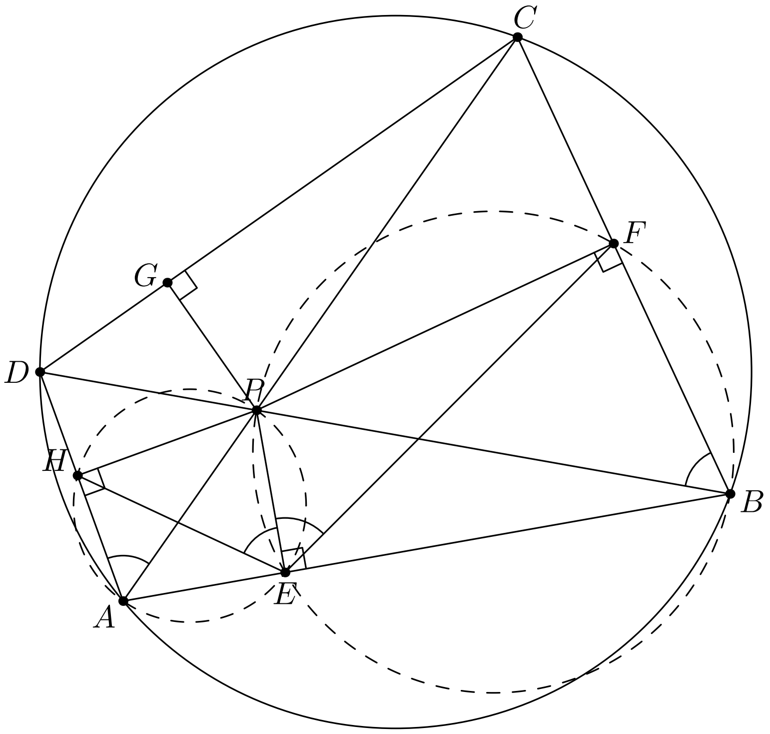
Iz tetivnosti četverokuta $AEPH$ imamo da je

$$\sphericalangle PEH = \sphericalangle PAH = \sphericalangle CAD.$$

Nadalje, iz tetivnosti četverokuta $EBFP$ slijedi

$$\sphericalangle FEP = \sphericalangle FBP = \sphericalangle CBD.$$

Iz tetivnosti četverokuta $ABCD$ imamo da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$.



Spajanjem prethodnih jednakosti dobivamo $\sphericalangle PEH = \sphericalangle FEP$ iz čega slijedi da je pravac EP simetrala kuta $\sphericalangle FEH$.

Analogno se pokaže da su pravci FP, GP i HP redom simetrale kutova $\sphericalangle GFE$, $\sphericalangle HGF$ i $\sphericalangle GHE$. Konačno, budući da se simetrale svih unutarnjih kutova četverokuta $EFGH$ sijeku u istoj točki P slijedi da se četverokutu $EFGH$ može upisati kružnica.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje je

$$2^m + 5^n$$

kvadrat prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Rješavamo jednadžbu $2^m + 5^n = k^2$ pri čemu su m, n i k prirodni brojevi.

Promotrimo ostatke pri dijeljenju s 5 lijeve i desne strane.

Budući da je desna strana jednadžbe kvadrat prirodnog broja, ona može poprimiti redom ostatke 0, 1 i 4 pri dijeljenju s 5.

Na lijevoj strani jednadžbe je 5^n djeljivo s 5 za sve prirodne brojeve n, a 2^m poprima ostatak 2 ili 3 ako je m neparan te ostatak 1 ili 4 ako je m paran.

Budući da desna strana jednadžbe ne može poprimiti ostatke 2 i 3 pri dijeljenju s 5, zaključujemo da m mora biti paran.

Nadalje, promotrimo ostatke pri dijeljenju s 3.

Na lijevoj strani 2^m daje uvijek ostatak 1 pri dijeljenju s 3 jer je m paran, dok 5^n daje ostatak 2 za neparne n, a ostatak 1 za parne n.

Budući da desna strana jednadžbe poprima jedino ostatke 0 i 1 pri dijeljenju s 3, zaključujemo da je n neparan.

Promotrimo slučaj kad je $m \geqslant 3$.

U tom slučaju je 2^m djeljivo s 8, a 5^n daje ostatak 5 pri dijeljenju s 8 jer je n neparan. Dakle, ostatak pri dijeljenju s 8 lijeve strane jednadžbe je 5.

Međutim, mogući ostaci pri dijeljenju s 8 desne strane jednadžbe su 0, 1 i 4 što dovodi to kontradikcije s prethodno određenim ostatkom lijeve strane jednadžbe.

Dakle, mora biti $m \leqslant 2$, a kako je m paran to povlači da je $m = 2$. Time početna jednadžba postaje $4 + 5^n = k^2$, tj. $5^n = k^2 - 4$.

Korištenjem formule za razliku kvadrata dobivamo jednadžbu

$$5^n = (k - 2) \cdot (k + 2).$$

Zaključujemo da vrijedi $k - 2 = 5^a$ i $k + 2 = 5^b$ za neke nenegativne cijele brojeve a i b, pri čemu je $a < b$ i $a + b = n$. Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo

$$4 = (k + 2) - (k - 2) = 5^b - 5^a = 5^a \cdot (5^{b-a} - 1).$$

Kako 4 nije djeljivo s 5 slijedi da mora biti $a = 0$ i tada je $b = 1$, odnosno $n = 1$.

Time dobivamo da je jedino rješenje zadatka $(m, n) = (2, 1)$.

Drugo rješenje.

Rješavamo jednadžbu $2^m + 5^n = k^2$ pri čemu su m, n i k prirodni brojevi.

Kao i u prethodnom rješenju, promatranjem mogućih ostataka pri dijeljenju s 5 zaključujemo da m mora biti paran.

Neka je $m = 2l$ za neki prirodan broj l. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu i primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo

$$5^n = k^2 - 2^{2l} = (k - 2^l) \cdot (k + 2^l).$$

Iz gornje jednadžbe slijedi da je $k - 2^l = 5^a$ i $k + 2^l = 5^b$ za neke nenegativne cijele brojeve a i b, pri čemu je $a < b$ i $a + b = n$.

Oduzimanjem jednakosti dobivamo

$$2^{l+1} = (k + 2^l) - (k - 2^l) = 5^b - 5^a = 5^a(5^{b-a} - 1).$$

Budući da 5 ne dijeli 2^{l+1}, slijedi da je $a = 0$ te gornja jednadžba postaje

$$2^{l+1} = 5^n - 1.$$

Ako je $l \geqslant 2$, tada je lijeva strana gornje jednadžbe djeljiva s 8 pa mora biti i desna. To je moguće samo ako je n paran jer za neparne n desna strana daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8.

Međutim, za paran n je $5^n - 1$ djeljivo s 3, dok 2^{l+1} nije što dovodi do kontradikcije.

Dakle, slučaj $l \geqslant 2$ nije moguć, tj. mora biti $l = 1$, odnosno $m = 2$.

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu konačno dobivamo da je tada $n = 1$ i time dobivamo da je jedino rješenje zadatka $(m, n) = (2, 1)$.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 8. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab} \leqslant 2.$$

Rješenje.

Korištenje uvjeta $a+b+c=1$ imamo

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{a^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(a+b)(a+c)}.$$

Primjenom A–G nejednakosti na članove $a+b$ i $a+c$ iz gornje jednakosti slijedi

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)} \leqslant \frac{(a+b)+(a+c)}{2}=\frac{2a+b+c}{2}.$$

Analogno je

$$\begin{aligned}\sqrt{b+ac} &\leqslant \frac{a+2b+c}{2},\\ \sqrt{c+ab} &\leqslant \frac{a+2b+c}{2}.\end{aligned}$$

Konačno, zbrajanjem gornjih nejednakosti i ponovnim korištenjem uvjeta $a+b+c=1$ dobivamo

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab} \leqslant \frac{2a+b+c}{2}+\frac{a+2b+c}{2}+\frac{a+2b+c}{2}=2(a+b+c)=2.$$

Zadatak 2.

Mia stavlja određeni broj žetona na neka polja ploče dimenzija 8×8. Nakon toga Luka bira četiri retka i četiri stupca te uklanja sve žetone iz odabranih redaka i stupaca.

a) Dokaži da kako god Mia rasporedila 12 žetona na ploču, Luka uvijek može odabrati retke i stupce tako da ukloni sve žetone s ploče.

b) Dokaži da Mia može rasporediti 13 žetona na ploču tako da na kraju, bez obzira na Lukin odabir, barem jedan žeton ostane na ploči.

Prvo rješenje.

a) Promotrimo proizvoljan raspored od 12 žetona na ploči.

Ako postoji redak s barem 5 žetona, onda preostalih (najviše) 7 žetona možemo ukloniti tako da za svakog odaberemo redak ili stupac koji ga sadrži.

Ako postoji redak koji ima točno 4 žetona, onda u preostalih 7 redaka imamo točno 8 žetona, pa jedan redak sadrži barem 2 žetona. Dakle, dva retka sadrže barem 6 žetona, te preostalih 6 žetona možemo ukloniti tako da za svakog odaberemo redak ili stupac koji ga sadrži.

Pretpostavimo da nijedan redak ne sadrži više od 3 žetona. Ako neki redak sadrži točno 3 žetona, onda u preostalih 7 redaka imamo 9 žetona, pa ili jedan redak sadrži točno 3 žetona ili dva retka sadrže po 2 žetona. U prvom slučaju imamo 6 žetona u dva retka, a u drugom slučaju imamo 7 žetona u tri retka, te preostale žetone možemo ukloniti tako da za svakog odaberemo redak ili stupac koji ga sadrži.

Konačno, ako svaki redak sadrži najviše 2 žetona, onda imamo barem četiri retka s točno 2 žetona, te preostala 4 žetona možemo ukloniti odabirom stupaca u kojima se nalaze.

b) Na slici je dan raspored 13 žetona. Imamo pet stupaca i pet redaka koji sadrže po dva žetona, te tri redaka i tri stupaca koji sadrže po jedan žeton.

×	×						
×		×					
	×		×				
		×		×			
			×	×			
					×		
						×	
							×

Pokažimo da bez obzira koja četiri retka i stupca odabrali, postoji žeton koji nije ni u jednom od tih redaka ni stupaca. Ako su odabrana četiri retka koja sadrže po dva žetona, onda je preostalih pet žetona raspoređeno u pet različitih stupaca i neće svi biti uklonjeni. Ako su odabrana tri retka koja sadrže po dva žetona, te jedan koji sadrži po jedan žeton, onda preostaju dva stupca koja sadrže jedan žeton, a žetoni iz neodabranih redaka s po dva žetona imaju žetone u barem tri stupca.

Ako su odabrana dva retka koja sadrže po dva žetona, te dva retka koja sadrže po jedna žeton, onda je potrebno odabrati jedan stupac koji sadrži jedan žeton, te tri stupca koja sadrže po dva žetona, što se zamjenom stupaca i redaka svodi na prethodni slučaj. Također, ako je odabran jedan redak koji sadrži dva žetona, te sva tri retka koja sadrže po jedan žeton, onda je potrebno odabrati četiri stupca koja sadrže po dva žetona i opet zamjenom stupaca i redaka dolazimo u prvi slučaj.

Drugo rješenje.

a) Promotrimo proizvoljan raspored od 12 žetona na ploči. Pretpostavimo da ne postoje četiri retka koja sadrže sve žetone jer je u takvom slučaju jasno da ih možemo sve ukloniti.

   Želimo pokazati da postoje četiri retka koja sadrže barem 8 žetona. Tada odabirom tih redaka, te (najviše četiri) stupaca u kojima su preostali žetoni, možemo ukloniti sve žetone s ploče.

   Budući da ima 8 stupaca i 12 žetona, Prema Dirichletovom principu, postoje četiri retka koja sadrže barem 6 žetona. Ako bi svaka četvorka redaka sadržavala točno 6 žetona, onda bi svaki redak morao imati isti broj žetona. Zaista, fiksiramo li tri retka, te pretpostavimo da oni sadrže ukupno k žetona, onda bi svaki od preostalih pet redaka morao sadržavati $6 - k$ žetona. Promjenom fiksiranih redaka, možemo zaključiti da bilo koja dva retka na ploči imaju isti broj žetona. No, to nije moguće jer 12 nije djeljivo sa 8.

   Dakle, moraju postojati četiri retka koja sadrže barem 7 žetona, te četiri retka koja sadrže najviše 5 žetona. Ako postoje četiri retka koja sadrže točno 7 žetona, onda među tim retcima mora biti jedan koji sadrži najviše jedan žeton (inače bi broj žetona u ta četiri retka bio barem $4 \cdot 2 = 8$), a među preostalih retcima mora biti jedan koji sadrži barem dva žetona (inače bi broj žetona u ta četiri retka bio najviše $4 \cdot 1$, a ne točno 5). Zamjenom tih dvaju redaka, dobivamo četiri retka koja sadrže barem 8 žetona.

b) Kao u prvom rješenju.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut s tupim kutom u vrhu A. Tangente na opisanu kružnicu tog trokuta u točkama B i C sijeku se u točki D. Opisana kružnica trokuta BCD siječe pravac AB u točki K ($K \neq B$), a pravac AC u točki L ($L \neq C$).

Dokaži da pravac AD prolazi polovištem dužine $\overline{KL}$.

Rješenje.

Označimo s α, β i γ redom veličine kutova trokuta ABC u vrhovima A, B i C.

Po teoremu o kutu između tetive i tangente imamo da je

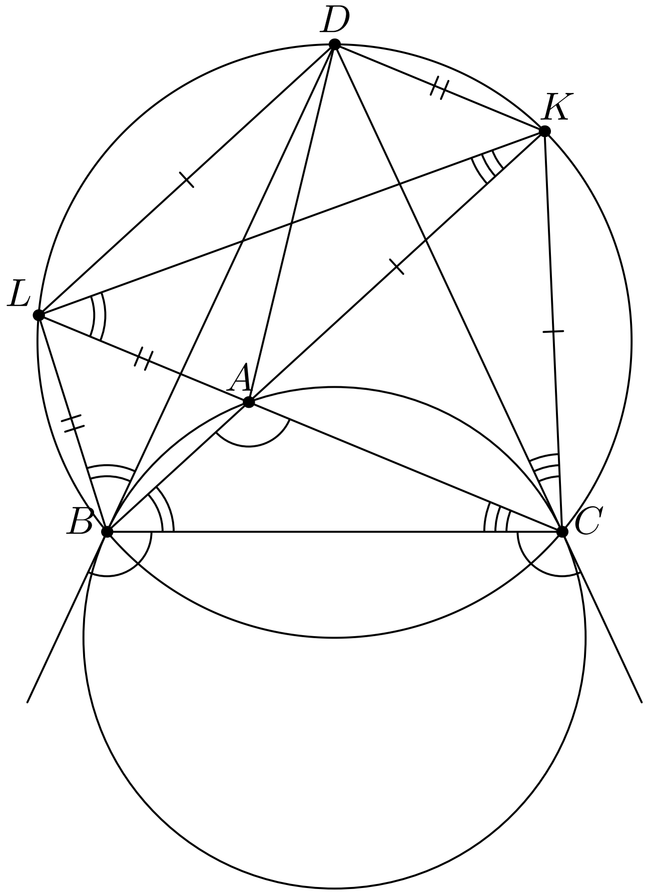
$$\sphericalangle DCA = \beta \quad \text{i} \quad \sphericalangle ABD = \gamma.$$

Iz obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta BCD redom imamo

$$\sphericalangle DBL = \sphericalangle DCL = \sphericalangle DCA = \beta,$$
$$\sphericalangle KCD = \sphericalangle KBD = \sphericalangle ABD = \gamma.$$

Kutovi $\sphericalangle LAB$ i $\sphericalangle CAK$ su vanjski kutovi trokuta ABC pri vrhu A pa je zato

$$\sphericalangle LAB = \sphericalangle CAK = \beta + \gamma.$$



Uočimo da je

$$\sphericalangle ABL = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBL = \beta + \gamma = \sphericalangle LAB$$

iz čega slijedi da je trokut BAL jednakokračan, tj. da vrijedi $|AL| = |BL|$.

Analogno je trokut ACK jednakokračan i vrijedi $|AK| = |CK|$.

Iz obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta BCD imamo

$$\sphericalangle LKA = \sphericalangle LKB = \sphericalangle LCB = \gamma,$$
$$\sphericalangle ALK = \sphericalangle CLK = \sphericalangle CBK = \beta.$$

Nadalje, kako nasuprotni obodni kutovi nad istom tetivom u zbroju daju 180°, slijedi da je

$$\sphericalangle BLD = 180^\circ - \sphericalangle DCB = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha,$$
$$\sphericalangle DKC = 180^\circ - \sphericalangle CBD = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha.$$

Također, vrijedi $\sphericalangle KAL = \sphericalangle BAC = \alpha$ jer su to vršni kutovi.

Konačno, iz gornjih jednakosti kutova i duljina stranica, po K–S–K poučku o sukladnosti trokuta, slijedi da su trokuti KLA, DBL i CDK međusobno sukladni.

Iz gornjih sukladnosti posebno imamo da je

$$|AL| = |DK| \quad \text{i} \quad |AK| = |LD|,$$

iz čega slijedi da je četverokut $AKDL$ paralelogram.

Budući da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju slijedi da pravac AD prolazi polovištem dužine $\overline{KL}$.

Zadatak 4.

Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje je

$$\frac{3a^2 + b}{3ab + a}$$

cijeli broj.

Rješenje.

Uočimo da je $a \neq 0$ i da a dijeli $3a^2 + b$, pa slijedi da a dijeli b.

Neka je $b = ak$ za cijeli broj k. Tada je razlomak

$$\frac{3a^2 + ak}{3a^2k + a} = \frac{3a + k}{3ak + 1}$$

cijeli broj, $3ak + 1$ dijeli $3a + k$.

Ako je $k = 0$, onda a može biti bilo koji cijeli broj različit od 0.

Ako je $k > 0$ i $a > 0$, onda su $3ak+1$ i $3a+k$ prirodni brojevi, te mora vrijediti $3ak+1 \leqslant 3a+k$. Ta nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$(3a - 1)(k - 1) \leqslant 0.$$

Budući da je $3a - 1 > 0$, slijedi da je $k - 1 \leqslant 0$, što je jedino moguće za $k = 1$. Uvrštavanjem u razlomak $\frac{3a+k}{3ak+1}$ vidimo da tada a može biti bilo koji prirodni broj.

Ako je $k < 0$ i $a < 0$, možemo staviti $k = -k'$ i $a = -a'$, te dobivamo da

$$\frac{3a' + k'}{3a'k' + 1}$$

mora biti cijeli broj uz $a' > 0$ i $k' > 0$, pa iz prethodnog razmatranja zaključujemo da je $k' = 1$, tj. $k = -1$, te a može biti bilo koji negativan cijeli broj.

Ako je $k < 0$ i $a > 0$, onda možemo pisati $k' = -k$ i dobivamo uvjet da je

$$\frac{3a - k'}{3ak' - 1}$$

cijeli broj. Ako je $3a > k'$, onda zaključujemo $3ak' - 1 \leqslant 3a - k'$, što je ekvivalentno nejednakosti

$$(3a + 1)(k' - 1) \leqslant 0,$$

iz koje zbog $3a + 1 > 0$ zaključujemo da je $k' = 1$. U tom slučaju je $k = -1$, te a može biti bilo koji prirodni broj. Ako je $3a < k'$, onda je $3ak' - 1 \leqslant k' - 3a$, tj. $(3a - 1)(k' + 1) \leqslant 0$, što nije moguće. Još je moguće da je $k' = 3a$, tj. $k = -3a$ i tada a može biti bilo koji prirodan broj.

Konačno, ako je $a < 0$ i $k > 0$, onda uvrštavanjem $k = -k'$ i $a = -a'$ dobivamo da je

$$\frac{3a' - k'}{3a'k' - 1},$$

pa iz prethodnog slučaja zaključujemo da je $k = 1$ ili $k = -3a$, te je a bilo koji negativan cijeli broj.

Dakle, $k = 1$ ili $k = -1$ ili $k = -3a$, dok je $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Svi traženi parovi su oblika $(a, b) = (n, n)$, $(a, b) = (n, -n)$, $(a, b) = (n, -3n^2)$ ili $(a, b) = (n, 0)$, pri čemu je n bilo koji cijeli broj različit od 0.