Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Svaki od pet zadataka vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke. Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

1. Odredi sve parove dvoznamenkastih prirodnih brojeva za koje vrijedi:

- oba su broja zapisana istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu
- razlika prvoga i drugoga broja kvadrat je prirodnog broja
- zbroj prvoga i drugoga broja višekratnik je broja 3.

2. Marko ima 225 kutija na kojima su napisani brojevi od 1 do 225. U svakoj kutiji na kojoj je napisan višekratnik broja 8 broj kuglica jednak je broju koji je napisan na toj kutiji. U svakoj kutiji na kojoj je napisan višekratnik broja 6 koji nije višekratnik broja 8 nalazi se sedam kuglica. U svakoj se od preostalih kutija nalazi po jedna kuglica. Koliko se kuglica nalazi u svim Markovim kutijama zajedno?

3. Kvadrat $ABCD$ preslikan je centralnom simetrijom s obzirom na vrh B, pri čemu je točka D preslikana u točku E. Potom je novodobiveni lik preslikan osnom simetrijom s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$, pri čemu je točka E preslikana u točku F. Odredi površinu trokuta AEF ako je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka 3.5 cm.

4. Janica je prešla put između dva mjesta za četiri sata. U prvom je satu prešla petinu puta i još 12 km. U drugom satu prešla je četvrtinu ostatka puta i još 9 km, a u trećem satu trećinu novog ostatka puta i još 6 km. U četvrtom je satu prešla preostala 24 km. Koliko je ukupno kilometara Janica prešla za ta četiri sata?

5. U svako od devet polja ploče 3×3 treba upisati po jedan prirodni broj tako da u svakom retku i svakom stupcu umnožak upisanih brojeva bude 18. Na koliko je to različitih načina moguće napraviti?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Svaki od pet zadataka vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke. Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

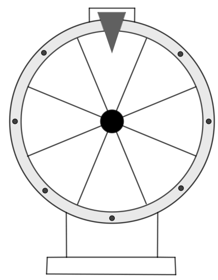
1. Maja je popunila svoj album sa sličicama, a ostatak sličica odlučila je podijeliti prijateljima za njihove albume. Šestinu svojih sličica poklonila je Luni. Kad je vidjela kako se Luna razveselila, poklonila joj je još 5 sličica. Dvije petine preostalih sličica i još 5 sličica poklonila je Sofiji, a nakon toga je Marku poklonila tri četvrtine preostalih sličica i još 5 sličica. Na kraju su joj ostale dvije sličice. Vidjevši da podjela nije baš bila poštena, Maja je preostale dvije sličice poklonila osobi kojoj je prethodno dala najmanje sličica. Koliko je sličica dobila Luna, koliko Sofija, a koliko Marko?

2. Neka je $ABCD$ romb. Simetrala kuta $\measuredangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E i pritom vrijedi $|\measuredangle AEB| = 54°$. Odredi veličine kutova romba $ABCD$.

3. Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva takvih da je zbroj toga broja i troznamenkastoga broja napisanog istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu, djeljiv s 4?

4. Na pravcu p nalaze se redom točke A, B, C i D tako da je $|AB| = |CD| = 2|BC|$. S iste strane pravca p dane su točke E i F takve da su trokuti ACF i CDE jednakostranični. Dokaži da je trokut BEF jednakostraničan.

5. Kolo sreće podijeljeno je na osam jednakih kružnih isječaka i možemo ga vrtjeti. Svaki kružni isječak moramo obojiti točno jednom bojom (plavom, žutom ili crvenom). Dva rasporeda boja smatramo istim ako se jedan može dobiti od drugoga vrtnjom kola. Na koliko načina možemo obojiti kružne isječke ako nikoja dva susjedna isječka ne smiju biti iste boje, a svaka se boja mora iskoristiti barem jednom?



Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Svaki od pet zadataka vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke. Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

1. U pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $CDEF$ tako da je D na stranici $\overline{AC}$, E na stranici $\overline{AB}$ i F na stranici $\overline{BC}$. Ako je $|BE| = 3 \cdot |EA|$, koliko je puta površina trokuta ABC veća od površine kvadrata $CDEF$?

2. Za koje vrijednosti cjelobrojnog parametra a je rješenje jednadžbe $ax + 2a = -3x + 8$ pozitivan racionalan broj?

3. Dokaži da je u pravilnome deveterokutu razlika duljina najdulje i najkraće dijagonale jednaka duljini stranice.

4. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2024, 2025$ napisani u nekome poretku. Koje sve vrijednosti može poprimiti izraz $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2025}$?

5. Neka su a, b i c racionalni brojevi takvi da je

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} = 2$$

Koliko tada iznosi

$$\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}?$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Svaki od pet zadataka vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke. Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

1. Dane su kružnice k_1, k_2 i k_3, čiji su polumjeri redom $9-3\sqrt{3}$, $3+3\sqrt{3}$ i $3\sqrt{3}-3$ i koje se međusobno u parovima dodiruju izvana. Kružnice k_1 i k_2 dodiruju se u točki A, kružnice k_2 i k_3 u točki B, a kružnice k_1 i k_3 u točki C. Odredi površinu dijela ravnine omeđenoga kružnim lukovima $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{AC}$ i $\overset{\frown}{CB}$.

2. Odredi sve četvorke realnih brojeva (a,b,c,d) koje zadovoljavaju sustav jednadžba:

$$
\begin{aligned}
a+b+c&=d^2\\
b+c+d&=a^2\\
c+d+a&=b^2\\
d+a+b&=c^2.
\end{aligned}
$$

3. Za prirodni broj n promatramo tablicu s pet redaka i n stupaca. U svakom stupcu odabrana su tri polja i na svako od njih postavljen je po jedan žeton.

Odredi najmanji broj n za koji je uvijek (neovisno o tome gdje su postavljeni žetoni) moguće odabrati tri retka i tri stupca tako da se u svih devet polja na presjecima tih redaka i stupaca nalaze žetoni.

4. Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi. Ako je duljina hipotenuze 2025, odredi duljine kateta toga trokuta.

5. Dana je kružnica s promjerom $\overline{AB}$ i točka C na toj kružnici takva da je $|AC|:|CB|=5:3$. Neka je D točka na dužini $\overline{AC}$ takva da je $|\measuredangle DBA|=45^\circ$. Koliki je omjer $|AD|:DC|$?