**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 1. razred – srednja škola – B varijanta

**29. travnja 2025.**

**1.** U skupu realnih brojeva riješi nejednadžbu

$$\left|\sqrt{x^2+90x+2025}-\sqrt{x^2-90x+2025}\right| \leqslant x.$$

**2.** Za prirodni broj $k$ veći od 2, svaki je broj iz skupa $\{6, 8, 10, \ldots, 2k\}$ pomnožen sa svakim brojem iz skupa $\{5, 7, 9, \ldots, 2k-1\}$ te je $S_k$ zbroj svih dobivenih umnožaka.

Za koji $k$ vrijedi $S_k = 21\,000$?

**3.** U jednakokračnome je trapezu jedna osnovica četiri puta dulja od druge, duljina kraka iznosi 6 cm, a mjera je šiljastoga kuta $60^\circ$. Trapez je podijeljen na pet trokuta jednakih površina tako da svi vrhovi tih trokuta pripadaju osnovicama trapeza, a svaki vrh trapeza može biti zajednički vrh najviše trima trokutima.

Odredi površinu toga trapeza i zbroj opsega svih pet navedenih trokuta.

**4.** Jednoga dana učiteljica je na dodatnu nastavu matematike donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka. Jabuke iz jedne kutije podijelile su djevojčice, a iz druge dječaci. Broj djevojčica za pet je manji od broja jabuka koje je dobila svaka od njih, a broj jabuka koje je dobio svaki dječak za dva je veći od broja dječaka.

Drugoga je dana na dodatnu nastavu došla jedna djevojčica više te dva dječaka manje nego prvoga dana. Učiteljica je ponovno donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka (broj jabuka u kutijama prvoga i drugoga dana nije nužno jednak) te su djevojčice podijelile jabuke iz jedne kutije, a dječaci iz druge. Svaka je djevojčica dobila jednu jabuku manje, a svaki dječak osam jabuka više nego prvoga dana.

Koliko je dječaka i djevojčica bilo na dodatnoj nastavi prvoga dana?

**5.** Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\left(a+\frac{c}{b}\right)^2+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant 8c.$$

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – B varijanta**

**29. travnja 2025.**

**1.** Neka su $a$ i $b$ rješenja jednadžbe $x^2+px+1=0$, a $c$ i $d$ rješenja jednadžbe $x^2+qx+1=0$, pri čemu su $p$ i $q$ realni brojevi. Odredi $|p-q|$ ako vrijedi

$$(a-c)(b-c)(a-d)(b-d)=2025.$$

**2.** Neka je $S=\{1,2,3,\ldots,102\}$. Treba odabrati podskup $T$ skupa $S$ takav da zbroj nikoja dva različita elementa skupa $T$ ne bude djeljiv s 10.

Koliko najviše elemenata može imati skup $T$?

**3.** Zadan je jednakostraničan trokut $ABC$ duljine stranice 2 cm. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom su odabrane točke $D$ i $E$ takve da je $|CD|+|CE|=3$ cm.

Ako je $M$ polovište stranice $\overline{AB}$, odredi mjeru kuta $\sphericalangle DME$.

**4.** Odredi sva realna rješenja sustava jednadžba

$$\begin{aligned} x+y^2&=y^3\\ y+x^2&=x^3. \end{aligned}$$

**5.** Među svim trapezima koji su upisani u kružnicu promjera $\overline{AB}$ duljine 2 cm tako da im je taj promjer jedna osnovica, trapez $ABCD$ ima najveći opseg.

Odredi duljinu druge osnovice toga trapeza.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 3. razred – srednja škola – B varijanta

## 29. travnja 2025.

**1.** Dokaži da nejednadžba

$$2\log_{\frac{1}{5}}\left(49^{\sqrt{x^2-2}}-1\right)+\log_5\left(7^{\sqrt{4x^2-8}}+\frac{1}{5}\right)\geqslant -1$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

**2.** Točka $C(4,-2)$ vrh je trokuta $ABC$. Visina povučena iz vrha $B$ leži na pravcu zadanome jednadžbom $6x-5y+35=0$, a težišnica povučena iz vrha $A$ leži na pravcu zadanome jednadžbom $7x+3y+5=0$. Odredi koordinate vrhova $A$ i $B$.

**3.** Pravokutnome je trokutu upisana kružnica polumjera 3, a kružnica koja dira hipotenuzu i produžetke kateta ima polumjer 18. Odredi duljine stranica toga pravokutnog trokuta.

**4.** Odredi najmanju moguću pozitivnu vrijednost realnoga parametra $B$ za koji jednadžba

$$30-30\cos(Bx)=|x-30|+|x+30|$$

ima točno 30 rješenja u skupu realnih brojeva.

**5.** Prirodni broj zovemo *moćnim* ako je djeljiv s kvadratom svakoga svojeg prostog faktora. Dokaži da se svaki moćni prirodni broj može zapisati u obliku $a^2b^3$, pri čemu su $a$ i $b$ prirodni brojevi.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 4. razred – srednja škola – B varijanta

## 29. travnja 2025.

**1.** Neka su

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{i} \quad f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x) \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$$

pravila pridruživanja funkcija zadanih na njihovoj prirodnoj domeni. Koliko iznosi $f_{2025}(5)$?

**2.** Odredi najveći prirodni broj $n$ za koji je broj

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n+1)$$

nultočka polinoma $P(x) = x^3 - 151x^2 + 2175x - 2025$.

**3.** Za svaki pravac koji prolazi točkom $(0,1)$ koordinatne ravnine konstruirana su njegova sjecišta s pravcima zadanim jednadžbama

$$x + y - 2 = 0 \quad \text{i} \quad -x + y - 2 = 0$$

te polovište dužine kojoj su rubne točke navedena sjecišta. Koju krivulju određuje skup svih tako dobivenih polovišta? Odredi jednadžbu te krivulje.

**4.** Prirodni broj koji se čita jednako slijeva nadesno i zdesna nalijevo naziva se *palindrom*. Ako slučajno odaberemo šesteroznamenkasti palindrom $x$, kolika je vjerojatnost da je i broj $\frac{x}{11}$ palindrom?

**5.** Neka je $ABCD$ četverokut kojemu se može opisati kružnica. Vrijedi $|BC| = |CD| = 3$ i $|DA| = 5$, a mjera kuta $ADC$ iznosi $120°$. Izračunaj duljinu kraće dijagonale toga četverokuta.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**