DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak OŠ-5.1.

Odredi sve parove dvoznamenkastih prirodnih brojeva za koje vrijedi:

- oba su broja zapisana istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu
- razlika prvoga i drugoga broja kvadrat je prirodnog broja
- zbroj prvoga i drugoga broja višekratnik je broja 3.

Prvo rješenje.

Neka je $(\overline{ab}, \overline{ba})$ par opisanih dvoznamenkastih brojeva, pri čemu je $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$. Kako je razlika prvog i drugog broja kvadrat prirodnog broja, prvi broj mora biti veći, tj. $\overline{ab} > \overline{ba}$. Tada je i $a > b$.

Zbroj $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$ mora biti višekratnik broja 3, pa zbroj $a + b$ mora biti višekratnik broja 3. Provjerimo sve mogućnosti za takav broj $\overline{ab}$

$\overline{ab}$	$\overline{ba}$	uvjeti ispunjeni
21	12	**Da,** $21 - 12 = 9$.
42	24	Ne, $42 - 24 = 18$.
51	15	**Da,** $51 - 15 = 36$.
54	45	**Da,** $54 - 45 = 9$.
63	36	Ne, $63 - 36 = 27$.
72	27	Ne, $72 - 27 = 45$.
75	57	Ne, $75 - 57 = 18$.
81	18	Ne, $81 - 18 = 63$.
84	48	**Da,** $84 - 48 = 36$.
87	78	**Da,** $87 - 78 = 9$.
93	39	Ne, $93 - 39 = 54$.

Traženi parovi brojeva su $(87, 78), (54, 45), (21, 12), (84, 48)$ i $(51, 15)$.

Drugo rješenje.

Neka je $(\overline{ab}, \overline{ba})$ par opisanih dvoznamenkastih brojeva, pri čemu je $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$. Kako je razlika prvog i drugog broja kvadrat prirodnog broja, prvi broj mora biti veći, tj. $\overline{ab} > \overline{ba}$. Tada je i $a > b$.

Zbroj $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$ mora biti višekratnik broja 3, pa zbroj $a + b$ mora biti višekratnik broja 3.

Razlika $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b)$ mora biti kvadrat prirodnog broja. Kako je $a - b \leqslant 8$, a kvadrati prirodnih brojeva su, redom, $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, mora biti $a - b \in \{1, 4\}$.

Promotrimo oba slučaja.

- Ako je $a-b=1$

a	b	uvjeti ispunjeni	
9	8	Ne, $9+8=17$ nije višekratnik broja 3.	
8	**7**	**Da.**	$(87,78)$
7	6	Ne, $7+6=13$ nije višekratnik broja 3.	
6	5	Ne, $6+5=11$ nije višekratnik broja 3.	
5	**4**	**Da.**	$(54,45)$
4	3	Ne, 4+3=7 nije višekratnik broja 3.	
3	2	Ne, 3+2=5 nije višekratnik broja 3.	
2	**1**	**Da.**	$(21,12)$

- Ako je $a-b=4$

9	5	Ne, 9+5=14 nije višekratnik broja 3.	
8	**4**	**Da.**	$(84,48)$
7	3	Ne, 7+3=10 nije višekratnik broja 3.	
6	2	Ne, 6+2=8 nije višekratnik broja 3.	
5	**1**	**Da.**	$(51,15)$

Traženi parovi brojeva su $(87,78),(54,45),(21,12),(84,48)$ i $(51,15)$.

Zadatak OŠ-5.2.

Marko ima 225 kutija na kojima su napisani brojevi od 1 do 225. U svakoj kutiji na kojoj je napisan višekratnik broja 8 broj kuglica jednak je broju koji je napisan na toj kutiji. U svakoj kutiji na kojoj je napisan višekratnik broja 6 koji nije višekratnik broja 8 nalazi se sedam kuglica. U svakoj se od preostalih kutija nalazi po jedna kuglica. Koliko se kuglica nalazi u svim Markovim kutijama zajedno?

Rješenje.

Kutija na kojima je napisan višekratnik broja 8 ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 225 i 8, odnosno 28.

U tim je kutijama ukupno $1\cdot 8+2\cdot 8+\cdots+28\cdot 8=(1+2+\cdots+28)\cdot 8=14\cdot 29\cdot 8=3248$ kuglica.

Kutija na kojima je napisan višekratnik broja 6 ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 225 i 6, dakle 37. Među njima su kutije na kojima je napisan višekratnik broja 6 koji je i višekratnik broja 8 (to su kutije s brojevima $24,48,72,96,120,144,168,192,216$). Kako su to kutije na kojima je napisan višekratnik broja 24, ima ih onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 225 i 24, odnosno 9. Stoga kutija na kojima je napisan višekratnik broja 6 koji nije višekratnik broja 8, ima $37-9=28$.

U tih se 28 kutija nalazi još $28\cdot 7=196$ kuglica.

Preostaje još $225-28-28=169$ kutija u kojima se nalazi po jedna kuglica, ukupno 169 kuglica.

U Markovim je kutijama ukupno $3248+196+169=3613$ kuglica.

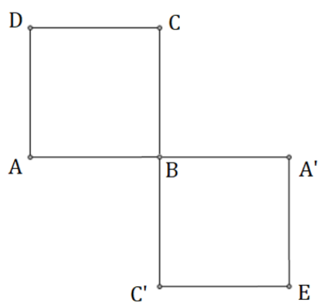
Zadatak OŠ-5.3.

Kvadrat $ABCD$ preslikan je centralnom simetrijom s obzirom na vrh B, pri čemu je točka D preslikana u točku E. Potom je novodobiveni lik preslikan osnom simetrijom s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$, pri čemu je točka E preslikana u točku F. Odredi površinu trokuta AEF ako je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka 3.5 cm.

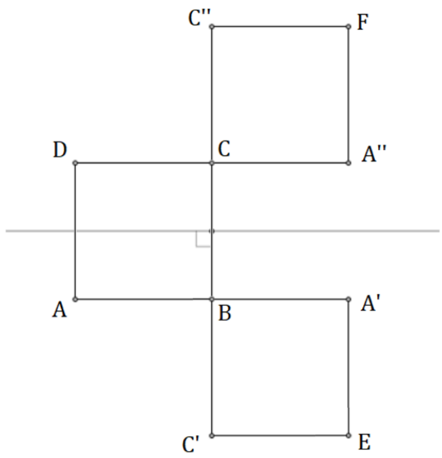
Rješenje.

Zadani se kvadrat $ABCD$, nakon preslikavanja centralnom simetrijom s obzirom na vrh B, preslikava u lik kojemu su sve stranice i svi kutovi sukladni odgovarajućim stranicama i kutovima kvadrata $ABCD$, tj. kvadrat $ABCD$ preslikava se u njemu sukladan kvadrat $A'BC'E$. Pri tome se vrh D kvadrata $ABCD$ preslikava u vrh E njemu sukladnog kvadrata $A'BC'E$, kao na slici (Slika 1).

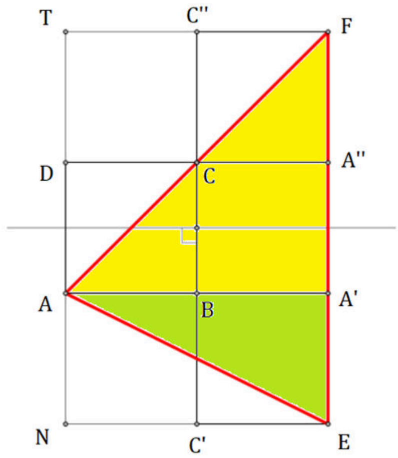
Nakon preslikavanja novodobivenog lika osnom simetrijom s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$, dobivamo lik kao na slici (Slika 2). Pri tome se vrh E kvadrata $A'BC'E$ preslikava u vrh F njemu sukladnog kvadrata $A''CC''F$.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Docrtamo li još tri kvadrata koji su sukladni početnom kvadratu $ABCD$, kao što je prikazano na slici (Slika 3), dobivamo pravokutnik $NEFT$. Njegova je površina šest puta veća od površine kvadrata $ABCD$. Površina trokuta $AA'F$ jednaka je polovini površine kvadrata $AA'FT$ tj. dva je puta veća od površine kvadrata $ABCD$. Površina trokuta AEA' jednaka je polovini površine pravokutnika $NEA'A$ tj. jednaka je površini kvadrata $ABCD$.

Dakle, površina trokuta AEF tri puta je veća od površine kvadrata $ABCD$.

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ je 3.5 cm, pa je njegova površina

$$P_{ABCD} = (3.5 \cdot 3.5)\ \text{cm}^2 = 12.25\ \text{cm}^2.$$

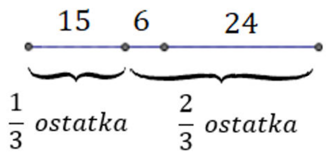
Površina trokuta AEF je $P_{AEF} = 3 \cdot P_{ABCD} = 3 \cdot 12.25\ \text{cm}^2 = 36.75\ \text{cm}^2$.

Zadatak OŠ-5.4.

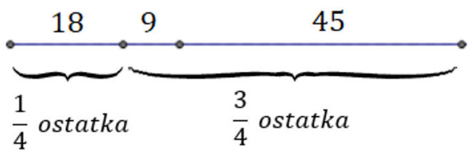
Janica je prešla put između dva mjesta za četiri sata. U prvom je satu prešla petinu puta i još 12 km. U drugom satu prešla je četvrtinu ostatka puta i još 9 km, a u trećem satu trećinu novog ostatka puta i još 6 km. U četvrtom je satu prešla preostala 24 km. Koliko je ukupno kilometara Janica prešla za ta četiri sata?

Rješenje.

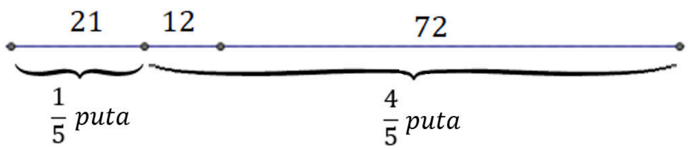
Krenimo od četvrtog sata. Da Janica u trećem satu nije prešla još 6 km, za četvrti bi joj sat ostalo prijeći $6 + 24 = 30$ km. Tih je 30 km dvije trećine, a 15 km jedna trećina ostatka puta nakon drugog sata.



Dakle, nakon drugog sata preostalo joj je prijeći još $3 \cdot 15 = 45$ km. Da Janica u drugom satu nije prešla još 9 km, za treći bi joj sat ostalo prijeći $9 + 45 = 54$ km. Tih je 54 km tri četvrtine, a 18 km jedna četvrtina ostatka puta nakon prvog sata.



Dakle, nakon prvog sata preostalo joj je prijeći još $4 \cdot 18 = 72$ km. Da Janica u prvom satu nije prešla još 12 km, za drugi bi joj sat ostalo prijeći $12 + 72 = 84$ km. Tih je 84 km četiri petine, a 21 km jedna petina ukupne duljine puta.



Dakle, Janica je u ta četiri sata prešla ukupno $5 \cdot 21 = 105$ km.

Zadatak OŠ-5.5.

U svako od devet polja ploče 3×3 treba upisati po jedan prirodni broj tako da u svakom retku i svakom stupcu umnožak upisanih brojeva bude 18. Na koliko je to različitih načina moguće napraviti?

Rješenje.

Rastavom broja 18 na proste faktore dobivamo $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. To znači da je potrebno odrediti polja u kojima će se nalaziti brojevi s faktorima 2 i 3 tako da se u rastavima na proste faktore brojeva u svakom retku i svakom stupcu pojavi točno jedan faktor 2 i točno dva faktora 3.

Faktor 2 možemo u prvi redak smjestiti u bilo koji od tri stupca, a u drugom retku u jedan od dva stupca u kojima se već ne nalazi faktor 2. Smještaj faktora 2 u trećem je retku, tada, jedinstveno određen. Ukupno $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.

Ostaje nam odrediti na koliko načina možemo rasporediti faktor 3 tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje točno dvaput. Promatramo tri moguća slučaja:

1) U svakom je od devet polja najviše jedan faktor 3. To znači da u svakom retku i svakom stupcu moraju postojati točno dva polja koja imaju jedan faktor 3, te jedno polje koje nema faktor 3. Odabir polja koja nemaju faktor 3 se prebrojava na isti način kao što smo prebrojavali odabir polja koja imaju faktor 2. Ukupno ima 6 takvih rasporeda.
2) Oba se faktora 3 nalaze u istom polju, a u drugim poljima tog retka i stupca nema faktora 3. Odabir polja u koja stavljamo po dva faktora 3 (tj. faktor 9) opet prebrojavamo na isti način kao što smo prebrojavali odabir polja koja imaju faktor 2, te i u ovom slučaju imamo 6 mogućih rasporeda.
3) U jednom polju su točno dva faktora 3, a u ostalim poljima najviše po jedan faktor 3. U poljima koja su u istom retku i stupcu kao polje s dva faktora 3 nema drugih faktora 3, a u preostalim poljima se nalazi točno jedan faktor 3. Polje u kojem su dva faktora 3 možemo odabrati na devet načina, čime je jedinstveno određen smještaj svih ostalih faktora 3. Dakle, takvih je rasporeda 9.

Konačno, faktore 3 možemo rasporediti na $6 + 6 + 9 = 21$ način.

Kako bismo dobili sve različite načine rasporeda u kojima je u svakom retku i svakom stupcu umnožak upisanih brojeva jednak 18, trebamo odabrati jedan od šest rasporeda faktora 2 i jedan od 21 rasporeda faktora 3. Stoga je ukupni broj različitih rasporeda brojeva jednak $6 \cdot 21 = 126$.

Napomena: Na slici je prikazano svih šest mogućih rasporeda faktora 2

2		
	2	
		2

2		
		2
	2	

	2	
2		
		2

	2	
		2
2		

		2
2		
	2	

		2
	2	
2		

Ako svaki od tih rasporeda kombiniramo sa sljedećim rasporedom faktora 3

$3 \cdot 3$		
	3	3
	3	3

na način da brojeve u pripadnim poljima pomnožimo, a u prazna polja upišemo broj 1, dobivamo sljedećih šest rasporeda.

18	1	1
1	6	3
1	3	6

18	1	1
1	3	6
1	6	3

9	2	1
2	3	3
1	3	6

9	2	1
1	3	6
2	3	3

9	1	2
2	3	3
1	6	3

9	1	2
1	6	3
2	3	3

Na sličan način se rasporedi faktora 2 kombiniraju sa preostalih 20 rasporeda faktora 3.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak OŠ-6.1.

Maja je popunila svoj album sa sličicama, a ostatak sličica odlučila je podijeliti prijateljima za njihove albume. Šestinu svojih sličica poklonila je Luni. Kad je vidjela kako se Luna razveselila, poklonila joj je još 5 sličica. Dvije petine preostalih sličica i još 5 sličica poklonila je Sofiji, a nakon toga je Marku poklonila tri četvrtine preostalih sličica i još 5 sličica. Na kraju su joj ostale dvije sličice. Vidjevši da podjela nije baš bila poštena, Maja je preostale dvije sličice poklonila osobi kojoj je prethodno dala najmanje sličica. Koliko je sličica dobila Luna, koliko Sofija, a koliko Marko?

Prvo rješenje.

Zadatak rješavamo unatrag. Da Marku nije poklonila onih 5 sličica, Maji bi ostalo 7 sličica.

Kako je Marku dala $\frac{3}{4}$ sličica, tih 7 sličica je četvrtina ostatka sličica. Može se zaključiti da je prije nego što je Marko dobio sličice bilo $4 \cdot 7 = 28$ sličica.

Marko je dobio $3 \cdot 7 + 5 = 26$ sličica.

Sofija je dobila dvije petine sličica preostalih nakon Lune i još 5 sličica. Da nije dobila tih 5, preostalih bi sličica bilo $28 + 5 = 33$, a to čini tri petine preostalih sličica. $\frac{1}{5}$ sličica tako iznosi $33 : 3 = 11$, pa zaključujemo da ih je ukupno bilo 55.

Sofija je dobila $2 \cdot 11 + 5 = 27$ sličica.

Luna je dobila šestinu Majinih sličica i još 5 sličica. Da nije dobila tih 5, Maji bi ostalo $5 + 55 = 60$ sličica. Tih 60 sličica su $\frac{5}{6}$ svih Majinih sličica, pa zaključujemo da da je jedna šestina sličica $60 : 5 = 12$. Ukupno je, dakle, bilo $6 \cdot 12 = 72$ sličice.

Luna je dobila $1 \cdot 12 + 5 = 17$ sličica.

Kako je Luna dobila najmanje sličica, na kraju joj je Maja poklonila preostale dvije, pa je Luna ukupno dobila 19 sličica. Marko je dobio 26, a Sofija 27 sličica.

Drugo rješenje.

Neka je x broj sličica koje je Maja odlučila podijeliti prijateljima.

Luni je poklonila $\dfrac{1}{6}x + 5$ sličica.

Nakon toga joj je ostalo $x - \left(\dfrac{1}{6}x + 5\right) = \dfrac{5}{6}x - 5$ sličica.

Sofiji je poklonila $\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{6}x - 5\right) + 5 = \dfrac{1}{3}x - 2 + 5 = \dfrac{1}{3}x + 3$ sličice.

Ostalo joj je $\dfrac{5}{6}x - 5 - \left(\dfrac{1}{3}x + 3\right) = \dfrac{5}{6}x - 5 - \dfrac{1}{3}x - 3 = \dfrac{1}{2}x - 8$ sličica.

Marku je poklonila $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2}x - 8\right) + 5 = \dfrac{3}{8}x - 6 + 5 = \dfrac{3}{8}x - 1$ sličicu.

Ostale su joj još dvije sličice pa vrijedi:

$$\frac{1}{6}x + 5 + \frac{1}{3}x + 3 + \frac{3}{8}x - 1 = x - 2.$$

Sređivanjem dobivamo $\frac{21}{24}x + 7 = x - 2$, odnosno $x = 72$.

Dakle, Maja je na početku imala 72 sličice.

Luna je dobila $\frac{1}{6} \cdot 72 + 5 = 17$ sličica.

Sofija je dobila $\frac{1}{3} \cdot 72 + 3 = 27$ sličica.

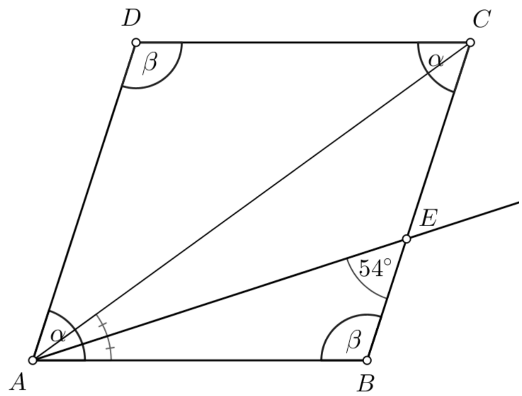
Marko je dobio $\frac{3}{8} \cdot 72 - 1 = 26$ sličica.

Budući da je Luna dobila najmanje sličica, na kraju joj je Maja poklonila preostale dvije, pa je Luna ukupno dobila 19 sličica. Marko je dobio 26, a Sofija 27 sličica.

Zadatak OŠ-6.2.

Neka je $ABCD$ romb. Simetrala kuta $\measuredangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E i pritom vrijedi $|\measuredangle AEB| = 54°$. Odredi veličine kutova romba $ABCD$.

Rješenje.



Neka je $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DCB| = \alpha$ i $|\measuredangle CBA| = |\measuredangle ADC| = \beta$.

Kako su rombu sve stranice jednake, trokuti ABC i ACD su sukladni prema poučku S–S–S. To znači da je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAD|$ pa je $|\measuredangle BAE| = \frac{\alpha}{4}$.

Kako je četverokut $ABCD$ romb, susjedni kutovi su suplementarni, to jest $\alpha + \beta = 180°$, pa je $|\measuredangle EBA| = 180° - \alpha$.

Budući da je zbroj unutarnjih kutova u trokutu ABE jednak 180° vrijedi

$$\frac{\alpha}{4} + (180° - \alpha) + 54° = 180°.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobivamo $\alpha = 72°$, te slijedi $\beta = 108°$.

Zadatak OŠ-6.3.

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva takvih da je zbroj toga broja i troznamenkastoga broja napisanog istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu, djeljiv s 4?

Rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj. Tada je $\overline{cba}$ troznamenkasti broj napisan istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu, pa vrijedi

$$\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 101c + 20b = 101(a + c) + 20b.$$

Budući da je $20b$ djeljiv s 4 za bilo koji broj b, a 101 nije djeljiv s 4, prema pravilu za djeljivost razlike i pravilu za djeljivost umnoška slijedi da broj $a + c$ mora biti djeljiv s 4.

Ako je $a + c = 4$, imamo 3 mogućnosti.

a	1	2	3
c	3	2	1

Ako je $a + c = 8$, imamo 7 mogućnosti.

a	1	2	3	4	5	6	7
c	7	6	5	4	3	2	1

Ako je $a + c = 12$, imamo 7 mogućnosti.

a	3	4	5	6	7	8	9
c	9	8	7	6	5	4	3

Ako je $a + c = 16$, imamo 3 mogućnosti.

a	7	8	9
c	9	8	7

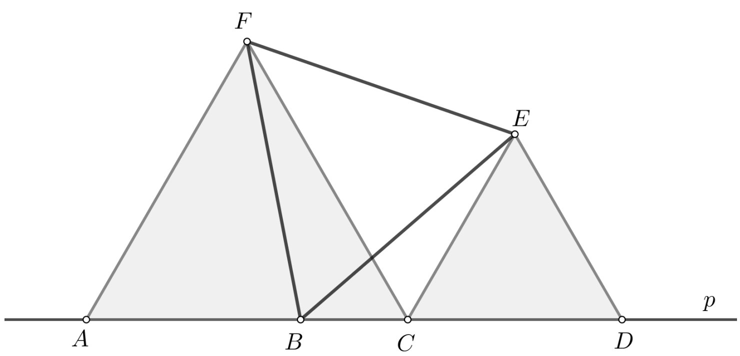
Ukupno imamo 20 mogućnosti, a budući da b može biti bilo koja znamenka ukupno postoji $20 \cdot 10 = 200$ traženih brojeva.

Zadatak OŠ-6.4.

Na pravcu p nalaze se redom točke A, B, C i D tako da je $|AB| = |CD| = 2|BC|$. S iste strane pravca p dane su točke E i F takve da su trokuti ACF i CDE jednakostranični. Dokaži da je trokut BEF jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Promotrimo trokute ABF i CEF.



Prema uvjetu zadatka vrijedi da je $|AB| = |CD|$, a budući da je trokut CDE jednakostraničan tada je i $|AB| = |CE|$.

Jednakostraničnim trokutima ACF i CDE svi su kutovi veličine $60°$, pa je i $|\measuredangle ECF| = 60°$ jer zajedno s $\measuredangle FCA$ i $\measuredangle DCE$ čini ispruženi kut.

Vrijedi $|AF| = |CF|$ jer je ACF jednakostranični trokut.

Dakle, trokuti ABF i CEF su sukladni prema poučku S-K-S.

Stoga zaključujemo da vrijedi $|\measuredangle AFB| = |\measuredangle CFE|$.

Budući da je $|\measuredangle AFC| = |\measuredangle AFB| + |\measuredangle BFC| = 60°$, a $|\measuredangle BFE| = |\measuredangle BFC| + |\measuredangle CFE|$ slijedi da je i $|\measuredangle BFE| = 60°$.

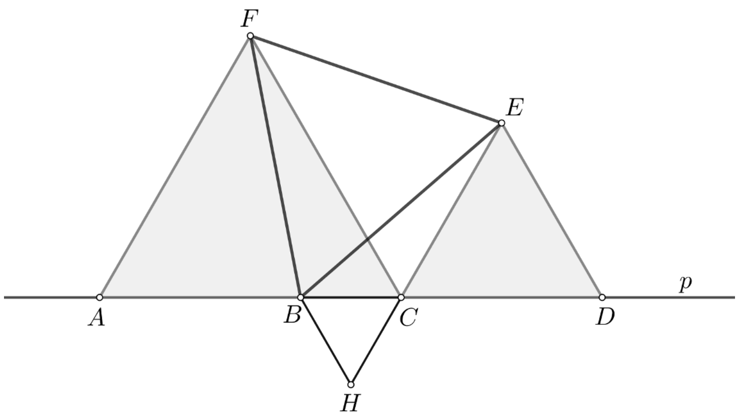
Zbog sukladnosti trokuta ABF i CEF vrijedi da je $|BF| = |EF|$, to jest trokut BEF je jednakokračan s kutom nasuprot osnovice $60°$.

Preostala dva kuta trokuta BEF tada imaju veličinu $(180° - 60°) : 2 = 60°$.

Dakle, trokut BEF je jednakostraničan.

Drugo rješenje.

Sa suprotne strane pravca p nacrtamo jednakostraničan trokut BHC.



Prema uvjetu zadatka vrijedi da je $|AB| = |CD|$, a budući da je trokut CDE jednakostraničan tada je i $|AB| = |CE|$. Trokut BHC je jednakostraničan pa je $|BC| = |CH|$.

Tada je $|CF| = |AB| + |BC|$ i $|HE| = |CE| + |CH|$, to jest $|CF| = |HE|$.

Za kutove vrijedi $|\measuredangle FCB| = |\measuredangle EHB| = 60°$.

Dakle, trokuti BCF i BHE su sukladni prema poučku S-K-S. (1)

Slijedi $|BF| = |BE|$.

Dakle, trokut BEF je jednakokračan, pa je $|\measuredangle FEB| = |\measuredangle BFE|$.

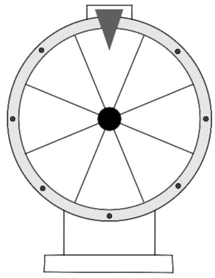
Iz (1) slijedi $|\measuredangle CBF| = |\measuredangle HBE|$. (2)

Dalje, iz (2) i $|\measuredangle CBF| = |\measuredangle CBE| + |\measuredangle EBF|$ te $|\measuredangle HBE| = |\measuredangle HBC| + |\measuredangle CBE|$, slijedi $|\measuredangle EBF| = |\measuredangle HBC| = 60°$.

Iz $|\measuredangle FEB| = |\measuredangle BFE|$ i $|\measuredangle EBF| = 60°$ slijedi $|\measuredangle FEB| = |\measuredangle BFE| = 60°$, pa je trokut BEF jednakostraničan.

Zadatak OŠ-6.5.

Kolo sreće podijeljeno je na osam jednakih kružnih isječaka i možemo ga vrtjeti. Svaki kružni isječak moramo obojiti točno jednom bojom (plavom, žutom ili crvenom). Dva rasporeda boja smatramo istim ako se jedan može dobiti od drugoga vrtnjom kola. Na koliko načina možemo obojiti kružne isječke ako nikoja dva susjedna isječka ne smiju biti iste boje, a svaka se boja mora iskoristiti barem jednom?

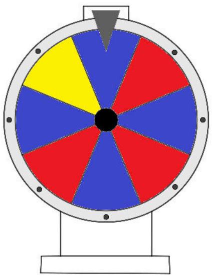


Rješenje.

Najveći broj kružnih isječaka (polja) obojen istom bojom je četiri, tada će svako drugo polje biti obojeno tom bojom. Neka je ta boja plava.

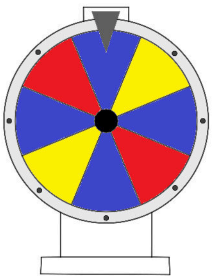
Preostala četiri polja mogu biti ili tri jedne boje (neka je to crvena), a jedno boje koja je preostala (žuta), ili po dva u svakoj od tih boja.

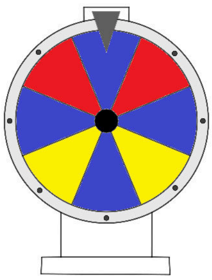
Dobivamo sljedeća bojenja:



Budući da možemo odabrati između tri boje kojima ćemo obojiti četiri, tri ili jedno polje, tada ovakvih bojenja ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

U slučaju bojenja četiri polja jednom bojom, a preostala dva drugom bojom dobivamo dvije prikazane mogućnosti kako to možemo učiniti.



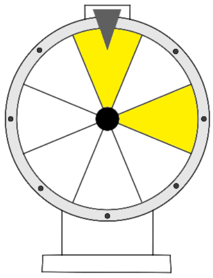


Po dva polja obojena istom bojom mogu biti ili nasuprotna ili obojena tako da je između polja obojenih istom bojom jedno plavo polje.

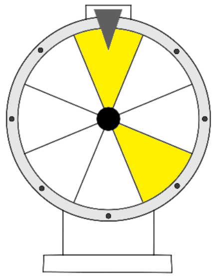
Sve druga bojenja u ovom slučaju moguće je dobiti od prikazanih vrtnjom kola, što znači da trebamo odabrati samo boju kojom će biti obojena četiri istobojna polja. To u svakom od prikaza možemo na tri načina. Dakle, ovakvih je bojenja $3 + 3 = 6$.

Promotrimo bojenja u kojima su po tri polja obojena s dvije boje (plavom i crvenom bojom), a dva polja s preostalom (žutom) bojom.

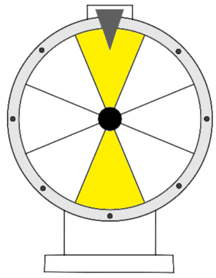
Razlikujemo tri položaja u kojima se mogu nalaziti dva polja koja bojimo žutom bojom:



jedno polje razmaka

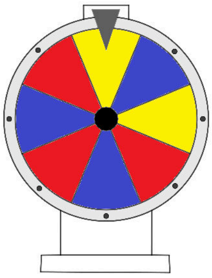


dva polja razmaka



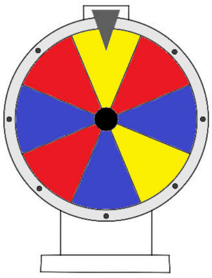
tri polja razmaka

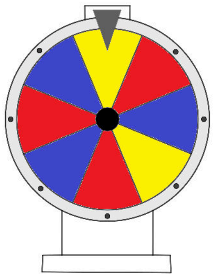
Promotrimo bojenja za svaki od ta tri položaja.



Polje koje se nalazi između dvaju žutih polja mora biti obojeno različitom bojom od dva polja koja su susjedna žutim poljima jer bi inače preostala polja bilo nemoguće obojiti tako da nikoja dva susjedna nisu obojena istom bojom. Budući da možemo odabrati između tri boje kojima ćemo obojiti polja, tada ovakvih bojenja ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

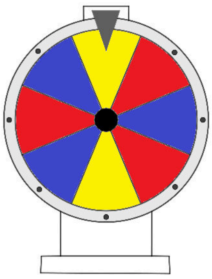
Kad je dva polja razmaka između obojenih žutih polja, tada ta polja između moraju biti obojena različitim bojama, a polja koja su im nasuprotna mogu biti ili njima istih boja ili različitih boja.





Preostala dva polja bojimo tako da vodimo računa da susjedna polja nisu iste boje. Dobili smo dvije različite mogućnosti, a u svakoj od njih možemo boje za bojenje polja birati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina, pa je ovih mogućnosti ukupno 12.

U posljednjem slučaju je tri polja razmaka između žutih polja, što znači da od tri polja ona krajnja sa svake strane moraju biti iste boje.



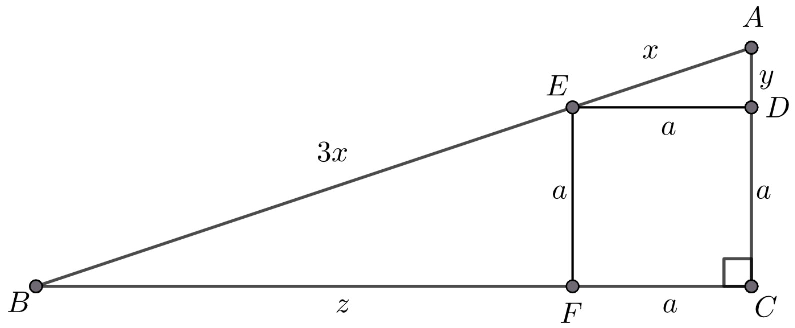
Zamjenom plave i crvene boje dobili bismo bojenje koje je moguće postići vrtnjom kola, tako da je potrebno odabrati samo tri boje kojima bojimo dva polja. Dakle, 3 su moguća bojenja.

Ukupan broj bojenja prema zadanim uvjetima je: $6 + 6 + 6 + 12 + 3 = 33$.

Zadatak OŠ-7.1.

U pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $CDEF$ tako da je D na stranici $\overline{AC}$, E na stranici $\overline{AB}$ i F na stranici $\overline{BC}$. Ako je $|BE| = 3 \cdot |EA|$, koliko je puta površina trokuta ABC veća od površine kvadrata $CDEF$?

Prvo rješenje.



Četverokut $CDEF$ je kvadrat, pa je $CD \| FE$ i $CF \| DE$.

Stoga je $|\measuredangle FBE| = |\measuredangle DEA|$ i $|\measuredangle BEF| = |\measuredangle EAD|$ prema poučku o kutovima uz presječnicu.

Dakle, trokuti AED i EBF su slični.

Označimo $|CD| = a$, $|EA| = x$, $|BE| = 3x$, $|DA| = y$ i $|BF| = z$.

Iz sličnosti trokuta AED i EBF slijedi $a : y = 3x : x$, odnosno $a = 3y$,

te također $z : a = 3x : x$, odnosno $z = 3a$.

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \dfrac{|CA| \cdot |CB|}{2}$, a površina kvadrata $CDEF$ je $P_{CDEF} = a^2$.

Iz $a = 3y$ slijedi $|CA| = a + y = a + \dfrac{a}{3} = \dfrac{4a}{3}$.

Iz $z = 3a$ slijedi $|CB| = a + z = a + 3a = 4a$.

Tada je

$$P_{ABC} = \frac{|CA| \cdot |CB|}{2} = \frac{\frac{4a}{3} \cdot 4a}{2} = \frac{8a^2}{3},$$

iz čega slijedi $P_{ABC} : P_{CDEF} = \dfrac{8a^2}{3} : a^2 = \dfrac{8}{3}$,

tj. površina trokuta ABC je $\dfrac{8}{3}$ puta veća od površine kvadrata $CDEF$.

Drugo rješenje.

Četverokut $CDEF$ je kvadrat, pa je $CD \| FE$ i $CF \| DE$.

Stoga je $|\measuredangle CBA| = |\measuredangle DEA|$ i $|\measuredangle BEF| = |\measuredangle BAC|$, prema poučku o kutovima uz presječnicu.

Dakle, trokuti ABC, AED i EBF su međusobno slični pravokutni trokuti s hipotenuzama $\overline{BA}$, $\overline{EA}$ i $\overline{BE}$.

Kako je $|BE| = 3 \cdot |EA|$, trokut EBF je sličan trokutu AED s koeficijentom sličnosti 3, pa za njihove površine vrijedi

$$P_{EBF} = 3^2 \cdot P_{AED} = 9P_{AED}.$$

Također je $|BA| = 4 \cdot |EA|$, pa je trokut ABC sličan trokutu AED s koeficijentom sličnosti 4 i za njihove površine vrijedi

$$P_{ABC} = 4^2 \cdot P_{AED} = 16P_{AED}.$$

Nadalje, vrijedi

$$P_{CDEF} = P_{ABC} - (P_{EBF} + P_{AED}) = 16P_{AED} - (9P_{AED} + P_{AED}) = 16P_{AED} - 10P_{AED} = 6P_{AED},$$

iz čega slijedi

$$\frac{P_{ABC}}{P_{CDEF}} = \frac{16P_{AED}}{6P_{AED}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

tj. površina trokuta ABC je $\frac{8}{3}$ puta veća od površine kvadrata $CDEF$.

Zadatak OŠ-7.2.

Za koje vrijednosti cjelobrojnog parametra a je rješenje jednadžbe $ax + 2a = -3x + 8$ pozitivan racionalan broj?

Rješenje.

Zadanu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način

$$x(a+3) = -2a + 8.$$

Ako je $a + 3 = 0$, onda je $a = -3$ te $-2a + 8 = 14 \neq 0$, pa jednadžba nema rješenja.

Ako je $a + 3 \neq 0$, onda jednadžbu možemo dijeliti s $a + 3$, te dijeljenjem dobivamo

$$x = \frac{-2a+8}{a+3}$$

iz čega je vidljivo da je x racionalan broj za cijeli broj a.

Želimo odrediti kada vrijedi $\dfrac{-2a+8}{a+3} = x > 0$.

Razlomak je pozitivan ako i samo ako su brojnik i nazivnik istog predznaka. Razlikujemo dva slučaja.

Ako su i brojnik i nazivnik pozitivni, mora vrijediti $-2a + 8 > 0$ i $a + 3 > 0$, odnosno $a < 4$ i $a > -3$, tj. $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Ako su brojnik i nazivnik negativni, onda bismo dobili uvjete $a > 4$ i $a < -3$ koje istovremeno ne zadovoljava nijedan cijeli broj a.

Dakle, rješenje zadane jednadžbe je pozitivan racionalan broj za $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Zadatak OŠ-7.3.

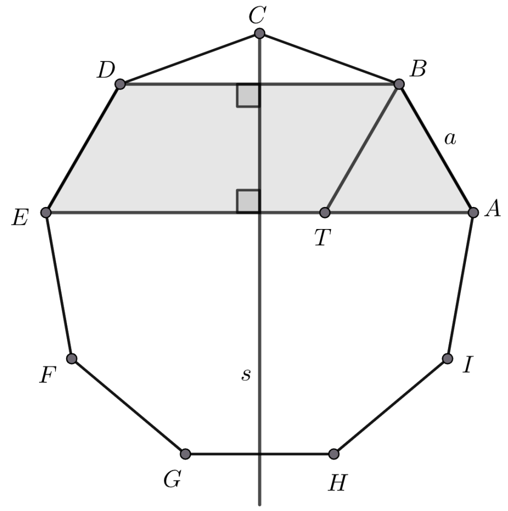
Dokaži da je u pravilnome deveterokutu razlika duljina najdulje i najkraće dijagonale jednaka duljini stranice.

Prvo rješenje.

Zbroj mjera svih unutarnjih kutova konveksnoga n-terokuta je $(n-2) \cdot 180°$.

Za $n = 9$ taj je zbroj $(9-2) \cdot 180° = 7 \cdot 180° = 1260°$.

U pravilnome deveterokutu su svi unutarnji kutovi sukladni, pa je mjera unutarnjeg kuta $1260° : 9 = 140°$.



Svaki pravilni poligon je osnosimetričan obzirom na simetralu bilo kojeg svog unutarnjeg kuta kao i obzirom na simetralu bilo koje svoje stranice. Stoga je pravilni deveterokut na slici osnosimetričan obzirom na simetralu s kuta $\measuredangle DCB$.

Na slici uočimo četverokut $ABDE$. Dužina $\overline{DB}$ najkraća je, a stranica $\overline{EA}$ najdulja dijagonala pravilnoga deveterokuta. Taj četverokut je također osnosimetričan obzirom na simetralu s kuta $\measuredangle DCB$, pa su mu stranice $\overline{DB}$ i $\overline{EA}$ okomite na nju. Vrijedi $\overline{DB} \| \overline{EA}$, pa je četverokut $ABDE$ trapez, a kako su mu neparalelne stranice $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ sukladne, to je jednakokračan trapez.

Promotrimo jednakokračan trokut BCD. Kako je $|\measuredangle DCB| = 140°$, vrijedi

$$|\measuredangle CBD| = |\measuredangle BDC| = \frac{180° - 140°}{2} = \frac{40°}{2} = 20°.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} |\measuredangle EDB| = |\measuredangle DBA| = 140° - 20° = 120°, \\ |\measuredangle AED| = |\measuredangle BAE| = 180° - 120° = 60°. \end{aligned}$$

Odaberimo na stranici $\overline{EA}$ točku T tako da je $\overline{TB} \| \overline{ED}$.

Četverokut $BDET$ je paralelogram, pa vrijedi $|ET| = |DB|$.

Onda je $|\measuredangle ATB| = |\measuredangle AED| = 60°$, pa je trokut ABT jednakostraničan.

Dakle, $|TA| = |AB|$, pa je razlika duljina najdulje i najkraće dijagonale

$$|EA| - |DB| = |EA| - |ET| = |TA| = |AB|.$$

Drugo rješenje.

Promotrimo četverokut $ABCE$.

Duljina najkraće dijagonale deveterokuta je $|AC| = |CE|$, a duljina najdulje dijagonale je $|AE|$.

Unutrašnji kut pravilnog deveterokuta iznosi $140°$, pa kutovi u jednakokračnom trokutu ABC iznose $140°$, $20°$ i $20°$.

Uočimo da je $|\measuredangle CEB| = |\measuredangle CAB| = 20° = |\measuredangle BCA| = |\measuredangle BEA|$.

Neka je točka T na dužini $\overline{AE}$ takva da je $|CE| = |TE|$.

Po S–K–S poučku vrijedi da su trokuti BCE i BTE sukladni. Slijedi da je $|BT| = |BC| = |BA|$.

Vrijedi

$$|\measuredangle CAE| = |\measuredangle AEC| = |\measuredangle AEB| + |\measuredangle BEC| = 20° + 20° = 40°,$$

pa je

$$|\measuredangle BAT| = |\measuredangle BAE| = |\measuredangle BAC| + |\measuredangle CAE| = 20° + 40° = 60°.$$

Dakle, trokut ABT je jednakokračan trokut kojem je mjera jednog kuta $60°$, pa zaključujemo da je jednakostraničan. Slijedi $|AE| - |CE| = |AE| - |ET| = |AT| = |AB|$.

Zadatak OŠ-7.4.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2024, 2025$ napisani u nekome poretku. Koje sve vrijednosti može poprimiti izraz $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2025}$?

Prvo rješenje.

Promatrani izraz mora biti cijeli broj jer zbrajamo i oduzimamo prirodne brojeve. Zadatak se može reformulirati na sljedeći način. Prirodnim brojevima od 1 do 2025 treba pridružiti predznake $+$ ili $-$ tako da točno 1012 brojeva ima predznak $-$, a potom dobivene brojeve s predznakom treba zbrojiti. Potrebno je odrediti koliko različitih zbrojeva možemo dobiti.

Pridruživanje predznaka se može prikazati tablicom kojoj su u prvom retku svi prirodni brojevi od 1 do 2025, a u drugom retku pridruženi predznaci.

Uočimo da se najveća vrijednost dobiva ako brojevima od 1013 do 2025 pridružimo predznak $+$, a ostalima predznak $-$:

1	...	1012	1013	...	2025
$-$	...	$-$	$+$	...	$+$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2025} &\leqslant (1013 + 1014 + \cdots + 2025) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 1012) \\ &= (1013 - 1 + 1014 - 2 + \cdots + 2024 - 1012) + 2025 \\ &= 1012^2 + 2025 = 1\,026\,169. \end{aligned}$$

Najmanju vrijednost se dobiva ako brojevima od 1014 do 2025 pridružimo predznak $-$, a ostalima predznak $+$:

1	...	1013	1014	...	2025
$+$	...	$+$	$-$	...	$-$

Iz toga zaključujemo

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2025} &\geqslant (1+2+3+\cdots+1013) - (1014+1015+\cdots+2025) \\ &= 1013 - (1014-1+1015-2+\cdots+2025-1012) \\ &= 1013 - 1012\cdot 1013 = -1011\cdot 1013 = -1\,024\,143. \end{aligned}$$

Nejednakosti pokazuju da nije moguće postići cijele brojeve koji su manji od $-1\,024\,143$ i veći od $1\,026\,169$.

Uočimo da ako zamijenimo predznak $-$ ispod broja k i predznak $+$ ispod broja $k+1$ vrijednost se izraza smanjuje za 2.

Promotrimo postupak kojim od prve tablice dobivamo drugu tablicu nizom zamjena predznaka u susjednim poljima drugog retka. Predznak $-$ ispod broja 1012 prvo zamijenimo s predznakom $+$ ispod broja 1013, pa nakon toga s predznakom $+$ ispod broja 1014, pa sve dok ne dođemo do zamjene s predznakom $+$ ispod broja 2025 i dobijemo tablicu

1	...	1011	1012	1013	...	2025
$-$	...	$-$	$+$	...	$+$	$-$

Na sličan način, nizom zamjena možemo predznak $-$ ispod 1011 dovesti do polja ispod broja 2024, predznak $-$ ispod 1010 dovesti ispod 2023 i tako dalje sve do predznaka $-$ ispod 1 kojeg dovedemo ispod 1014.

Ovime smo pokazali da možemo postići svaku drugu vrijednost (tj. svaki neparan broj) između $-1\,024\,143$ i $1\,026\,169$.

Pokažimo još da zadani izraz $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2025}$ ne može biti paran. Zaista, kako su zbroj i razlika parnih brojeva parni brojevi, a među brojevima $1, 2, 3, \ldots, 2024, 2025$ ima neparno mnogo neparnih brojeva, zaključujemo da je $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2025}$ uvijek neparan broj.

Dakle, izraz $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2025}$ može poprimiti vrijednost svakog neparnog broja većeg ili jednakog $-1\,024\,143$ i manjeg ili jednakog $1\,026\,169$ te ne može poprimiti nijednu drugu vrijednost.

Napomena: Redoslijed zamjena kojima mijenjamo poredak predznaka $-$ i $+$ nije bitan dok god mijenjamo mjesta predznacima u susjednim poljima. Zbog toga je dovoljno uočiti da u svakom pridruživanju predznaka koja ne daje najmanju moguću vrijednost postoji neki par susjednih polja u drugom retku tako da je predznak $-$ lijevo od predznaka $+$ (kad to ne bi bilo tako svi predznaci $+$ bi bili lijevo od predznaka $-$).

Drugo rješenje.

Promatrani izraz mora biti cijeli broj jer zbrajamo i oduzimamo prirodne brojeve.

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2025} &= (1+2+\ldots+2025) - 2\cdot(a_2+a_4+\ldots+a_{2024}) \\ &= 2025\cdot 1013 - 2\cdot(a_2+a_4+\ldots+a_{2024}). \end{aligned}$$

Broj koji smo dobili je razlika neparnog i parnog broja, pa je neparan broj. Time smo pokazali da promatrani izraz ne može biti paran broj.

Označimo $S = \{1, 2, \ldots, 2025\}$. Iz gornjeg zapisa zaključujemo da vrijednost promatranog izraza ovisi o odabiru podskupa $N = \{a_2, a_4, \ldots, a_{2024}\}$ skupa S, točnije o zbroju elemenata koji su odabrani u N.

Promatrani izraz ima najveću vrijednost ako u N izaberemo najmanjih 1012 brojeva iz skupa S, a najmanju vrijednost ako u N izaberemo najvećih 1012 brojeva iz skupa S. Te vrijednosti iznose redom $1\,026\,169$ i $-1\,024\,143$.

Nadalje, ako u podskupu N nisu odabrani svi najmanji brojevi iz skupa S, onda postoji neki broj $k \in S \setminus N$ takav da je $k + 1 \in N$. Izbacimo li broj $k + 1$ iz N, a dodamo broj k u N vrijednost promatranog izraza se smanjuje za 2. Ponavljanjem tog postupka možemo redom postići sve neparne brojeve $1\,026\,169$, $1\,026\,167$, $1\,026\,165$, $\ldots$, $-1\,024\,143$.

Zadatak OŠ-7.5.

Neka su a, b i c racionalni brojevi takvi da je

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} = 2$$

Koliko tada iznosi

$$\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}?$$

Prvo rješenje.

Redom računamo

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)} &= \frac{b+a-a}{a(a+b)} + \frac{c+b-b}{b(b+c)} + \frac{a+c-c}{c(c+a)} \\
&= \frac{b+a}{a(a+b)} - \frac{a}{a(a+b)} + \frac{c+b}{b(b+c)} - \frac{b}{b(b+c)} + \frac{a+c}{c(c+a)} - \frac{c}{c(c+a)} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c+a} \\
&= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}\right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c+a}\right) \\
&= \frac{a+b-b}{b(a+b)} + \frac{b+c-c}{c(b+c)} + \frac{c+a-a}{a(c+a)} \\
&= \frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} = 2.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} - \left(\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}\right) \\
&\qquad = \frac{a}{b(a+b)} - \frac{b}{a(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} - \frac{c}{b(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} - \frac{a}{c(c+a)} \\
&\qquad = \frac{a^2-b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2-c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2-a^2}{ca(c+a)}.
\end{aligned}$$

Iz

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
b^2 - c^2 &= (b-c)(b+c),\\
c^2 - a^2 &= (c-a)(c+a)
\end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2-c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2-a^2}{ca(c+a)} &= \frac{(a-b)(a+b)}{ab(a+b)} + \frac{(b-c)(b+c)}{bc(b+c)} + \frac{(c-a)(c+a)}{ca(c+a)}\\
&= \frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}\\
&= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)} = \frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)} = 2.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

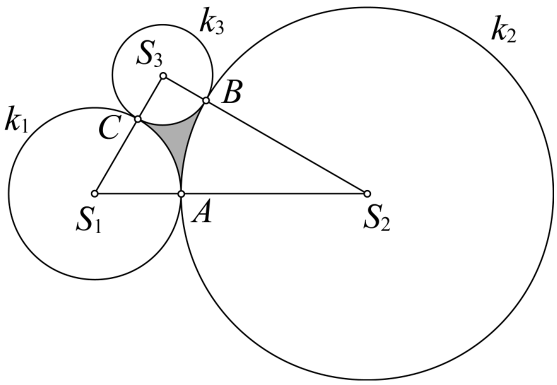
Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak OŠ-8.1.

Dane su kružnice k_1, k_2 i k_3, čiji su polumjeri redom $9 - 3\sqrt{3}$, $3 + 3\sqrt{3}$ i $3\sqrt{3} - 3$ i koje se međusobno u parovima dodiruju izvana. Kružnice k_1 i k_2 dodiruju se u točki A, kružnice k_2 i k_3 u točki B, a kružnice k_1 i k_3 u točki C. Odredi površinu dijela ravnine omeđenoga kružnim lukovima $\widehat{BA}$, $\widehat{AC}$ i $\widehat{CB}$.

Rješenje.

Neka su središta kružnica k_1, k_2 i k_3 redom točke S_1, S_2 i S_3.



Međusobne udaljenosti središta kružnica k_1, k_2 i k_3 su:

$|S_1S_2| = 9 - 3\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} = 12,$

$|S_2S_3| = 3 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 6\sqrt{3},$

$|S_1S_3| = 9 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 6.$

Kako za trokut $S_1S_2S_3$ vrijedi $|S_1S_2|^2 = |S_2S_3|^2 + |S_1S_3|^2$, prema obratu Pitagorina poučka zaključujemo da je on pravokutan i da je $|\measuredangle S_1S_3S_2| = 90°$.

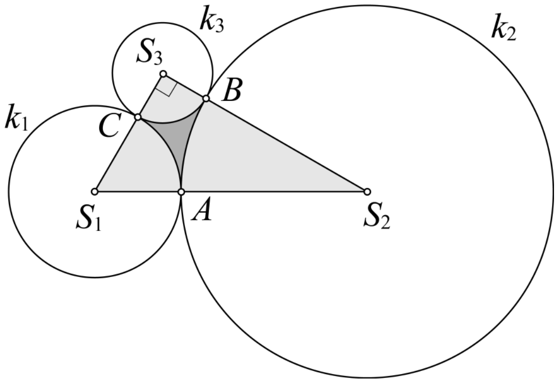
Duljina kraće katete jednaka je polovini duljine hipotenuze pa je trokut $S_1S_2S_3$ polovina jednakostraničnoga trokuta.

Šiljasti kutovi trokuta $S_1S_2S_3$ imaju veličine $|\measuredangle S_2S_1S_3| = 60°$ i $|\measuredangle S_3S_2S_1| = 30°$.

Tražena površina jednaka je razlici površine trokuta $S_1S_2S_3$ i zbroja površina kružnih isječaka određenih kružnim lukovima $\widehat{BA}$, $\widehat{AC}$ i $\widehat{CB}$.

Površina kružnog isječka određenog kružnim lukom $\widehat{BA}$ jednaka je $\frac{1}{12}$ površine kruga polumjera $3 + 3\sqrt{3}$.

Na isti način zaključujemo da je površina kružnog isječka određenog kružnim lukom $\widehat{AC}$ jednaka $\frac{1}{6}$ površine kruga polumjera $9 - 3\sqrt{3}$, a površina kružnog isječka određenog kružnim lukom $\widehat{CB}$ jednaka $\frac{1}{4}$ površine kruga polumjera $3\sqrt{3} - 3$.



Stoga je tražena površina:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{1}{12}(3+3\sqrt{3})^2\pi + \frac{1}{6}(9-3\sqrt{3})^2\pi + \frac{1}{4}(3\sqrt{3}-3)^2\pi \right) \\
&= 18\sqrt{3} - \left(\frac{1}{12}(9+18\sqrt{3}+27)\pi + \frac{1}{6}(81-54\sqrt{3}+27)\pi + \frac{1}{4}(27-18\sqrt{3}+9)\pi \right) \\
&= 18\sqrt{3} - \left(\left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)\pi + (18-9\sqrt{3})\pi + \left(9 - \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)\pi \right) \\
&= 18\sqrt{3} - \left(\left(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 18 - 9\sqrt{3} + 9 - \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)\pi \right) \\
&= 18\sqrt{3} - (30-12\sqrt{3})\pi.
\end{aligned}
$$

Površina dijela ravnine omeđenog kružnim lukovima $\widehat{BA}$, $\widehat{AC}$ i $\widehat{CB}$ je $18\sqrt{3} - (30-12\sqrt{3})\pi$.

Zadatak OŠ-8.2.

Odredi sve četvorke realnih brojeva (a, b, c, d) koje zadovoljavaju sustav jednadžba

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= d^2 \\
b + c + d &= a^2 \\
c + d + a &= b^2 \\
d + a + b &= c^2.
\end{aligned}
$$

Prvo rješenje.

Oduzimanjem prve i druge jednadžbe dobivamo

$$a - d = d^2 - a^2,$$

odnosno $(a-d)(a+d+1) = 0$, iz čega zaključujemo da su brojevi a i d jednaki ili im je zbroj jednak -1.

Analogno (oduzimanjem odgovarajućih dviju jednadžbi) zaključujemo da isto vrijedi za bilo koja dva od brojeva a, b, c i d.

Zaključujemo da je svaki od brojeva b, c i d jednak a ili $-a-1$.

Promatramo dva slučaja: ili su brojevi b, c i d jednaki ili su dva od ta tri broja jednaka, a treći je različit od njih.

Slučaj I. Ako vrijedi $b = c = d$, imamo dvije mogućnosti.

Slučaj I.1. Ako vrijedi $a = b = c = d$, onda sve dane jednadžbe glase $3a = a^2$.

Stoga mora biti $a = 0$ ili $a = 3$, tj. imamo rješenja

$$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0) \text{ ili } (a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3).$$

Slučaj I.2. Ako vrijedi $-1-a = b = c = d$, onda uvrštavanjem u bilo koju od danih jednadžbi dobivamo $a^2 + 3a + 3 = 0$. Svođenjem na potpun kvadrat uočavamo da je ta jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

odnosno

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

što očito nije moguće jer kvadrat realnog broja ne može biti negativan.

Slučaj II. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b = c \neq d$. Ostali slučajevi se rješavaju na isti način jer zamjenom varijabli dobivamo isti sustav.

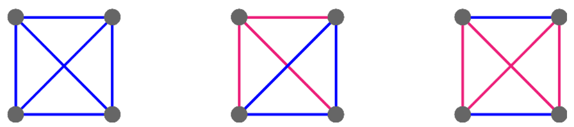
Slučaj II.1. Ako je $b = c = a$ i $d = -a - 1$, onda je $-1 - d = a = b = c$ i ovaj slučaj se rješava na isti način kao Slučaj I.2. (zamjenom varijabli a i d).

Slučaj II.2. Ako je $b = c = -1 - a$ i $d = a$, onda uvrštavanjem u bilo koju od danih jednadžbi dobivamo $a^2 + a + 2 = 0$. Svođenjem na potpun kvadrat uočavamo da je ta jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

za što opet zaključujemo da nije moguće jer kvadrat realnog broja ne može biti negativan. Sva rješenja sustava su $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ i $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3)$.

Napomena: Slučajeve možemo ilustrirati grafički s četiri vrha (a, b, c, d) između kojih je plavi brid ako su brojevi jednaki, a crveni brid ako nisu jednaki. Graf mora imati svojstvo da u svakom trokutu imamo neparno mnogo plavih bridova (jedan ili tri). Takvih grafova (do na promjenu oznaka vrhova) ima točno tri:



Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da za bilo koja dva od brojeva a, b, c i d vrijedi da su jednaki ili da im je zbroj jednak -1. Promotrimo parove a i d te b i c.

Slučaj A. Neka je $a + d = -1$ i $b + c = -1$.

Zbrajanjem svih jednadžbi početnog sustava dobivamo

$$3(a + b + c + d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

odnosno

$$-6 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

što nije moguće, pa u ovom slučaju nema rješenja.

Slučaj B. Neka je $a + d = -1$ i $b = c$. Tada je $a = b = c$ ili $b = c = d$. Ta dva slučaja se rješavaju na isti način (samo zamijenimo a i d), te odgovaraju slučajevima I.2 i II.1 iz prvog rješenja.

Slučaj C. Neka je $a = d$ i $b + c = -1$. Ovaj slučaj se rješava na isti način kao Slučaj B.

Slučaj D. Neka je $a = d$ i $b = c$. Ako je $a = b$, onda je $a = b = c = d$, te dobivamo rješenja $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ i $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3)$ kao u prvom rješenju.

Ako je $a + b = -1$, onda je $c + d = -1$, te kao u slučaju A slijedi $-6 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, što nije moguće.

Zadatak OŠ-8.3.

Za prirodni broj n promatramo tablicu s pet redaka i n stupaca. U svakom stupcu odabrana su tri polja i na svako od njih postavljen je po jedan žeton.

Odredi najmanji broj n za koji je uvijek (neovisno o tome gdje su postavljeni žetoni) moguće odabrati tri retka i tri stupca tako da se u svih devet polja na presjecima tih redaka i stupaca nalaze žetoni.

Rješenje.

Postavljanjem tri žetona u svaki stupac, dva polja ostaju prazna.

Prazna polja (a time i tri mjesta za žetone) možemo odabrati na $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina.

Pokažimo primjerom slaganje žetona u tablici s pet redaka i deset stupaca na način da se niti jednom ne pojave dva stupca i dva retka takva da su sva polja u presjeku prazna, odnosno da ne postoje tri retka i dva stupca takva da se na svim poljima u presjeku nalaze žetoni.

				●	●	●	●	●	●
	●	●	●				●	●	●
●		●	●		●	●			●
●	●		●	●		●		●	
●	●	●		●	●		●		

U tablici s pet redaka i dvadeset stupaca ne postoje tri retka i tri stupca takva da se na svim poljima u presjeku nalaze žetoni. Primjer za to dobivamo spajanjem dviju tablica opisanih u prethodnom primjeru.

				●	●	●	●	●	●	●					●	●	●	●	●	●
	●	●	●				●	●	●	●		●	●	●				●	●	●
●		●	●		●	●				●	●		●	●		●	●			
●	●		●	●		●		●	●		●	●		●	●		●		●	●
●	●	●		●	●		●				●	●	●		●	●		●		

Budući da se žetoni u svakom stupcu mogu rasporediti na deset različitih načina, u tablici s pet redaka i dvadeset jednim stupcem moraju se pojaviti tri stupca u kojima su žetoni raspoređeni na isti način.

U takvoj tablici možemo odabrati tri retka i tri stupca takva da se u svih devet polja presjeka tih redaka i stupaca nalaze žetoni, pa je minimalni $n = 21$.

Zadatak OŠ-8.4.

Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi. Ako je duljina hipotenuze 2025, odredi duljine kateta toga trokuta.

Rješenje.

Označimo duljine kateta pravokutnog trokuta s a i b, pri čemu su $a, b \in \mathbb{N}$.

Prema Pitagorinom poučku imamo jednadžbu $a^2 + b^2 = 2025^2$.

Tražimo sva rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 = 2025^2$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{N}$.

Razmotrimo slučajeve mogućih ostataka kvadrata prirodnog broja x pri dijeljenju s 3.

Ako je $x = 3k$, tada je ostatak pri dijeljenju izraza $(3k)^2$ s 3 jednak 0.

Ako je $x = 3k \pm 1$, tada je ostatak pri dijeljenju izraza $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ s 3 jednak 1.

Ostatci kvadrata prirodnog broja x pri dijeljenju s 3 mogu biti 0 i 1.

Kako je 2025^2 djeljiv s 3, zaključujemo da su i a i b djeljivi s 3.

Uvrstimo li da su $a = 3k$ i $b = 3l$, pri čemu su $k, l \in \mathbb{N}$, imamo

$$(3k)^2 + (3l)^2 = 2025^2.$$

Dijeljenjem jednadžbe s 9 dobivamo

$$k^2 + l^2 = 675^2.$$

Ponovimo li ovaj postupak još tri puta dobit ćemo jednadžbu

$$m^2 + n^2 = 25^2,$$

pri čemu je $a = 81m$ i $b = 81n$, a $m, n \in \mathbb{N}$.

Kako 25^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju 3, jedan od brojeva m i n mora biti djeljiv s 3, a drugi davati ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Zato je dovoljno provjeriti slučajeve $m \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

m	$n^2 = 25^2 - m^2$	n
3	616	$n \notin \mathbb{N}$
6	589	$n \notin \mathbb{N}$
9	544	$n \notin \mathbb{N}$
12	481	$n \notin \mathbb{N}$
15	400	$n = 20$
18	301	$n \notin \mathbb{N}$
21	184	$n \notin \mathbb{N}$
24	49	$n = 7$

Moguće duljine kateta su

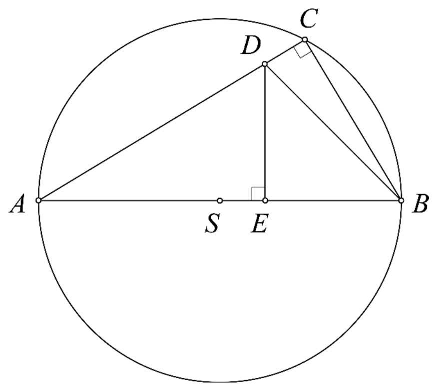
$$(a, b) = (81 \cdot 15, 81 \cdot 20) = (1215, 1620) \text{ i } (a, b) = (81 \cdot 24, 81 \cdot 7) = (1944, 567).$$

Zadatak OŠ-8.5.

Dana je kružnica s promjerom $\overline{AB}$ i točka C na toj kružnici takva da je $|AC| : |CB| = 5 : 3$. Neka je D točka na dužini $\overline{AC}$ takva da je $|\measuredangle DBA| = 45°$. Koliki je omjer $|AD| : DC|$?

Prvo rješenje.

Neka je točka E nožište visine iz točke D na stranicu $\overline{AB}$.



Po uvjetu zadatka i Talesovom poučku o kutu nad promjerom, trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

Po uvjetu zadatka i primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC dobivamo

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\
|AB|^2 &= \left(\frac{5}{3}|BC|\right)^2 + |BC|^2 \\
|AB|^2 &= \frac{34}{9}|BC|^2 \\
|AB| &= \frac{\sqrt{34}}{3}|BC|.
\end{aligned}$$

Prema K–K poučku trokuti ABC i ADE su slični pa je

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Kako je $|ED| = |EB|$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{|AB| - |EB|}{|EB|} &= \frac{5}{3} \\
\frac{\sqrt{34}}{3}\frac{|BC|}{|EB|} &= \frac{8}{3} \\
\frac{|EB|}{|BC|} &= \frac{\sqrt{34}}{8}.
\end{aligned}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut EBD imamo

$$|BD| = \sqrt{|EB|^2 + |ED|^2} = \sqrt{|EB|^2 + |EB|^2} = |EB|\sqrt{2},$$

pa je $|BD| = \frac{\sqrt{34}}{8}|BC|\sqrt{2} = \frac{\sqrt{17}}{4}|BC|$.

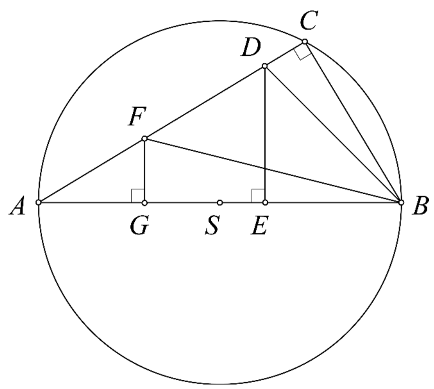
Primjenom Pitagorina poučka na trokut BCD dobivamo

$$|DC| = \sqrt{(|BD|^2 - |BC|^2)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{4}|BC|\right)^2 - |BC|^2} = \frac{|BC|}{4}.$$

Konačno je $|AD| = |AC| - |DC| = \frac{5}{3}|BC| - \frac{1}{4}|BC| = \frac{17}{12}|BC|$, odnosno $|AD| : |DC| = 17 : 3$.

Drugo rješenje.

Po uvjetu zadatka i Talesovom poučku o kutu nad promjerom, trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Neka je točka E nožište visine iz točke D na stranicu $\overline{AB}$, točka F točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|CF| = |CB|$ te točka G nožište visine iz F na stranicu $\overline{AB}$.



Trokut BCF je jednakokračan trokut pa je $|BC| = |CF| = \frac{3}{5}|AC|$.

Zbog toga je $|AF| = |AC| - |CF| = \frac{2}{5}|AC|$. Trokuti ABC i AGF su pravokutni trokuti sa zajedničkim kutom pri vrhu A, pa su ti trokuti slični po poučku K–K i vrijedi da je $|GF| = \frac{3}{5}|AG|$.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut AGF dobivamo

$$\begin{aligned}
|AF|^2 &= |AG|^2 + |GF|^2 \\
\left(\frac{2}{5}|AC|\right)^2 &= |AG|^2 + \left(\frac{3}{5}|AG|\right)^2 \\
\frac{4}{25}|AC|^2 &= \frac{34}{25}|AG|^2 \\
|AG| &= \frac{\sqrt{34}}{17}|AC|.
\end{aligned}$$

Tada je $|GF| = \frac{3}{5}|AG| = \frac{3\sqrt{34}}{85}|AC|$.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC dobivamo

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\
|AB|^2 &= |AC|^2 + \left(\frac{3}{5}|AC|\right)^2 \\
|AB|^2 &= \frac{34}{25}|AC|^2 \\
|AB| &= \frac{\sqrt{34}}{5}|AC|.
\end{aligned}$$

Tada je $|GB| = |AB| - |AG| = \frac{\sqrt{34}}{5}|AC| - \frac{\sqrt{34}}{17}|AC| = \frac{12\sqrt{34}}{85}|AC|$.

Trokuti GBF i BCD su pravokutni trokuti za koje vrijedi da kut s vrhom B ima veličinu $|\measuredangle CBA| - 45°$, pa su ti trokuti slični po K–K poučku.

Imamo:

$$\begin{aligned}
|GF| : |CD| &= |GB| : |CB| \\
\frac{3\sqrt{34}}{85}|AC| : |DC| &= \frac{12\sqrt{34}}{85}|AC| : \frac{3}{5}|AC| \\
|DC| &= \left(\frac{3\sqrt{34}}{85} \cdot \frac{3}{5} : \frac{12\sqrt{34}}{85}\right)|AC| \\
|DC| &= \frac{3}{20}|AC|.
\end{aligned}$$

Kako je $|AD| = |AC| - |CD| = \frac{17}{20}|AC|$, dobivamo da je traženi omjer $|AD| : |DC| = 17 : 3$.