DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

29. travnja 2025.

Zadatak B-1.1.

U skupu realnih brojeva riješi nejednadžbu

$$\left|\sqrt{x^2+90x+2025}-\sqrt{x^2-90x+2025}\right| \leqslant x.$$

Rješenje.

Zadana nejednadžba je ekvivalentna nejednadžbi

$$\left|\sqrt{(x+45)^2}-\sqrt{(x-45)^2}\right| \leqslant x,$$

odnosno

$$\Big||x+45|-|x-45|\Big| \leqslant x.$$

Budući da vrijedi

$$\Big||x+45|-|x-45|\Big| \geqslant 0,$$

onda vrijedi

$$x \geqslant 0.$$

Kako je $x \geqslant 0$, onda je $|x+45|-|x-45| \geqslant 0$, pa je i sljedeća nejednažba ekvivalentna zadanoj:

$$|x+45|-|x-45| \leqslant x.$$

Promatramo dva slučaja:

- Ako je $0 \leqslant x < 45$, tada je

  $$|x+45| = x+45, \quad |x-45| = -(x-45) = 45-x,$$

  pa je

  $$x+45-(45-x) \leqslant x \;\Leftrightarrow\; 2x \leqslant x \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 0,$$

  što je moguće ako i samo ako vrijedi $x=0$.

- Ako je $x \geqslant 45$, tada je

  $$|x+45| = x+45, \quad |x-45| = x-45,$$

  pa je

  $$x+45-(x-45) \leqslant x \;\Leftrightarrow\; 90 \leqslant x,$$

  i skup je rješenja $[90, \infty)$.

Skup je rješenja zadane nejednadžbe

$$\{0\} \cup [90, \infty).$$

Zadatak B-1.2.

Za prirodni broj k veći od 2, svaki je broj iz skupa $\{6, 8, 10, \ldots, 2k\}$ pomnožen sa svakim brojem iz skupa $\{5, 7, 9, \ldots, 2k-1\}$ te je S_k zbroj svih dobivenih umnožaka.

Za koji k vrijedi $S_k = 21\,000$?

Rješenje.

Množenjem zbroja svih elemenata prvog skupa i zbroja svih elemenata drugog skupa dobivamo zbroj svih umnožaka jednog broja iz prvog skupa i jednog broja iz drugoga skupa, pa je zato

$$S_k = (6 + 8 + 10 + \cdots + 2k) \cdot (5 + 7 + 9 + \cdots + (2k-1)).$$

Uočimo da vrijedi

$$6 + 8 + 10 + \cdots + 2k = 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \cdots + k) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + k) - 2 \cdot (1 + 2)$$

$$= 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} - 6 = k^2 + k - 6 = (k-2)(k+3).$$

Na sličan način zaključujemo da je

$$5+7+9+\cdots+(2k-1) = 1+2+3+4+5+\cdots+(2k-1)+2k-(1+2+3+4)-(6+8+10+\cdots+2k)$$

$$= \frac{2k(2k+1)}{2} - 10 - (k-2)(k+3) = 2k^2 + k - 10 - k^2 - k + 6 = k^2 - 4 = (k-2)(k+2).$$

Vrijedi

$$S_k = (k-2)^2(k+2)(k+3),$$

odnosno

$$(k-2)^2(k+2)(k+3) = 21000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Imamo sljedeće mogućnosti:

- Ako je $(k-2)^2 = 4 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k+2 = 6,\ k+3 = 7$, ali to ne daje 21000.
- Ako je $(k-2)^2 = 25 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow k+2 = 9,\ k+3 = 10$, također ne daje 21000.
- Ako je $(k-2)^2 = 100 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow k+2 = 14,\ k+3 = 15$,
  tada je:
  $$S_k = 100 \cdot 14 \cdot 15 = 21000.$$

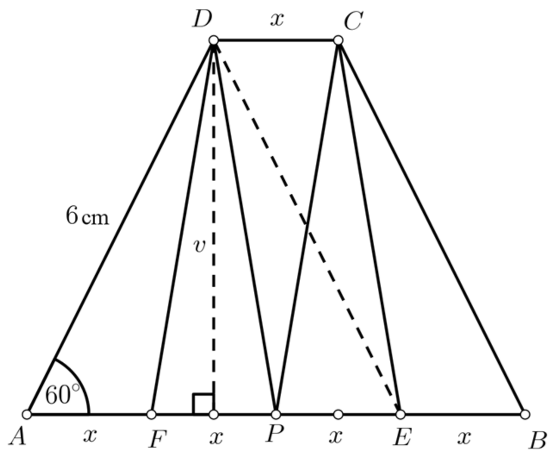
Prema tome, za $k = 12$, zbroj svih umnožaka je 21000.

Zadatak B-1.3.

U jednakokračnome je trapezu jedna osnovica četiri puta dulja od druge, duljina kraka iznosi 6 cm, a mjera je šiljastoga kuta $60°$. Trapez je podijeljen na pet trokuta jednakih površina tako da svi vrhovi tih trokuta pripadaju osnovicama trapeza, a svaki vrh trapeza može biti zajednički vrh najviše trima trokutima.

Odredi površinu toga trapeza i zbroj opsega svih pet navedenih trokuta.

Rješenje.



Budući da svi trokuti imaju vrhove na osnovicama, njihova je visina jednaka visini trapeza. Uz jednake površine, slijedi da moraju imati sukladne osnovice. Budući da je jedna osnovica trapeza četiri puta dulja od druge, dulju osnovicu dijelimo na četiri dijela, te zaključujemo da će svaki od tih dijelova biti osnovica jednog od četiri trokuta, a treći vrh tih trokuta će biti ili točka C ili točka D. Ako bi točka C bila vrh barem trima trokutima s osnovicom na $\overline{AB}$, onda bi ta točka bila zajednički vrh barem četiri trokuta jednake površine, što nije moguće prema uvjetu u zadatku. Na isti način argumentiramo u vezi točke D i dolazimo do zaključka da točno dva trokuta s osnovicom na $\overline{AB}$ moraju imati točku C kao treći vrh, te točno dva takva trokuta imaju D kao treći vrh.

Dakle, jedini raspored trokuta koji zadovoljava sve uvjete je prikazan na slici.

Na osnovici $\overline{AB}$ označimo točke E, F i P takve da je $|\overline{AF}| = |\overline{FP}| = |\overline{PE}| = |\overline{EB}| = x$.

Paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz točku D siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E, pa je četverokut $EBCD$ paralelogram.

Svi kutovi trokuta AED su $60°$, pa je trokut AED jednakostraničan.

Slijedi da je $3x = 6$, odnosno $x = 2\,\text{cm}$.

Nadalje, $|\overline{CD}| = x = 2\,\text{cm}, \quad |\overline{AB}| = 4x = 8\,\text{cm}$.

Kako je $\sin 60° = \dfrac{v}{6}$ ili $6^2 = v^2 + (1.5x)^2$, slijedi $v = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Površina trapeza $ABCD$ iznosi:

$$P = \frac{4x + x}{2} \cdot v = \frac{5 \cdot 2}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Nadalje, $|\overline{CE}| = \sqrt{v^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{27+1} = 2\sqrt{7}\,\text{cm}.$

Zbroj opsega svih pet trokuta:

$$o = 5x + 2 \cdot |\overline{AD}| + 8 \cdot |\overline{CE}| = 10 + 2 \cdot 6 + 8 \cdot 2\sqrt{7} = 22 + 16\sqrt{7} = 2(11 + 8\sqrt{7})\,\text{cm}.$$

Zadatak B-1.4.

Jednoga dana učiteljica je na dodatnu nastavu matematike donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka. Jabuke iz jedne kutije podijelile su djevojčice, a iz druge dječaci. Broj djevojčica za pet je manji od broja jabuka koje je dobila svaka od njih, a broj jabuka koje je dobio svaki dječak za dva je veći od broja dječaka.

Drugoga je dana na dodatnu nastavu došla jedna djevojčica više te dva dječaka manje nego prvoga dana. Učiteljica je ponovno donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka (broj jabuka u kutijama prvoga i drugoga dana nije nužno jednak) te su djevojčice podijelile jabuke iz jedne kutije, a dječaci iz druge. Svaka je djevojčica dobila jednu jabuku manje, a svaki dječak osam jabuka više nego prvoga dana.

Koliko je dječaka i djevojčica bilo na dodatnoj nastavi prvoga dana?

Rješenje.

Neka je x broj djevojčica, a y broj dječaka koji su došli na dodatnu nastavu matematike prvog dana. Ukupan broj jabuka koje imaju djevojčice jednak je ukupnom broju jabuka koje imaju dječaci, pa vrijedi:

$$x(x+5) = y(y+2),$$
$$x^2 + 5x = y^2 + 2y. \tag{1}$$

Drugog dana broj djevojčica je $x+1$, a svaka dobiva jednu jabuku manje, pa je drugog dana ukupni broj jabuka koje su dobile djevojčice:

$$(x+1)(x+4).$$

Broj dječaka drugog dana je $y-2$, a svaki dobiva 8 jabuka više, pa je drugog dana ukupni broj jabuka koje su dobili dječaci:

$$(y-2)(y+10).$$

Izjednačavanjem broja jabuka dobivamo:

$$(x+1)(x+4) = (y-2)(y+10).$$

Množenjem zagrada s obje strane znaka jednakosti slijedi

$$x^2 + 5x + 4 = y^2 + 8y - 20 \tag{2}$$

Oduzimanjem jednadžbi (2) i (1) slijedi:

$$4 = 6y - 20,$$

$$y = 4.$$

Uvrštavanjem u (1) slijedi:

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x &= 24, \\
x^2 + 5x - 24 &= 0, \\
(x+8)(x-3) &= 0,
\end{aligned}$$

pa je $x = 3$ (jer broj djevojčica mora biti pozitivan).

Prvog su dana na dodatnoj nastavi bile tri djevojčice i četiri dječaka.

Zadatak B-1.5.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\left(a + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{a}\right)^2 \geqslant 8c.$$

Rješenje.

Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{a}\right)^2 &= a^2 + 2a \cdot \frac{c}{b} + \frac{c^2}{b^2} + b^2 + 2b \cdot \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} \\
&= a^2 + \frac{c^2}{a^2} + b^2 + \frac{c^2}{b^2} + 2c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).
\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo:

$$a^2 + \frac{c^2}{a^2} \geqslant 2c, \quad b^2 + \frac{c^2}{b^2} \geqslant 2c, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2,$$

pa slijedi:

$$\left(a + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{a}\right)^2 \geqslant 2c + 2c + 4c = 8c,$$

što je i trebalo pokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

29. travnja 2025.

Zadatak B-2.1.

Neka su a i b rješenja jednadžbe $x^2 + px + 1 = 0$, a c i d rješenja jednadžbe $x^2 + qx + 1 = 0$, pri čemu su p i q realni brojevi. Odredi $|p - q|$ ako vrijedi

$$(a - c)(b - c)(a - d)(b - d) = 2025.$$

Rješenje.

Kako su a i b rješenja jednadžbe $x^2 + px + 1 = 0$ primjenom Vièteovih formula dobivamo da je

$$a + b = -p \quad \text{i} \quad ab = 1. \quad (*)$$

Analogno, iz druge jednadžbe primjenom Vièteovih formula dobivamo

$$c + d = -q \quad \text{i} \quad cd = 1. \quad (**)$$

Iz $(a - c)(b - c)(a - d)(b - d) = 2025$ korištenjem $(*)$ i $(**)$ dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{gathered}
(ab - ac - bc + c^2)(ab - ad - bd + d^2) = 2025 \\
(1 - c(a + b) + c^2)(1 - d(a + b) + d^2) = 2025 \\
(1 + cp + c^2)(1 + dp + d^2) = 2025 \\
1 + dp + d^2 + cp + cdp^2 + cd^2p + c^2 + c^2dp + c^2d^2 = 2025 \\
1 + dp + d^2 + cp + p^2 + dp + c^2 + cp + 1 = 2025 \\
2 + 2dp + 2cp + d^2 + c^2 + p^2 = 2025 \\
2 + 2p(c + d) + (c + d)^2 - 2cd + p^2 = 2025 \\
2 - 2pq + q^2 - 2 + p^2 = 2025 \\
(p - q)^2 = 2025 \\
|p - q| = 45
\end{gathered}$$

Zadatak B-2.2.

Neka je $S = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$. Treba odabrati podskup T skupa S takav da zbroj nikoja dva različita elementa skupa T ne bude djeljiv s 10.

Koliko najviše elemenata može imati skup T?

Rješenje.

Neka je O_i podskup koji sadrži elemente koji daju ostatak i pri dijeljenju s 10, $0 \leqslant i \leqslant 9$.

Tada je:

$$\begin{aligned}
&O_0 = \{10, 20, 30, \ldots, 90, 100\}, && |O_0| = 10\\
&O_1 = \{1, 11, 21, 31, \ldots, 91, 101\}, && |O_1| = 11\\
&O_2 = \{2, 12, 22, 32, \ldots, 92, 102\}, && |O_2| = 11\\
&O_3 = \{3, 13, 23, 33, \ldots, 93\}, && |O_3| = 10\\
&\quad\vdots\\
&O_9 = \{9, 19, 29, \ldots, 99\}, && |O_9| = 10
\end{aligned}$$

Uočimo da zbroj bilo koja dva elementa iz skupa O_0 i O_5 daje broj djeljiv s 10. Nadalje, zbroj dvaju brojeva iz podskupova O_1 i O_9, O_2 i O_8, O_3 i O_7, O_4 i O_6 daje broj djeljiv s 10. Ako bismo promatrali podskup od 45 ili više brojeva, onda bismo po Dirichletovom principu imali barem dva elementa koja pripadaju paru podskupova i njihov zbroj bi bio djeljiv s 10.

Kako skupovi O_1 i O_2 imaju najviše elemenata, podskup sa zadanim svojstvima dobit ćemo kao uniju podskupova O_1, O_2, jednog od podskupova O_3 i O_7, jednog od podskupova O_4 i O_6 te po jednog (bilo kojeg) elementa iz podskupova O_0 i O_5.

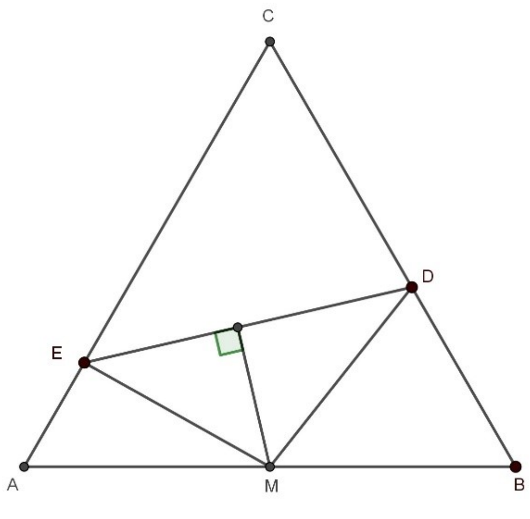
Prema tome, traženi podskup sa zadanim svojstvom može imati najviše $11+11+10+10+1+1 = 44$ elemenata.

Zadatak B-2.3.

Zadan je jednakostraničan trokut ABC duljine stranice 2 cm. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom su odabrane točke D i E takve da je $|CD| + |CE| = 3$ cm.

Ako je M polovište stranice $\overline{AB}$, odredi mjeru kuta $\sphericalangle DME$.

Rješenje.



Neka je $|CE| = x$. Tada je prema uvjetu zadatka $|CD| = 3 - x$.

Kako je trokut ABC jednakostraničan primjenom poučka o kosinusu uz oznake kao na slici dobivamo:

$$|MD|^2 = |MB|^2 + |BD|^2 - 2|MB||BD| \cdot \cos 60^\circ = 1 + (x-1)^2 - 2(x-1) \cdot \frac{1}{2} = x^2 - 3x + 3$$

$$|ME|^2 = |AE|^2 + |AM|^2 - 2|AE||AM| \cdot \cos 60^\circ = (2-x)^2 + 1 - 2(2-x) \cdot \frac{1}{2} = x^2 - 3x + 3.$$

Kako je $|MD| = |ME|$ zaključujemo da je trokut MDE jednakokračan.

Nadalje, primjenimo li poučak o kosinusu na trokut CDE dobivamo:

$$|DE|^2 = |CD|^2 + |CE|^2 - 2|CD||CE| \cdot \cos 60^\circ = (3-x)^2 + x^2 - 2x(3-x) \cdot \frac{1}{2} = 3(x^2 - 3x + 3).$$

Konačno iz jednakokračnog trokuta MDE slijedi

$$\sin\left(\frac{|\sphericalangle DME|}{2}\right) = \frac{|DE|}{2|MD|} = \frac{\sqrt{3(x^2-3x+3)}}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, $\dfrac{|\sphericalangle DME|}{2} = 60^\circ$ odnosno $|\sphericalangle DME| = 120^\circ$.

Zadatak B-2.4.

Odredi sva realna rješenja sustava jednadžba

$$x + y^2 = y^3$$
$$y + x^2 = x^3.$$

Rješenje.

Oduzmemo li od jednadžbe $x+y^2 = y^3$ jednadžbu $y+x^2 = x^3$ dobivamo $x-y+y^2-x^2 = y^3-x^3$.

Iz $x - y + y^2 - x^2 = y^3 - x^3$ slijedi $(x-y) - (x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) = 0$, odakle faktorizacijom dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$(x-y) - (x-y)(x+y) + (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$$
$$(x-y)(1 - x - y + x^2 + xy + y^2) = 0$$

Ako je $x - y = 0$ uvrštavanjem $x = y$ u bilo koju od zadanih jednadžbi slijedi $x^3 - x^2 - x = 0$, odnosno $x(x^2 - x - 1) = 0$.

Stoga zaključujemo $x = 0$ ili $x^2 - x - 1 = 0$, to jest $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Dakle, realna rješenja sustava jednadžbi su: $(0,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Iz $1-x-y+x^2+xy+y^2=0$ dobivamo $x^2+(y-1)x+y^2-y+1=0$, odakle slijedi

$$x_{1,2} = \frac{1-y \pm \sqrt{-3y^2+2y-3}}{2}.$$

Promotrimo kvadratnu funkciju $f(y)=-3y^2+2y-3$. Kako je vodeći koeficijent $a=-3<0$ i diskriminanta $D=-32<0$, zaključujemo da kvadratna funkcija $f(y)=-3y^2+2y-3$ poprima negativne vrijednosti za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Stoga jednadžba $x^2+(y-1)x+y^2-y+1=0$ nema realnih rješenja.

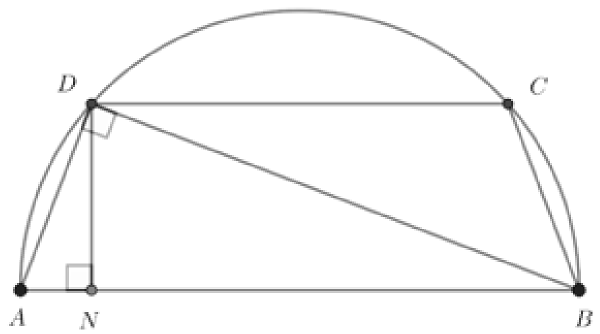
Dakle, rješenja sustava jednadžbi su $(x,y) \in \left\{(0,0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Zadatak B-2.5.

Među svim trapezima koji su upisani u kružnicu promjera $\overline{AB}$ duljine 2 cm tako da im je taj promjer jedna osnovica, trapez $ABCD$ ima najveći opseg.

Odredi duljinu druge osnovice toga trapeza.

Rješenje.



Kako je dužina $\overline{AB}$ paralelna s dužinom $\overline{CD}$ riječ je o jednakokračnom trapezu. Neka je N nožište visine trapeza povučene iz vrha D na stranicu $\overline{AB}$.

Označimo $|AN|=x$. Tada je $|NB|=2-x$.

Prema Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice zaključujemo da je trokut ABD pravokutan s pravim kutom pri točki D.

Stoga je prema Euklidovom poučku $|DN| = \sqrt{|AN| \cdot |NB|} = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2x-x^2}$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut AND dobivamo

$$|AD| = \sqrt{|AN|^2 + |DN|^2} = \sqrt{x^2 + 2x - x^2} = \sqrt{2x}.$$

Budući da je trapez jednakokračan, slijedi da je $|CD| = 2 - 2x$, pa opseg trapeza možemo izraziti kao funkciju po x, tj.

$$o(x) = 2 + 2 - 2x + 2\sqrt{2x} = 4 - 2x + 2\sqrt{2x} = 5 - (2x - 2\sqrt{2x} + 1) = 5 - \left(\sqrt{2x} - 1\right)^2.$$

Očito funkcija $o(x)$ poprima maksimalnu vrijednost za $\sqrt{2x} - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}$.

Stoga je duljina kraće osnovice $|CD| = 2 - 2x = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ cm.

Napomena: Maksimum funkcije $o(x) = 4 - 2x + 2\sqrt{2x}$ može se odrediti i na sljedeći način. Kako x može poprimiti vrijednosti iz intervala $[0, 1]$, zaključujemo da je $\sqrt{2x} \in [0, \sqrt{2}]$.

Uvedemo li supsituciju $\sqrt{2x} = t$, tražimo maksimum funkcije $f(t) = -t^2 + 2t + 4$ na intervalu $[0, \sqrt{2}]$. Kako funkcija f poprima maksimum za $t = 1 \in [0, \sqrt{2}]$, konačno dobivamo $\sqrt{2x} = 1$, odnosno $x = \frac{1}{2}$.

Stoga je duljina kraće osnovice $|CD| = 2 - 2x = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ cm.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

29. travnja 2025.

Zadatak B-3.1.

Dokaži da nejednadžba

$$2\log_{\frac{1}{5}}\left(49^{\sqrt{x^2-2}}-1\right)+\log_5\left(7^{\sqrt{4x^2-8}}+\frac{1}{5}\right)\geqslant -1$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje.

Zapišimo nejednadžbu u obliku

$$-2\log_5\left(7^{2\sqrt{x^2-2}}-1\right)+\log_5\left(7^{2\sqrt{x^2-2}}+\frac{1}{5}\right)\geqslant -1.$$

Neka je $t=7^{2\sqrt{x^2-2}}$, $t>0$, $|x|\geqslant\sqrt{2}$.

Tada je $-2\log_5(t-1)+\log_5\left(t+\frac{1}{5}\right)\geqslant -1$.

Ova će nejednadžba imati rješenje ako je $t-1>0$ i $t+\frac{1}{5}>0$, odnosno $t>1$. ($\clubsuit$)

Slijedi da je

$$\begin{aligned}
\log_5\frac{t+\frac{1}{5}}{(t-1)^2}&\geqslant -1\\
\frac{5t+1}{5(t-1)^2}&\geqslant 5^{-1}\Big/\cdot 5(t-1)^2>0\\
5t+1&\geqslant t^2-2t+1\\
t^2-7t&\leqslant 0
\end{aligned}$$

Rješenje dobivene kvadratne nejednadžbe je interval $[0,7]$, što zajedno s uvjetom ($\clubsuit$) daje $t\in\langle 1,7]$. Vraćanjem na nepoznanicu x redom dobivamo

$$\begin{aligned}
1<7^{2\sqrt{x^2-2}}&\leqslant 7\\
0<2\sqrt{x^2-2}&\leqslant 1\\
0<\sqrt{x^2-2}&\leqslant\frac{1}{2}\\
0<x^2-2&\leqslant\frac{1}{4}\\
2<x^2&\leqslant\frac{9}{4}\\
\sqrt{2}<|x|&\leqslant\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Tada je $x\in\left[-\frac{3}{2},-\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{2},\frac{3}{2}\right]$, pa očito dana nejednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak B-3.2.

Točka $C(4,-2)$ vrh je trokuta ABC. Visina povučena iz vrha B leži na pravcu zadanome jednadžbom $6x-5y+35=0$, a težišnica povučena iz vrha A leži na pravcu zadanome jednadžbom $7x+3y+5=0$. Odredi koordinate vrhova A i B.

Rješenje.

Označimo s v_b pravac na kojemu leži visina iz vrha B, a s t_a pravac na kojemu leži težišnica iz vrha A.

Tada je pravac AC okomit na v_b i prolazi točkom C. Vektor normale pravca AC jednak je $\vec{n}=5\vec{i}+6\vec{j}$, pa je njegova jednadžba

$$5(x-4)+6(y+2)=0,$$

odnosno $5x+6y-8=0$.

Vrh A presjek je pravca AC i težišnice t_a, odnosno koordinate vrha A su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} 5x+6y-8=0 \\ 7x+3y+5=0. \end{cases}$$

Dakle vrh A ima koordinate $A(-2,3)$.

Neka vrh B ima koordinate $B(x,y)$. Tada su koordinate polovišta P stranice $\overline{BC}$ jednake

$$x_P=\frac{x+4}{2}, \quad y_P=\frac{y-2}{2}.$$

Polovište P se nalazi na težišnici t_a pa vrijedi

$$7\cdot\frac{x+4}{2}+3\cdot\frac{y-2}{2}+5=0,$$

ili jednostavnije $7x+3y+32=0$.

Budući da točka B pripada i visini v_b, njezine koordinate (x,y) osim prethodne jednadžbe, zadovoljavaju i jednadžbu $6x-5y+35=0$.

Dakle rješenje sustava

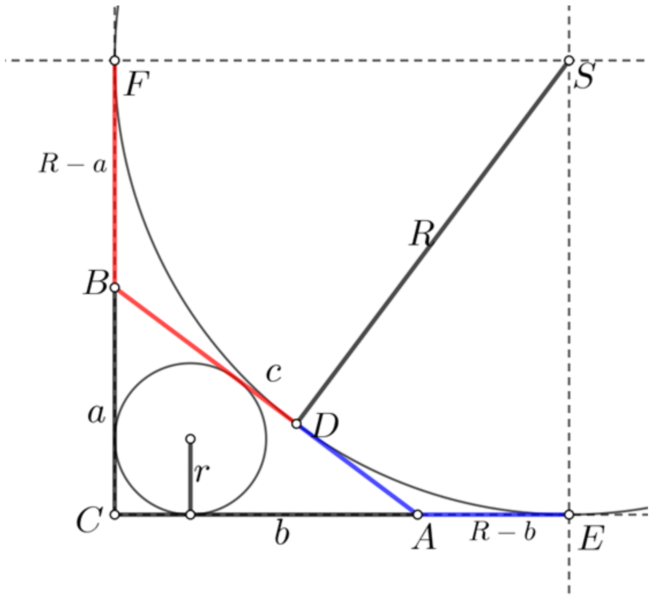
$$\begin{cases} 6x-5y+35=0 \\ 7x+3y+32=0 \end{cases}$$

jest vrh $B(-5,1)$.

Zadatak B-3.3.

Pravokutnome je trokutu upisana kružnica polumjera 3, a kružnica koja dira hipotenuzu i produžetke kateta ima polumjer 18. Odredi duljine stranica toga pravokutnog trokuta.

Rješenje.



Uvedimo oznake kao na skici.

Kako vrijedi $SF \perp FC$, $FC \perp CE$, $CE \perp SE$ i $|SF| = |SE| = R$ četverokut $SFCE$ je kvadrat duljine stranice R.

Pravac AE je tangenta na kružnicu te vrijedi $|AD| = |AE|$.

Pravac BF je tangenta na kružnicu te vrijedi $|BF| = |BD|$.

Za duljinu hipotenuze vrijedi

$$|AB| = |AD| + |BD| = |AE| + |BF| =$$
$$= (|CE| - |CA|) + (|CF| - |CB|).$$

Stoga je $c = (R - b) + (R - a)$, odnosno $2R = a + b + c$.

Neka je r polumjer trokutu ABC upisane kružnice.

Tada je $c = (a - r) + (b - r)$, odnosno $2r = a + b - c$.

Iz $2 \cdot 18 = a + b + c$ i $2 \cdot 3 = a + b - c$ slijedi $a + b = 21$.

Za površinu trokuta ABC vrijedi $P = \frac{ab}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$ odakle slijedi $ab = 3 \cdot (a+b+c) = 3 \cdot 36 = 108$.

Sada rješavanjem sustava

$$\begin{cases} a + b = 21 \\ \quad ab = 108 \end{cases}$$

dobivamo $(a, b) = (12, 9)$ ili $(a, b) = (9, 12)$. Tada je $c = 36 - 21 = 15$.

Dakle, duljine kateta su 9 i 12, a duljina hipotenuze iznosi 15.

Zadatak B-3.4.

Odredi najmanju moguću pozitivnu vrijednost realnoga parametra B za koji jednadžba

$$30 - 30\cos(Bx) = |x - 30| + |x + 30|$$

ima točno 30 rješenja u skupu realnih brojeva.

Rješenje.

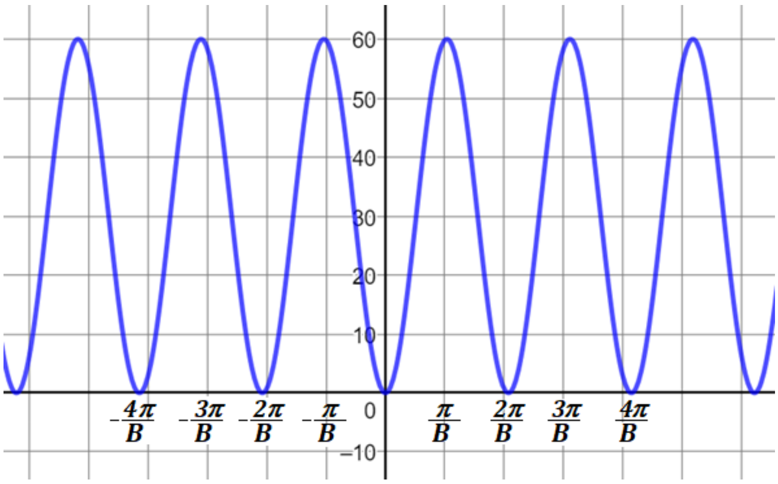
Zadatak rješavamo grafičkom metodom.

Neka je $f(x) = 30\,(1 - \cos(Bx))$. Vrijednosti funkcije f se nalaze u intervalu $[0, 60]$.

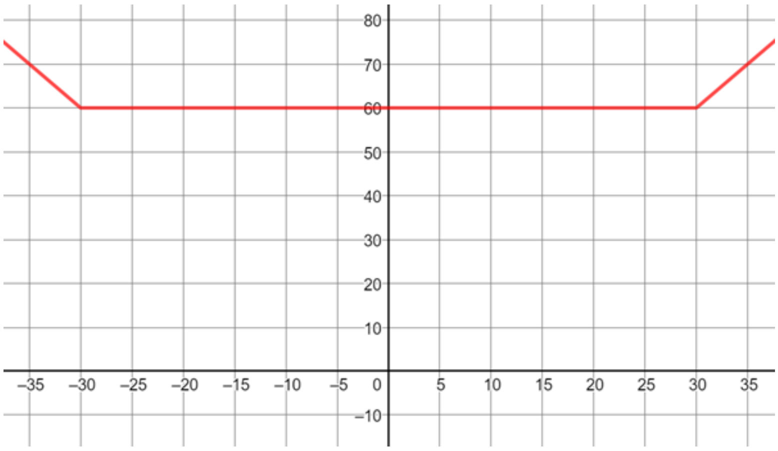
Temeljni period funkcije f je $\frac{2\pi}{B}$, pomak po osi ordinata iznosi 30, $f(0) = 0$, graf je simetričan s obzirom na os ordinata (zbog parnosti funkcije kosinus).

Minimalnu vrijednost 0 funkcija poprima za $\cos(Bx) = 1$, tj za $x = \frac{2k\pi}{B}$, $k \in \mathbb{Z}$.

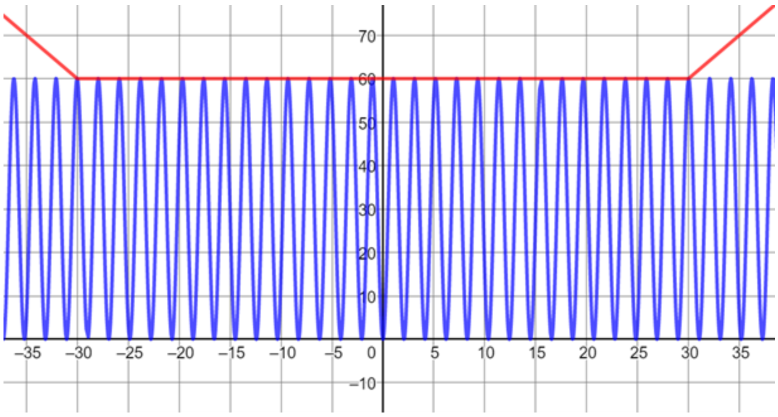
Maksimalnu vrijednost 60 funkcija f poprima za $\cos(Bx) = -1$, tj. za $x = \frac{(2k+1)\pi}{B}$, $k \in \mathbb{Z}$. $(\star)$



Neka je $g(x) = |x-30| + |x+30| = \begin{cases} -2x, \ x < -30 \\ 60, \ -30 \leqslant x < 30 \\ 2x, \ 30 \leqslant x \end{cases}$



Rješenja polazne jednadžbe su apscise zajedničkih točaka grafova funkcija f i g.



Uočavamo da zajedničke točke ta dva grafa su one točke kojima je ordinata 60, tj. rješenja jednadžbe su oni $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijednost funkcije f maksimalna.

Kako su obje funkcije parne, dovoljno je promatrati samo pozitivne realne brojeve x.

Da bi jednadžba imala točno 30 rješenja, njih 15 mora biti pozitivno, a zbog ($\star$) to su brojevi oblika $\frac{\pi}{B}, \frac{3\pi}{B}, \ldots, \frac{27\pi}{B}, \frac{29\pi}{B}$ (prvi za $k=0$, zadnji za $k=14$) i mora vrijediti $\frac{29\pi}{B} \leqslant 30$, a kako je B pozitivan mora biti $B \geqslant \frac{29\pi}{30}$.

Pošto se traži najmanja vrijednost parametra B zaključujemo $B = \frac{29\pi}{30}$.

Zadatak B-3.5.

Prirodni broj zovemo *moćnim* ako je djeljiv s kvadratom svakoga svojeg prostog faktora. Dokaži da se svaki moćni prirodni broj može zapisati u obliku a^2b^3, pri čemu su a i b prirodni brojevi.

Rješenje.

Svaki se prirodni broj može zapisati kao umnožak potencija prostih faktora. Budući da je moćan broj djeljiv s kvadratom svakog svojeg prostog faktora, svi prosti faktori moćnoga broja imaju eksponent veći ili jednak 2.

Razdvojimo na početku proste faktore s parnim eksponentom i one s neparnim. Neka je m faktora s parnim i n faktora s neparnim eksponentom ($m, n \geqslant 0$).

Svi su parni eksponenti oblika $2k$, a svi neparni oblika $2l+3$. Tada se svaka potencija prostog broja p s parnim eksponentom može napisati kao kvadrat $\left(p^k\right)^2$, a svaki se prosti faktor q s neparnim eksponentom može napisati kao $q^{2l+3} = \left(q^l\right)^2 \cdot q^3$, $l \geqslant 0$.

Umnožak svih m prostih faktora s parnim eksponentom možemo pisati kao

$$\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}\right)^2,$$

a umnožak svih n prostih faktora s neparnim eksponentom kao

$$\left(q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{l_n}\right)^2 (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n)^3.$$

Tada je moćni broj x jednak

$$\begin{aligned} x &= \left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}\right)^2 \cdot \left(q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{l_n}\right)^2 (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n)^3 = \\ &= \left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} \cdot q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{l_n}\right)^2 \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n)^3 = \\ &= a^2b^3, \qquad \text{za } m > 0, n > 0. \end{aligned}$$

U slučaju da x nema prostih faktora s parnim eksponentom ($m = 0$), broj $a = q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{l_n}$, a broj b ostaje isti, odnosno $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$.

U slučaju da x nema faktora s neparnim eksponentom ($n = 0$) broj $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, a broj $b = 1$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

29. travnja 2025.

Zadatak B-4.1.

Neka su

$$f_1(x)=\frac{x-1}{x+1} \quad \text{i} \quad f_n(x)=(f_1\circ f_{n-1})(x) \quad \text{za sve } n\in\mathbb{N},\, n\geqslant 2$$

pravila pridruživanja funkcija zadanih na njihovoj prirodnoj domeni. Koliko iznosi $f_{2025}(5)$?

Rješenje.

Računanjem nekoliko prvih kompozicija dobivamo:

$$f_2(x)=(f\circ f_1)(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}}=\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}=\frac{-2}{2x}=-\frac{1}{x}$$

$$f_3(x)=(f\circ f_2)(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}}=\frac{-1-x}{-1+x}=\frac{-(x+1)}{x-1}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$f_4(x)=(f\circ f_3)(x)=f\left(\frac{-1-x}{-1+x}\right)=\frac{\frac{-1-x}{-1+x}-1}{\frac{-1-x}{-1+x}+1}=\frac{\frac{-1-x+1-x}{-1+x}}{\frac{-1-x-1+x}{-1+x}}=\frac{-2x}{-2}=x$$

$$f_5(x)=(f\circ f_4)(x)=f(x).$$

Uočavamo cikličnost n-te kompozicije, odnosno vrijedi:

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x),\ n=4k-3 \\ -\frac{1}{x},\ n=4k-2 \\ -\frac{1}{f(x)},\ n=4k-1 \\ x,\ n=4k,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Vrijedi $2025=4\cdot 507-3$ pa konačno dobijemo:

$$f_{2025}=f(5)=\frac{5-1}{5+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Zadatak B-4.2.

Odredi najveći prirodni broj n za koji je broj

$$2+3+4+\cdots+n+(n+1)$$

nultočka polinoma $P(x)=x^3-151x^2+2175x-2025$.

Rješenje.

Uočimo da je $x=1$ jedna nultočka danog polinoma P. Dijenjenjem polinoma P polinomom $Q(x)=x-1$ kao količnik dobivamo polinom $S(x)=x^2-150x+2025$ čije su nultočke 135 i 15. Sada možemo polinom P zapisati u faktoriziranom obliku:

$$P(x)=(x-135)(x-15)(x-1).$$

Najveću vrijednost broja n dobit ćemo za najveću nultočku ovog polinoma, odnosno za broj 135. Dakle, vrijedi da je $2+3+4+\cdots+n+(n+1)=135$. Zbroj brojeva na lijevoj strani ove jednadžbe jednak je $\dfrac{(n+3)n}{2}$ pa treba riješiti jednadžbu

$$\frac{(n+3)n}{2}=135,$$

odnosno $n^2+3n-270=0$. Traženi broj n je pozitivno rješenje ove jednadžbe, tj. $n=15$.

Zadatak B-4.3.

Za svaki pravac koji prolazi točkom $(0,1)$ koordinatne ravnine konstruirana su njegova sjecišta s pravcima zadanim jednadžbama

$$x+y-2=0 \quad \text{i} \quad -x+y-2=0$$

te polovište dužine kojoj su rubne točke navedena sjecišta. Koju krivulju određuje skup svih tako dobivenih polovišta? Odredi jednadžbu te krivulje.

Rješenje.

Jednadžba proizvoljnog pravca koji prolazi točkom $T(0,1)$ glasi $y=kx+1$, za neki $k\in\mathbb{R}$. Pronađimo prvo koordinate točke M kao sjecišta zadanog pravca $x+y-2=0$ i pravca $y=kx+1$:

$$\begin{gathered}-x+2=kx+1\\ \Longrightarrow x=\frac{1}{k+1},\ y=\frac{2k+1}{k+1}.\end{gathered}$$

Dakle, koordinate točke M su $\left(\dfrac{1}{k+1},\dfrac{2k+1}{k+1}\right)$. Na analogan način, rješavanjem sustava jednadžbi $y=kx+1$ i $-x+y-2=0$, dobivamo da su koordinate drugog sjecišta N jednake $\left(\dfrac{1}{k-1},\dfrac{2k-1}{k-1}\right)$.

Koordinate polovišta $P(x_P,y_P)$ dužine $\overline{MN}$ dane su s $x_P=\dfrac{x_M+x_N}{2}$ i $y_P=\dfrac{y_M+y_N}{2}$. Uvrštavanjem dobivamo $P\left(\dfrac{k}{k^2-1},\dfrac{2k^2-1}{k^2-1}\right)$.

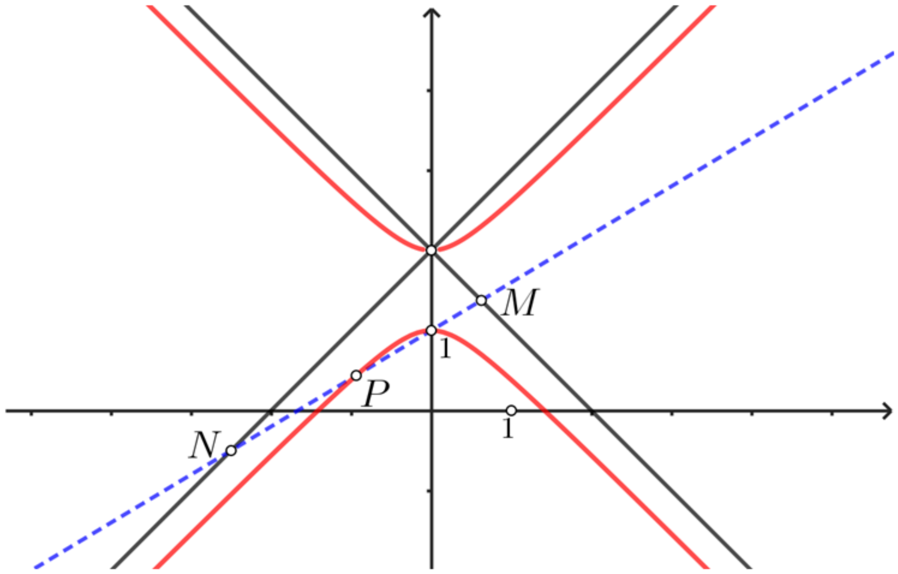
Kako bismo dobili jednadžbu traženoga skupa točaka moramo dobiti vezu između koordinata x_P i y_P, odnosno eliminirati parametar k. Primijetimo da vrijedi:

$$y_P - 2 = \frac{2k^2-1}{k^2-1} - 2 = \frac{1}{k^2-1} = \frac{x_P}{k} \Longrightarrow k = \frac{x_P}{y_P - 2}.$$

Također imamo:

$$y_P = \frac{2k^2-1}{k^2-1} \Longrightarrow k^2 = \frac{y_P - 1}{y_P - 2}.$$

Kvadriranjem izraza za k i izjednačavanjem jednadžbi dobivamo jednadžbu tražene krivulje u obliku $x^2 - (y-2)(y-1) = 0$. Sređivanjem ove jednadžbe konačno dobijemo jednadžbu pomaknute hiperbole $x^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.



Zadatak B-4.4.

Prirodni broj koji se čita jednako slijeva nadesno i zdesna nalijevo naziva se *palindrom*. Ako slučajno odaberemo šesteroznamenkasti palindrom x, kolika je vjerojatnost da je i broj $\frac{x}{11}$ palindrom?

Rješenje.

Šesteroznamenkasti palindrom x je oblika $\overline{abccba}$ i može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} \overline{abccba} &= 100000a + 10000b + 1000c + 100c + 10b + a \\ &= 100001a + 10010b + 1100c = 11(9091a + 910b + 100c), \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je x uvijek djeljiv s 11. Zaključujemo da je i $\frac{x}{11}$ prirodan broj koji može biti četveroznamenkast ili peteroznamenkast.

Ako je $\frac{x}{11}$ četveroznamenkasti palindrom, onda vrijedi $10000 > \frac{x}{11} > \frac{100000}{11} > 9090$. Dakle, prva znamenka palindroma $\frac{x}{11}$, a time i zadnja, mora biti jednaka 9. Tada znamo da će i zadnja znamenka broja x biti jednaka 9. No, tada bi i prva znamenka broja x trebala biti 9, ali to je nemoguće jer je najveći broj x kojeg u ovom slučajmo možemo dobiti jednak $9999 \cdot 11 = 109989$. Dakle, ne postoji šesteroznamenkasti palindrom x za koji je broj $\frac{x}{11}$ četveroznamenkasti palindrom.

Neka je dakle $\frac{x}{11} = \overline{efgfe}$ za neke znamenke e, f i g. Tada vrijedi:

$$x = \overline{abccba} = 11 \cdot \overline{efgfe} = 10 \cdot \overline{efgfe} + \overline{efgfe} = \overline{efgfe0} + \overline{efgfe}.$$

Zapišimo ovaj zbroj po znamenkama, kao u pismenom zbrajanju:

$$\begin{array}{ccccccc} & e & f & g & f & e & 0 \\ + & & e & f & g & f & e \\ \hline & a & b & c & c & b & a \end{array}$$

Promatrajući zadnju znamenku odmah vidimo da mora biti $e = a$. Kako bi sada i prva znamenka zbroja bila ispravna, ne smije biti prijenosa vrijednosti prilikom zbrajanja znamenki f i e na drugoj poziciji, pa sigurno vrijedi $e + f < 10$. Treća i četvrta znamenka zbroja su jednake i dobiju se zbrajanjem istog para znamenki f i g, pa kako nema prijenosa vrijednosti u zbroju znamenki na petoj poziciji (zbog $e + f < 10$), također ne smije biti prijenosa vrijednosti prilikom zbrajanja znamenki f i g na četvrtoj poziciji, tj. vrijedi $f + g < 10$.

Sada zaključujemo da za znamenke e, f i g vrijedi:

$$\begin{aligned} e &= a \\ f &= b - e = b - a \\ g &= c - f = c - (b - a). \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da znamenke a, b i c polaznog palindroma x moraju zadovoljavati sljedeće uvjete kako bi broj $\frac{x}{11}$ bio peteroznamenkasti palindrom:

$$\begin{aligned} 1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9 \qquad &(1) \\ b - a \leqslant c \leqslant 9 \qquad &(2) \end{aligned}$$

Ako je $f = b - a = k$ za neki prirodni broj $0 \leqslant k \leqslant 8$ tada znamenki c koje zadovoljavaju uvjet (2) ima točno $9 - k + 1 = 10 - k$. Za taj isti k, parova znamenki (a, b) koji zadovoljavaju uvjet (1) takvih da je $b - a = k$ ima $9 - k$. Stoga ukupni broj trojki (a, b, c) koje zadovoljavaju prethodne uvjete, a time i broj šesteroznamenkastih palindroma x za koje je broj $\frac{x}{11}$ također palindrom, računamo kao zbroj:

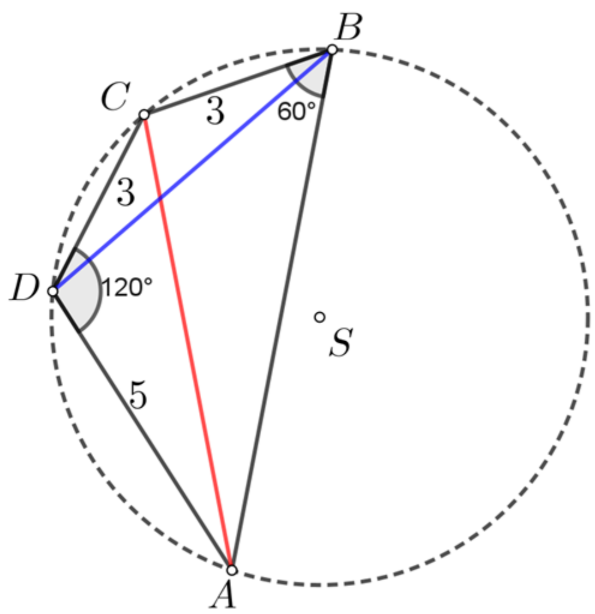
$$\sum_{k=0}^{k=8} (10 - k) \cdot (9 - k) = 10 \cdot 9 + 9 \cdot 8 + \cdots + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 330.$$

Ukupni broj svih šesteroznamenkastih palindroma jednak je $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Konačno, tražena vjerojatnost iznosi $\frac{330}{900} = \frac{11}{30}$.

Zadatak B-4.5.

Neka je $ABCD$ četverokut kojemu se može opisati kružnica. Vrijedi $|BC| = |CD| = 3$ i $|DA| = 5$, a mjera kuta ADC iznosi $120°$. Izračunaj duljinu kraće dijagonale toga četverokuta.

Rješenje.



Ako primijenimo poučak o kosinusu na trokut ACD slijedi

$$|AC|^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 49.$$

Dakle, duljina dijagonale $\overline{AC}$ iznosi 7.

Budući da je zadani četverokut tetivan, zbroj njegovih nasuprotnih kutova jednak je $180°$, pa je mjera kuta CBA jednaka $60°$. Primijenimo li sada poučak o kosinusu na trokut ABC slijedi da je

$$7^2 = 3^2 + |AB|^2 - 2 \cdot 2 \cdot |AB| \cdot \cos 60°,$$

odnosno $|AB|^2 - 3|AB| - 40 = 0$, odakle se dobije $|AB| = 8$.

Primijenimo poučak o kosinusu i na trokute DCB i BAD, pri čemu ćemo kut BAD označiti s α. Dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180° - \alpha) = 18 + 18\cos\alpha \\
|BD|^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos\alpha = 89 - 80\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Izrazimo li $\cos\alpha$ iz prve jednadžbe i uvrstimo u drugu slijedi da je $|BD|^2 = \dfrac{9 \cdot 169}{49}$, odnosno $|BD| = \dfrac{39}{7}$. Dakle, duljina kraće dijagonale iznosi $\dfrac{39}{7}$.