Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

1. Odredi sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$|a+3| + b^2 + 4c^2 - 14b - 12c + 56 = 0.$$

2. Odredi sve trojke realnih brojeva (a, b, c) koje su rješenja sustava jednadžba

$$\begin{aligned} a^3 + b^2c &= ac \\ b^3 + c^2a &= ba \\ c^3 + a^2b &= cb. \end{aligned}$$

3. Odredi sve četvorke prirodnih brojeva (a, b, k, n) za koje vrijedi

$$k \cdot 2^{2n} - (2k-1) \cdot 2^n + k - 1 = k \cdot 2^{a+b} - 2^b.$$

4. Iz ploče dimenzija 2025×2025 uklonjen je kvadrat dimenzija 7×7, a preostali dio ploče prekriva se pločicama dimenzija 1×4 (tako da svaka pločica prekriva točno četiri polja).

(a) Ako uklonimo središnji 7×7 kvadrat, dokaži da je preostali dio ploče moguće pokriti pločicama dimenzija 1×4.

(b) Ako uklonimo 7×7 kvadrat koji sadrži jedan ugao ploče, dokaži da preostali dio ploče nije moguće pokriti pločicama dimenzija 1×4.

5. Neka su K i L redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$. Za točku T unutar paralelograma vrijedi $|KT| = |AK|$ i $|LT| = |CL|$. Neka je M polovište dužine $\overline{BT}$. Dokaži da je $\sphericalangle MAT = \sphericalangle TCM$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

1. Odredi sve uređene trojke realnih brojeva (x, y, z) koje su rješenja sustava jednadžba

$$\begin{aligned} xy + 1 &= 2z \\ yz + 1 &= 2x \\ zx + 1 &= 2y. \end{aligned}$$

2. U stožac osnovke polumjera 1 i visine duljine $2\sqrt{2}$ upisan je kvadar takav da jedna strana kvadra pripada osnovki stošca, a vrhovi suprotne strane pripadaju plaštu stošca.

Ako je strana kvadra koja pripada osnovki stošca kvadrat, koliko je najveće oplošje koje takav kvadar može imati?

3. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (k, n) takve da vrijedi

$$7 \cdot n^n - n^3 = (n + 8)^k.$$

4. Neka je M točka unutar trokuta ABC na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Pravci AM, BM i CM ponovo sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC redom u točkama A_1, B_1 i C_1. Neka je P sjecište dužina $\overline{A_1C_1}$ i $\overline{AB}$ te Q sjecište dužina $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{AC}$.

Dokaži da su pravci PQ i BC paralelni.

5. U svako polje pravokutne ploče s 3 stupca i 14 redaka upisan je simbol X ili O. Za ploču kažemo da je *balansirana* ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- svaki 3×3 kvadrat sadržava najviše 5 simbola X i najviše 5 simbola O
- u svakom 3×3 kvadrati nijedna dijagonala ni redak ni stupac ne sadržavaju tri ista simbola.

Za balansiranu ploču P, *centar* od P je ploča s 3 stupca i 12 redaka dobivena uklanjanjem prvoga i posljednjega retka iz P.

Među svim balansiranim pločama koliko postoji različitih centara?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

1. Odredi sve parove pozitivnih realnih brojeva (x, y) koji su rješenja sustava jednadžba

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{180} \\ y^{x+y} &= x^{45}. \end{aligned}$$

2. Neka je n prirodni broj. Svakom je vrhu kvadrata pridružen cijeli broj. Broj pridružen vrhu može se zamijeniti zbrojem brojeva pridruženih dvama od ostalih vrhova.

Dokaži da je uvijek (neovisno o odabiru početnih brojeva pridruženih vrhovima) nizom opisanih zamjena moguće postići da brojevi pridruženi svim četirima vrhovima budu djeljivi s n.

3. Tablica dimenzija 2025×2025 popunjena je tako da se u polju u i-tome retku i j-tome stupcu nalazi broj $i + j - 1$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2025\}$. Odabrano je 2025 polja koja se nalaze u različitim retcima i različitim stupcima.

Koja je najmanja moguća vrijednost umnoška brojeva na odabranim poljima?

4. Neka je D točka unutar trokuta ABC i neka je E točka na dužini $\overline{AD}$ različita od A i D. Opisane kružnice trokuta BDE i CDE sijeku stranicu $\overline{BC}$ redom u točkama F i G. Neka je X sjecište pravaca DG i AB, a Y sjecište pravaca DF i AC.

Dokaži da su pravci XY i BC paralelni.

5. Za različite prirodne brojeve m i n kažemo da su *prijatelji* ako postoje prirodni brojevi a i b koji nisu djeljivi sa 101 takvi da je

$$\frac{(m!)^n}{(n!)^m} = \frac{a}{b}.$$

Postoji li prosti broj koji ima točno 12 prijatelja?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

1. Dokaži da je broj

$$102^{102} - 100^{100}$$

djeljiv sa 101^2.

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x)) + f(y) = 2y + f(x - y).$$

3. Neka je n prirodan broj. Za prirodni broj m, neka $f_m(n)$ označava broj djelitelja broja n^{m+1} koji su veći od n^m. Dokaži da postoji prirodni broj K takav da za svaki $m \geqslant K$ vrijedi $f_m(n) = f_{m+1}(n)$.

4. Dan je jednakokračni trokut ABC sa stranicama duljina $|AB| = |AC| = 5$ te $|BC| = 6$. Točka D odabrana je na stranici $\overline{AC}$, a točka P na dužini $\overline{BD}$ tako da je $\sphericalangle CPA = 90°$. Ako je $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCB$, odredi omjer

$$\frac{|AD|}{|DC|}.$$

5. Dana je ploča dimenzija 9×9 čija su sva polja bijela. Odredi najveći broj polja koja je moguće obojiti u crveno tako da svaki dio ploče dimenzija 2×2 sadržava najviše dva crvena polja.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.