DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$|a+3|+b^2+4c^2-14b-12c+56=0.$$

Rješenje.

Zadanu jednakost nadopunjavanjem do kvadrata možemo zapisati kao

$$|a+3|+(b-7)^2+(2c-3)^2=2.$$

Sva tri pribrojnika s lijeve strane jednakosti su nenegativni cijeli brojevi. Pribrojnik $(2c-3)^2$ je neparan i manji od 3, pa mora biti jednak 1. Slijedi da je ili $2c-3=1$, odnosno $c=2$, ili je $2c-3=-1$, odnosno $c=1$.

Nadalje, vrijedi

$$|a+3|+(b-7)^2=1.$$

Zaključujemo da je jedan od pribrojnika jednak 1, a drugi 0.

Ako je $|a+3|=0$, dobivamo rješenja $a=-3$, $b=8$ i $a=-3$, $b=6$.

Ako je $(b-7)^2=0$, dobivamo rješenja $a=-2$, $b=7$ i $a=-4$, $b=7$.

Konačno, sve tražene trojke (a, b, c) su

$$(-3,8,1),(-3,8,2),(-3,6,1),(-3,6,2),(-2,7,1),(-2,7,2),(-4,7,1),(-4,7,2).$$

Zadatak A-1.2.

Odredi sve trojke realnih brojeva (a, b, c) koje su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
a^3+b^2c&=ac\\
b^3+c^2a&=ba\\
c^3+a^2b&=cb.
\end{aligned}$$

Rješenje.

Ako prvu jednakost pomnožimo s b, drugu s c, a treću s a, dobivamo

$$a^3b + b^3c = b^3c + c^3a = c^3a + a^3b = abc.$$

Stoga je $a^3b = b^3c = c^3a$. Ako je jedan od brojeva a, b, c jednak 0, tada su svi jednaki 0 i dobivamo rješenje $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Pretpostavimo sada da su sva tri broja različita od 0. Tada iz $a^3b = c^3a$ slijedi $b = \frac{c^3}{a^2}$.

Iz $b^3c = c^3a$ slijedi

$$\frac{c^9}{a^6} \cdot c = c^3a,$$

pa je $a^7 = c^7$ iz čega slijedi $a = c$.

Analogno dobivamo $c = b$ i $b = a$, pa su svi brojevi jednaki. Uvrštavanjem u početni sustav dobivamo $2a^3 = a^2$, pa je $a = \frac{1}{2}$ i dobivamo rješenje $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dakle, tražene trojke su $(0, 0, 0)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak A-1.3.

Odredi sve četvorke prirodnih brojeva (a, b, k, n) za koje vrijedi

$$k \cdot 2^{2n} - (2k - 1) \cdot 2^n + k - 1 = k \cdot 2^{a+b} - 2^b.$$

Rješenje.

Zadanu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$k \cdot (2^{a+b} - 2^{2n} + 2^{n+1} - 1) = 2^n + 2^b - 1. \tag{1}$$

Ako je $a + b > 2n$, onda je

$$2^{a+b} - 2^{2n} + 2^{n+1} - 1 \geqslant 2^{a+b} - 2^{a+b-1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{a+b-1} + 2^{n+1} - 1.$$

Kako je $a + b - 1 \geqslant b$ i $n + 1 > n$, slijedi da je taj izraz strogo veći od $2^n + 2^b - 1$, pa je lijeva strana jednakosti (1) strogo veća od desne. Dakle, $a + b \leqslant 2n$.

Ako je $a + b < 2n$, onda je

$$2^{2n} - 2^{a+b} \geqslant 2^{2n} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1},$$

pa je

$$2^{a+b} - 2^{2n} + 2^{n+1} - 1 \leqslant -2^{2n-1} + 2^{n+1} - 1.$$

Ako je $2n - 1 \geqslant n + 1$, slijedi da je lijeva strana jednakosti (1) negativna a desna pozitivna. Ako je $2n - 1 < n + 1$ slijedi $n < 2$, ali za $n = 1$ ne može vrijediti $a + b < 2n$. Dakle, $a + b \geqslant 2n$.

Slijedi da nužno mora vrijediti $a + b = 2n$. Jednadžbu (1) tada možemo zapisati kao

$$k \cdot (2^{n+1} - 1) = 2^n + 2^b - 1.$$

Kako je $2^n + 2^b - 1 \geqslant 2^{n+1} - 1$, slijedi $b \geqslant n$. Promatranjem jednadžbe modulo 2^n dobivamo da je $k \equiv 1 \pmod{2^n}$. Ako je $k > 1$, onda je $k \geqslant 2^n + 1$. Međutim, tada je

$$k \cdot (2^{n+1} - 1) \geqslant (2^n + 1) \cdot (2^{n+1} - 1) = 2^{2n+1} + 2^n - 1,$$

pa je $b \geqslant 2n + 1$. To je u kontradikciji s $a + b = 2n$. Zaključujemo da je $k = 1$ i

$$2^{n+1} - 1 = 2^n + 2^b - 1,$$

iz čega slijedi $b = n$. Kako je $a + b = 2n$, vrijedi i $a = n$.

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu utvrđujemo da je $(n, n, 1, n)$ zaista rješenje za svaki prirodni broj n. Dakle, rješenja su sve četvorke $(n, n, 1, n)$ za prirodan broj n.

Zadatak A-1.4.

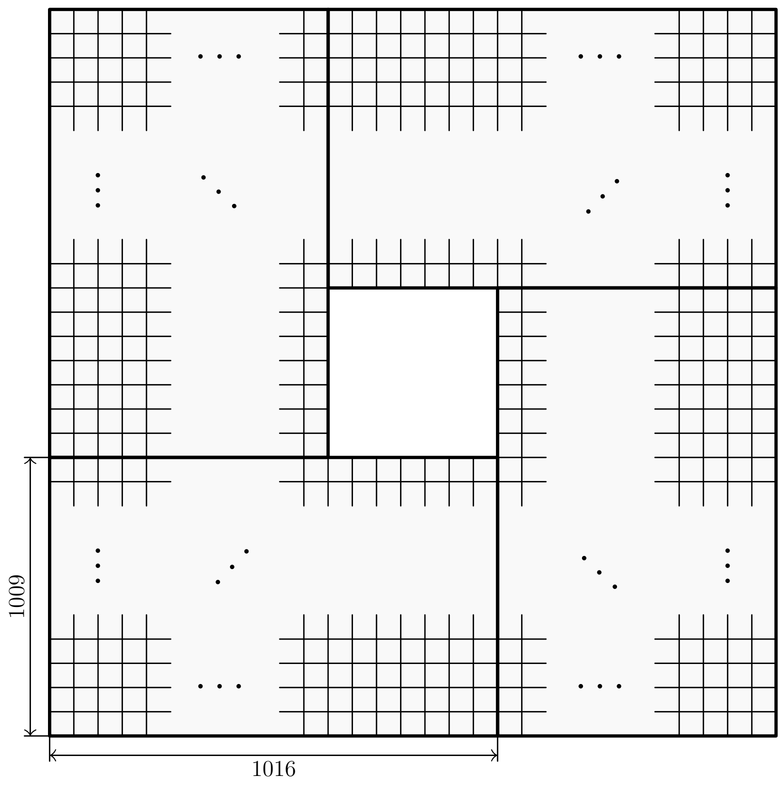
Iz ploče dimenzija 2025×2025 uklonjen je kvadrat dimenzija 7×7, a preostali dio ploče prekriva se pločicama dimenzija 1×4 (tako da svaka pločica prekriva točno četiri polja).

(a) Ako uklonimo središnji 7×7 kvadrat, dokaži da je preostali dio ploče moguće pokriti pločicama dimenzija 1×4.

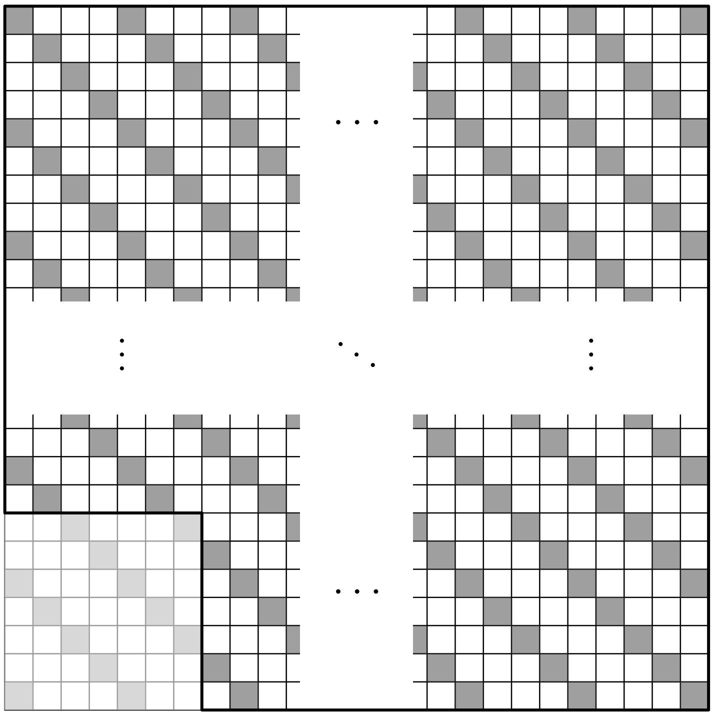
(b) Ako uklonimo 7×7 kvadrat koji sadrži jedan ugao ploče, dokaži da preostali dio ploče nije moguće pokriti pločicama dimenzija 1×4.

Rješenje.

(a) Primijetimo da pločicama dimenzija 1×4 možemo pokriti ploču dimenzija $4k \times n$, za bilo koje prirodne brojeve k i n. Ako je uklonjen središnji 7×7 kvadrat, ostatak ploče možemo podijeliti na četiri dijela dimenzija 1009×1016 kao na slici. Svaki od tih dijelova možemo pokriti, pa možemo pokriti cijelu ploču.



(b) Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je uklonjen donji lijevi 7×7 kvadrat. Indeksiramo stupce ploče slijeva nadesno brojevima od 1 do 2025, a retke odozgo prema dolje brojevima od 1 do 2025. Bojamo u crno ona polja ploče čija je razlika indeksa djeljiva s 4.



Uključujući 7×7 kvadrat, crnih polja je ukupno $\dfrac{2025^2 + 3}{4}$.

Od toga u uklonjenom kvadratu je 12 crnih polja.

U cijeloj ploči ostaje $\dfrac{2025^2 - 49}{4} + 1$ crnih polja.

Svaka 1×4 pločica koju postavimo na ovako obojanu ploču će prekriti točno jedno crno polje, stoga ne može postojati pokrivanje cijele ploče sa $\frac{2025^2-49}{4}$ pločica.

Zadatak A-1.5.

Neka su K i L redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$. Za točku T unutar paralelograma vrijedi $|KT| = |AK|$ i $|LT| = |CL|$. Neka je M polovište dužine $\overline{BT}$. Dokaži da je $\sphericalangle MAT = \sphericalangle TCM$.

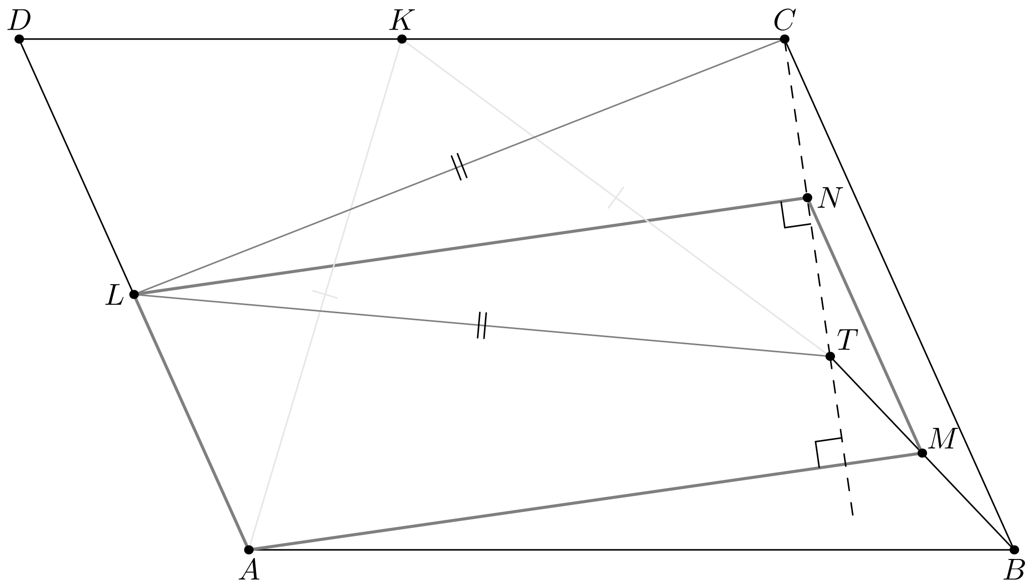
Rješenje.

Neka je N polovište dužine $\overline{CT}$. Tada je $\overline{MN}$ srednjica trokuta TBC, pa vrijedi da su pravci MN i BC paralelni te $|MN| = \dfrac{|BC|}{2}$.

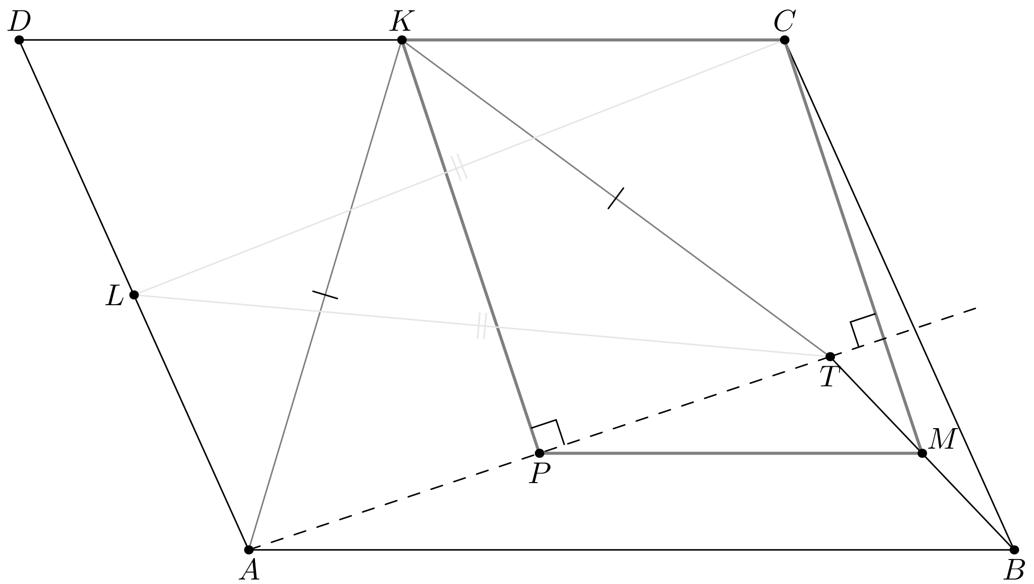
Također je $|LA| = \dfrac{|AD|}{2} = \dfrac{|BC|}{2}$ te su pravci LA i BC paralelni, pa slijedi da je četverokut $LAMN$ paralelogram. Posebno, pravci LN i AM su paralelni.

Budući da je N polovište osnovice $\overline{CT}$ jednakokračnog trokuta CLT dužina $\overline{LN}$ visina je tog trokuta, odnosno pravci LN i CT su okomiti.

Budući da su pravci LN i AM paralelni slijedi da su pravci AM i CT okomiti.



Potpuno analogno zaključujemo da je pravac AT okomit na pravac CM.



Iz dokazanog zaključujemo da je točka M ortocentar trokuta CAT, iz čega slijedi da je $\sphericalangle MAT = \sphericalangle TCM$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve uređene trojke realnih brojeva (x, y, z) koje su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} xy + 1 &= 2z \\ yz + 1 &= 2x \\ zx + 1 &= 2y. \end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Oduzmimo prve dvije jednadžbe. Slijedi $xy - yz = 2z - 2x$ odnosno $y(x - z) = -2(x - z)$, pa imamo dva slučaja.

1) $y = -2$. Tada iz druge jednadžbe slijedi $2x+2z = 1$ odnosno $x+z = \frac{1}{2}$, a iz treće jednadžbe slijedi $xz = -5$. Drugim riječima, x i z su rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - \frac{1}{2}t - 5$. Rješenja te jednadžbe su $\frac{5}{2}$ i -2, pa dobivamo rješenja $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -2, -2\right)$ i $(x, y, z) = \left(-2, -2, \frac{5}{2}\right)$.
2) $x = z$. Tada iz prve jednadžbe imamo $xy + 1 = 2x$, a iz treće jednadžbe $x^2 + 1 = 2y$. Oduzimanjem tih dviju jednadžbi dobivamo $x(y - x) = -2(y - x)$, pa ponovno imamo dva slučaja:
   a) $x = -2$. Tada lako dobivamo $y = \frac{5}{2}$ iz prve jednadžbe i dobivamo rješenje $(x, y, z) = \left(-2, \frac{5}{2}, -2\right)$.
   b) $y = x$. Tada su sva tri broja jednaka i svaka jednadžba glasi $x^2+1 = 2x$ iz čega slijedi $x = 1$, pa dobivamo rješenje $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, oduzmimo bilo koji par zadanih jednadžbi. Slijedi da za svaki od brojeva x, y, z vrijedi da je ili on jednak -2, ili su preostala dva broja jednaka.

Ako niti jedan od brojeva nije jednak -2, onda su svi jednaki i dobivamo jednadžbu $x^2+1 = 2x$, iz koje slijedi $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Ako je neki od njih jednak -2, recimo y, promotrimo x i z. Ako je $x \neq -2$, onda je $y = z = -2$ zbog prethodne primjedbe. Zaključujemo da su dva od tri broja jednaka -2. Recimo da su to x i y. Tada iz prve jednadžbe dobivamo da je $z = \frac{5}{2}$.

Dakle, ako su sva tri broja jednaka, dobivamo $(1, 1, 1)$ kao rješenje. Ako nisu, tada su dva od tri broja jednaka -2, a posljednji je jednak $\frac{5}{2}$, te u ovom slučaju dobivamo tri rješenja

$$\left(-2, -2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}, -2\right), \left(\frac{5}{2}, -2, -2\right).$$

Zadatak A-2.2.

U stožac osnovke polumjera 1 i visine duljine $2\sqrt{2}$ upisan je kvadar takav da jedna strana kvadra pripada osnovki stošca, a vrhovi suprotne strane pripadaju plaštu stošca.

Ako je strana kvadra koja pripada osnovki stošca kvadrat, koliko je najveće oplošje koje takav kvadar može imati?

Rješenje.

Označimo s V vrh stošca i sa S središte osnovke stošca. Neka su T' i S' redom vrh i središte baze kvadra nasuprot baze koja se nalazi na osnovki, te neka je T sjecište izvodnice stošca kroz V i T' i osnovke stošca.

Neka je h visina upisanog kvadra.

Tada je $|VS'| = |VS| - |S'S| = 2\sqrt{2} - h$.

Iz sličnosti trokuta $VT'S'$ i VTS slijedi da je

$$|T'S'| = \frac{|VS'|}{|VS|} \cdot |TS| = \frac{4 - h\sqrt{2}}{4}.$$

Budući da je $\overline{T'S'}$ pola dijagonale kvadrata slijedi da je duljina baze kvadra jednaka

$$|T'S'| \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2} - h}{2}.$$

Oplošje upisanog kvadra je

$$4h \cdot \frac{2\sqrt{2} - h}{2} + 2\left(\frac{2\sqrt{2} - h}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}h^2 + 2h\sqrt{2} + 4.$$

Funkcija $f(h) = -\frac{3}{2}h^2 + 2h\sqrt{2} + 4$ je kvadratna funkcija s negativnim vodećim koeficijentom pa poprima maksimum u x-koordinati tjemena svog grafa, tj. za $h = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Dakle, za visinu $h = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ upisani kvadar će imati najveće moguće oplošje, koje iznosi

$$4h \cdot \frac{2\sqrt{2} - h}{2} + 2\left(\frac{2\sqrt{2} - h}{2}\right)^2 = \frac{16}{3}.$$

Zadatak A-2.3.

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (k, n) takve da vrijedi

$$7 \cdot n^n - n^3 = (n + 8)^k.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da n dijeli lijevu stranu jednadžbe, pa slijedi da n dijeli $(n+8)^k$. Kako je $n+8 \equiv 8 \pmod{n}$, onda n dijeli i 8^k. Dakle, n je potencija broja 2. Neka je $n = 2^m$ za neki nenegativan cijeli broj m. Jednadžbu možemo zapisati kao

$$7 \cdot 2^{m \cdot 2^m} - 2^{3m} = (2^m + 8)^k.$$

Ako je $m = 0$, dobivamo jednadžbu $6 = 9^k$, što nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Ako je $m = 1$, dobivamo jednadžbu $20 = 10^k$, što nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Ako je $m = 2$, dobivamo jednadžbu $7 \cdot 2^8 - 2^6 = 12^k$, što je zadovoljeno za $k = 3$. Dobivamo rješenje $(k, n) = (3, 4)$.

Ako je $m = 3$, dobivamo jednadžbu $7 \cdot 8^8 - 8^3 = 16^k$. Lijeva strana je djeljiva s 2^9 i nije djeljiva s 2^{10}. Desna strana je djeljiva s 2^{4k} i nije djeljiva s 2^{4k+1}, pa je $4k = 9$, što je nemoguće. Dakle, ni ta jednadžba nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Ako je $m > 3$, onda je $m \cdot 2^m > 3m$ i jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$2^{3m} \cdot (7 \cdot 2^{m \cdot (2^m - 3)} - 1) = 2^{3k} \cdot (2^{m-3} + 1)^k.$$

Lijeva strana jednakosti je djeljiva s 2^{3m} i nije djeljiva s 2^{3m+1}. Desna strana jednakosti je djeljiva s 2^{3k} i nije djeljiva s 2^{3k+1}. Zaključujemo da je $k = m$ i dobivamo jednadžbu

$$7 \cdot 2^{m \cdot (2^m - 3)} - 1 = (2^{m-3} + 1)^m.$$

Lijeva strana jednakosti daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 jer je $7 \cdot 2^{m \cdot (2^m - 3)}$ djeljivo s 4. Za $m > 4$ desna strana daje ostatak $1^m = 1$ pri dijeljenju s 4, a za $m = 4$ je desna strana jednaka 3^4, što također daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Zaključujemo da za $m > 3$ nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje je $(k, n) = (3, 4)$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dobijemo da vrijedi $n = 2^m$, $m = k$, $m \geqslant 4$ i jednadžbu

$$7 \cdot 2^{m \cdot 2^m} - 2^{3m} = (2^m + 8)^m.$$

Kako je $m \geqslant 4$, zaključujemo da je $2^{m \cdot 2^m} \geqslant 2^{16m} > 2^{3m}$ pa je

$$7 \cdot 2^{m \cdot 2^m} - 2^{2m} > 6 \cdot 2^{m \cdot 2^m} > 2^{m \cdot 2^m}.$$

Također vrijedi

$$(2^m + 8)^m < (2^{m+1})^m = 2^{m(m+1)}.$$

Iz toga slijedi da mora vrijediti $m \cdot 2^m < m(m+1)$, tj. $2^m < m+1$. Međutim, za svaki prirodan broj m vrijedi $2^m \geqslant m + 1$, što se može dokazati matematičkom indukcijom.

Dakle, jedino rješenje jednadžbe je $(k, n) = (3, 4)$.

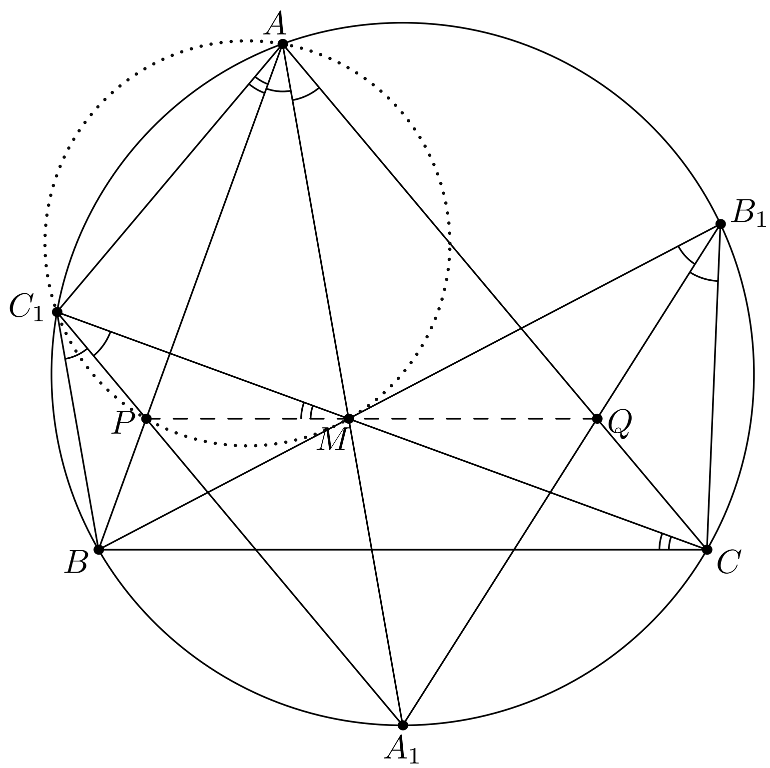
Zadatak A-2.4.

Neka je M točka unutar trokuta ABC na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Pravci AM, BM i CM ponovo sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC redom u točkama A_1, B_1 i C_1. Neka je P sjecište dužina $\overline{A_1C_1}$ i $\overline{AB}$ te Q sjecište dužina $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{AC}$.

Dokaži da su pravci PQ i BC paralelni.

Rješenje.

Jer je AA_1 simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, točka A_1 je polovište luka BC kružnice opisane trokutu ABC. Zbog toga, pravci C_1A_1 i B_1A_1 su simetrale kuteva CC_1B i CB_1B. S obzirom da je riječ o kutevima nad lukom BC, kutevi $\sphericalangle CC_1B$, $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CB_1B$ su jednaki.



Posebno, vrijedi

$$\sphericalangle A_1C_1M = \frac{\sphericalangle CC_1B}{2} = \frac{\sphericalangle CAB}{2} = \sphericalangle BAA_1$$

zbog čega je četverokut AC_1PM tetivan. Iz te tetivnosti slijedi da je

$$\sphericalangle C_1MP = \sphericalangle C_1AP,$$

a iz tetivnosti četverokuta $CABA_1$ slijedi

$$\sphericalangle C_1AB = \sphericalangle C_1CB.$$

Dobili smo

$$\sphericalangle C_1MP = \sphericalangle C_1CB$$

odakle slijedi da su PM i BC paralelni.

Na potpuno analogan način se dokazuje da su QM i BC paralelni.

Naposljetku, zaključujemo da su točke P, M i Q kolinearne te da su pravci PQ i BC paralelni.

Zadatak A-2.5.

U svako polje pravokutne ploče s 3 stupca i 14 redaka upisan je simbol X ili O. Za ploču kažemo da je *balansirana* ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- svaki 3×3 kvadrat sadržava najviše 5 simbola X i najviše 5 simbola O
- u svakom 3×3 kvadrati nijedna dijagonala ni redak ni stupac ne sadržavaju tri ista simbola.

Za balansiranu ploču P, *centar* od P je ploča s 3 stupca i 12 redaka dobivena uklanjanjem prvoga i posljednjega retka iz P.

Među svim balansiranim pločama koliko postoji različitih centara?

Rješenje.

Za redak na ploči kažemo da je tipa A ako je simbol u lijevom polju retka jednak simbolu u desnom polju. Retci tipa A koji se mogu pojaviti na balansiranoj ploči su

$$XOX,\ OXO.$$

Za redak kažemo da je tipa B ako su simboli u lijevom i desnom polju retka međusobno različiti. Retci tipa B koji se mogu pojaviti na balansiranoj ploči su

$$XOO,\ XXO,\ OOX,\ OXX.$$

Tvrdimo da se u centru balansirane ploče ne mogu istovremeno pojavljivati retci tipa A i retci tipa B. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje dva uzastopna retka od kojih je jedan tipa A i drugi tipa B, te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da dio centra ploče izgleda ovako (upitnici označavaju nepoznate simbole):

$$\begin{array}{ccc} X & ?_1 & O \\ X & ?_2 & X \\ ?_3 & ?_4 & ?_5 \end{array}$$

Tada su $?_2$ i $?_3$ jednaki O, jer bi inače ploča sadržavala tri pojave simbola X u retku ili stupcu.

Međutim, tada se na dijagonali nalaze tri uzastopna simbola O, što je kontradikcija. Dakle, svaka balansirana ploča u centru sadrži samo retke tipa A ili samo retke tipa B.

Prebrojimo koliko različitih centara mogu imati ploče kojima su svi retci u centru tipa A. Primijetimo da je nemoguće da ploča sadrži retke XOX, OXO, XOX zaredom, jer bi dijagonala sadržavala tri uzastopna simbola X. Također, ploča ne smije sadržavati tri uzastopna ista retka. To znači da je centar ploče jedinstveno određen sa prva dva retka u centru:

- Ako su prva dva retka različita, npr. XOX i OXO, onda je treći redak jednak OXO, četvrti i peti redak su XOX, šesti i sedmi su OXO, itd. Ukupno dobivamo dva moguća centra ploče u ovom slučaju. Dva retka ploče koji nisu u centru možemo uvijek izabrati tako da ploča ostane balansirana, tako što izaberemo prikladne retke tipa A.
- Ako su prva dva retka ista, recimo XOX i XOX, onda su treći i četvrti redak jednaki OXO, peti i šesti su XOX, ... Ukupno dobivamo dva moguća centra ploče u ovom slučaju. Primijetimo da dva retka ploče koji nisu u centru možemo uvijek izabrati tako da ploča ostane balansirana, tako što izaberemo prikladne retke tipa A.

Dakle, ako su retci u centru svi tipa A, dobivamo 4 različita centra ploče.

Pretpostavimo da su sada svi retci u centru ploče tipa B. Tvrdimo da u lijevom i desnom stupcu centralnog dijela ploče ne postoje dva uzastopna jednaka simbola. Pretpostavimo da postoje. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da jedan dio ploče izgleda ovako:

$$\begin{matrix} ?_1 & ?_2 & ?_3 \\ X & ?_4 & O \\ X & ?_5 & O \end{matrix}$$

Tada je $?_1 = O$ i $?_3 = X$, jer bi inače prvi ili zadnji stupac sadržavao tri uzastopna simbola. Primijetimo da je $?_4$ nemoguće odrediti tako da ploča ne sadrži tri uzastopna jednaka simbola na dijagonali, pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, simboli u lijevom i desnom stupcu u centru ploče su alternirajući. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je prvi simbol u centralnom dijelu lijevog stupca jednak X, kasnije ćemo pomnožiti odgovor dobiven u ovom slučaju s 2.

Tada centar ploče izgleda ovako:

$$\begin{matrix} X & ? & O \\ O & ? & X \\ X & ? & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X & ? & O \\ O & ? & X \end{matrix}$$

Sada vidimo da kako god umjesto simbola ? u centralni stupac upišemo simbole X i O na način da ne upišemo tri uzastopna simbola, dobivamo centar balansirane ploče, jer na dijagonali i u retcima ne mogu biti tri uzastopna simbola. Dva retka koji nisu dio centra možemo popuniti na način da u njih upišemo $O * X$, gdje je $*$ simbol različit od onog koji upišemo u gornji odnosno donji redak centra ploče, te će uz taj odabir ploča biti balansirana.

Dakle, preostaje odrediti na koliko načina je moguće upisati simbole X i O u 12 polja tako da u nikoja tri uzastopna polja nije upisan isti simbol.

Na 2 načina možemo upisati jedan simbol (X, O), te na 4 načina možemo upisati dva simbola (XX, XO, OX, OO). Neka je f_n broj načina na koje možemo upisati n simbola. Tada je

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Naime, ako su posljednja dva simbola od njih n jednaki, onda prvih $n-2$ simbola možemo izabrati na f_{n-2} načina, a posljednja dva su jedinstveno određeni. Ako su posljednja dva simbola od njih n različiti, onda prvih $n-1$ simbola možemo izabrati na f_{n-1} načina, a posljednji je jedinstveno određen.

Preostaje izračunati f_{12}. Imamo $f_1 = 2$, $f_2 = 4$, $f_3 = 6$, $f_4 = 10$, $f_5 = 16$, $f_6 = 26$, $f_7 = 42$, $f_8 = 68$, $f_9 = 110$, $f_{10} = 178$, $f_{11} = 288$, $f_{12} = 466$.

Dakle, ukupno ima $2f_{12} + 4 = 936$ različitih centara balansiranih ploča.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove pozitivnih realnih brojeva (x, y) koji su rješenja sustava jednadžba

$$x^{x+y} = y^{180}$$
$$y^{x+y} = x^{45}.$$

Rješenje.

Iz prve jednadžbe slijedi $x = y^{\frac{180}{x+y}}$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$y^{x+y} = y^{\frac{180\cdot 45}{x+y}}. \tag{2}$$

Ako je $y = 1$, onda iz druge jednadžbe slijedi $x = 1$ i dobivamo par $(1, 1)$ kao rješenje.

Ako je $y \neq 1$, primjenom logaritma s bazom y na obje strane jednakosti (2) slijedi

$$x + y = \frac{180 \cdot 45}{x + y},$$

pa je $(x + y)^2 = 90^2$ odnosno $x + y = 90$.

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi $x^{90} = y^{180}$ odnosno $x = y^2$, pa je $y^2 + y = 90$. Jedino pozitivno rješenje te kvadratne jednadžbe je $y = 9$, pa je $x = 81$ i dobivamo par $(81, 9)$ kao rješenje.

Dakle, rješenja su $(x, y) = (1, 1)$ i $(x, y) = (81, 9)$.

Zadatak A-3.2.

Neka je n prirodni broj. Svakom je vrhu kvadrata pridružen cijeli broj. Broj pridružen vrhu može se zamijeniti zbrojem brojeva pridruženih dvama od ostalih vrhova.

Dokaži da je uvijek (neovisno o odabiru početnih brojeva pridruženih vrhovima) nizom opisanih zamjena moguće postići da brojevi pridruženi svim četirima vrhovima budu djeljivi s n.

Rješenje.

Prvo zamijenimo brojeve u gornja dva vrha sa zbrojem brojeva u dva donja vrha. Time smo postigli da se u dva gornja vrha nalazi isti broj x.

Nakon toga u donji lijevi vrh napišemo broj $2x$. Sada ponavljamo dva poteza u kojima prvo u donji desni vrh napišemo zbroj brojeva u donjem lijevom i gornjem lijevom vrhu, a nakon toga u donji lijevi vrh napišemo zbroj brojeva u donjem desnom i gornjem lijevom vrhu.

Tada će u donjim vrhovima nakon k takvih ponovljenih poteza u donjem lijevom vrhu pisati broj $(2k+2)x$, a u donjem desnom vrhu broj $(2k+1)x$. Za $k = n-1$, dobivamo da je u donjem lijevom vrhu broj djeljiv s n, a u donjem desnom vrhu broj $(2n-1)x$. Sada broj u gornjem lijevom vrhu zamijenimo zbrojem brojeva u gornjem desnom i donjem desnom vrhu, koji su redom jednaki x i $(2n-1)x$. Dobivamo da je i broj u gornjem lijevom vrhu djeljiv s n.

Sad kad u dva vrha imamo brojeve djeljive s n, brojeve u preostalim vrhovima zamijenimo njihovim zbrojem, pa u njima također pišu brojevi djeljivi s n.

Zadatak A-3.3.

Tablica dimenzija 2025×2025 popunjena je tako da se u polju u i-tome retku i j-tome stupcu nalazi broj $i+j-1$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2025\}$. Odabrano je 2025 polja koja se nalaze u različitim retcima i različitim stupcima.

Koja je najmanja moguća vrijednost umnoška brojeva na odabranim poljima?

Rješenje.

Tvrdimo da je $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 4049$ najmanja moguća vrijednost. Ta se vrijednost postiže ako iz i-tog retka na ploči izaberemo i-ti element, koji iznosi $2i-1$.

Pretpostavimo da smo izabrali brojeve na način da smo minimizirali umnožak, te da nismo izabrali već spomenute brojeve. Tada postoji indeks i takav da smo u i-tom retku izabrali veći broj nego u $(i+1)$-vom retku. Pretpostavimo da smo u i-tom retku izabrali j-ti broj po redu, koji iznosi $i+j-1$, a u $(i+1)$-vom retku izabrali k-ti broj po redu, koji iznosi $i+k$. Tada je $i+j-1 \geqslant i+k$ odnosno $j > k$, i umnožak dva izabrana broja u tim retcima je $(i+j-1)\cdot(i+k)$.

Međutim, ako bismo u i-tom retku izabrali k-ti broj po redu, a u $(i+1)$-vom retku j-ti broj po redu, dobili bismo umnožak $(i+k-1)\cdot(i+j)$. Tvrdimo da je

$$(i+k-1)\cdot(i+j) < (i+j-1)\cdot(i+k).$$

Zaista, to je ekvivalentno s $j > k$, za što smo ranije utvrdili da vrijedi. Dakle, zamjenom odabira brojeva u i-tom i $(i+1)$-vom retku dobivamo manji umnožak, što je kontradikcija s minimalnošću umnoška.

Zaključujemo da se minimum postiže upravo kad u i-tom retku ploče odaberemo i-ti element po redu.

Zadatak A-3.4.

Neka je D točka unutar trokuta ABC i neka je E točka na dužini $\overline{AD}$ različita od A i D. Opisane kružnice trokuta BDE i CDE sijeku stranicu $\overline{BC}$ redom u točkama F i G. Neka je X sjecište pravaca DG i AB, a Y sjecište pravaca DF i AC.

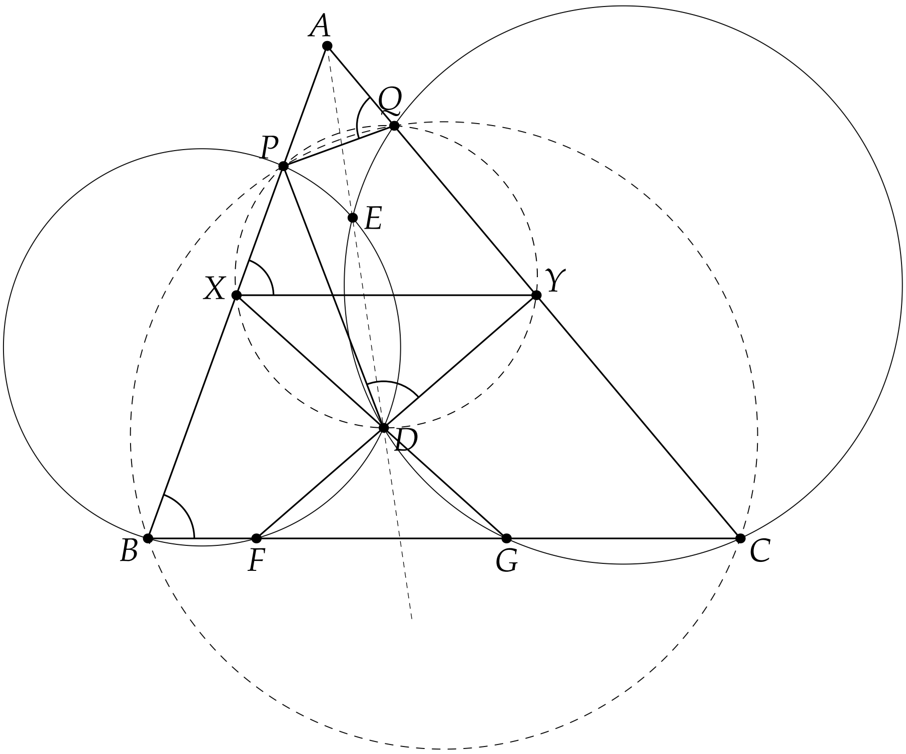
Dokaži da su pravci XY i BC paralelni.

Rješenje.

Neka je P drugo sjecište kružnice (BDE) sa $\overline{AB}$ i Q drugo sjecište kružnice (CDE) sa $\overline{AC}$. DE je radikalna os kružnica (BDE) i (CDE), a A leži na njoj pa imamo

$$|AP| \cdot |AB| = |AD| \cdot |AE| = |AQ| \cdot |AC|.$$

Koristeći obrat teorema o potenciji točke, slijedi da je četverokut $BCQP$ tetivan.



Budući da je $BFDP$ tetivni četverokut:

$$\sphericalangle PBF = 180^\circ - \sphericalangle FDP = \sphericalangle PDY.$$

Dakle, $\sphericalangle PDY = \sphericalangle PBF = \sphericalangle PQA = 180^\circ - \sphericalangle PQY$ pa je $PQYD$ također tetivni četverokut. Analogno se pokaže i da je $PQXD$ tetivni četverokut pa slijedi

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle PDY = \sphericalangle ABC,$$

iz čega slijedi da su XY i BC paralelni.

Zadatak A-3.5.

Za različite prirodne brojeve m i n kažemo da su *prijatelji* ako postoje prirodni brojevi a i b koji nisu djeljivi sa 101 takvi da je

$$\frac{(m!)^n}{(n!)^m} = \frac{a}{b}.$$

Postoji li prosti broj koji ima točno 12 prijatelja?

Prvo rješenje.

Neka je $p = 101$. Označimo s $\nu_p(k)$ najveći nenegativan cijeli broj t takav da p^t dijeli k. Tada vrijedi

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$$

gdje je s najveći cijeli broj takav da je $p^s \leqslant n$, jer za svaki $j = 1, 2, \ldots, s$ postoji točno $\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ brojeva manjih ili jednakih n koji su djeljivi s p^j.

Uvjet da su brojevi m i n prijatelji je ekvivalentan s

$$m \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right) = n \cdot \left(\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right).$$

Primijetimo da vrijedi

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \ldots + \frac{n}{p^s} = \frac{n}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^{s+1}}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{n}{p-1} < n.$$

Neka je sada n prost broj s točno 12 prijatelja. Ako je $n < 101$, onda je svaki broj $m < 101$ prijatelj od n, kontradikcija. Ako je $n \geqslant 101$ i m njegov prijatelj, onda slijedi da n dijeli m, jer dijeli $m \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right)$, a drugi faktor je manji od n. Dakle, $m = kn$ za neki prirodan broj k, te vrijedi

$$k \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \right) = \left\lfloor \frac{kn}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

Kako je $\lfloor a + b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$ za sve pozitivne realne brojeve a i b uz jednakost ako i samo ako je , slijedi da za sve j treba vrijediti $k \lfloor n/p^j \rfloor = \lfloor kn/p^j \rfloor$. Ta jednakost pak vrijedi ako i samo ako n pri dijeljenju s p^j daje ostatak manji od $\frac{p^j}{k}$.

Slijedi da, ako su n i $(k+1) \cdot n$ prijatelji, onda su i n i kn prijatelji, odnosno skup prijatelja od n sastoji se od prvih nekoliko višekratnika od n.

Dakle, prost broj n ima 12 prijatelja ako i samo ako mu je $13n$ prijatelj i $14n$ nije prijatelj.

Broj $13n$ mu je prijatelj ako i samo ako je ostatak koji n daje pri dijeljenju s p^j manji od $\frac{p^j}{13}$ za svaki j, a broj 14 mu nije prijatelj ako i samo ako postoji j takav da je ostatak koji n daje pri dijeljenju s p^j veći ili jednak $\frac{p^j}{14}$.

Zapišimo $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_t p^t$ za $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Tada je ostatak pri dijeljenju n sa p^j jednak $a_0 + a_1 + \ldots + a_{j-1} p^{j-1}$. Ako je $a_{j-1} \geqslant 8$ za neki j, onda je taj ostatak veći ili jednak $8 \cdot p^{j-1} > \frac{p^j}{13}$, jer je $8 \cdot 13 = 104 > 101 = p$. Dakle, $a_0, a_1, \ldots$ su svi manji od 8. Međutim, onda je

$$a_0 + a_1 p + \ldots + a_{j-1} p^{j-1} \leqslant 7 \cdot \frac{p^j - 1}{p - 1} < \frac{p^j}{14},$$

jer je $7 \cdot 14 = 98 < 100 < \frac{(p-1) \cdot p^j}{p^j - 1}$. Dakle, svaki prost broj s barem 12 prijatelja nužno ima i 13 prijatelja.

Primjer prostog broja s točno 13 prijatelja je $7 \cdot 101 + 2 = 709$.

Drugo rješenje.

Neka je $p = 101$ kao u prvom rješenju. Prema Legendreovoj formuli za $\nu_p(n!)$, slijedi

$$\nu_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1},$$

gdje je $s_p(n)$ zbroj znamenaka broja n zapisanog u bazi p. Tada su m i n prijatelji ako i samo ako je

$$n \cdot (m - s_p(m)) = m \cdot (n - s_p(n)),$$

ili ekvivalentno

$$n \cdot s_p(m) = m \cdot s_p(n).$$

Ako je $n < 101$ prost, onda je $n = s_p(n)$ i svaki $m < 101$ mu je prijatelj. Ako je $n \geqslant 101$ prost, onda je $n > s_p(n)$, pa n dijeli sve svoje prijatelje. Tada je $m = kn$ prijatelj od n ako i samo ako vrijedi

$$k \cdot s_p(n) = s_p(kn).$$

Općenito, vrijedi $s_p(a + b) \leqslant s_p(a) + s_p(b)$ uz jednakost ako i samo ako u zbrajanju a i b u bazi p ne dolazi do "jedan dalje", odnosno ako su znamenke uz istu potenciju p u zbroju manje od p. Dakle, $s_p(kn) = k \cdot s_p(n)$ ako i samo ako je svaka znamenka od n u bazi p manja od $\frac{p}{k}$. Dakle, da bi prost broj n bio prijatelj s točno 12 brojeva, to moraju biti $2n, 3n, 4n, \ldots, 13n$ i svaka znamenka od n u bazi 101 je manja od $\frac{101}{13} < 8$. Međutim, tada je svaka znamenka manja i od $\frac{101}{14} < 8$, pa je i $14n$ prijatelj od n, kontradikcija.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 29. travnja 2025.

Zadatak A-4.1.

Dokaži da je broj

$$102^{102} - 100^{100}$$

djeljiv sa 101^2.

Rješenje.

Prema binomnom poučku,

$$102^{102} = (101+1)^{102} = 1^{102} + \binom{102}{1} \cdot 1^{101} \cdot 101 + 101^2 \cdot k$$

za neki cijeli broj k. Slično,

$$100^{100} = (101-1)^{100} = (-1)^{100} + \binom{100}{1} \cdot (-1)^{99} \cdot 101 + 101^2 \cdot \ell$$

za neki cijeli broj ℓ.

To znači da razlika ta dva broja daje isti ostatak pri dijeljenju sa 101^2 kao i

$$1^{102} - (-1)^{100} + \binom{102}{1} \cdot 101 - \binom{100}{1} \cdot (-1)^{99} \cdot 101.$$

Taj izraz je jednak $101 \cdot 202$, što je djeljivo sa 101^2.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x)) + f(y) = 2y + f(x-y).$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x)) = f(x) - f(0).$$

Stoga jednadžba postaje

$$f(x) + f(y) - f(0) = 2y + f(x-y).$$

Ako sada uvrstimo $x = y$, dobivamo $f(x) = x + f(0)$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo da mora biti $f(0) = 0$ pa je funkcija za koju vrijedi $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$ jedino moguće rješenje. Provjerom utvrđujemo da ta funkcija stvarno jest rješenje:

$$x + y = 2y + (x - y).$$

Zadatak A-4.3.

Neka je n prirodan broj. Za prirodni broj m, neka $f_m(n)$ označava broj djelitelja broja n^{m+1} koji su veći od n^m. Dokaži da postoji prirodni broj K takav da za svaki $m \geqslant K$ vrijedi $f_m(n) = f_{m+1}(n)$.

Prvo rješenje.

Vrijedi da je prirodan broj d djelitelj od n^{m+1} koji je veći od n^m ako i samo ako je $\frac{n^{m+1}}{d}$ djelitelj od n^{m+1} koji je manji od n. Dakle, imamo bijekciju između skupa djelitelja od n^{m+1} većih od n^m i skupa djelitelja od n^{m+1} manjih od n, pa je $f_m(n)$ broj djelitelja od n^{m+1} manjih od n.

Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ svi prosti faktori od n. Tvrdimo da je $f_m(n)$ za svaki $m \geqslant n$ jednak broju svih brojeva manjih od n koji nemaju prostih faktora izvan skupa $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

Naime, svaki djelitelj od n^{m+1} mora imati samo te proste faktore. S druge strane, svaki broj dobiven umnošcima od $p_1, p_2, \ldots, p_k$ koji je manji od n je manje od n puta djeljiv svakim od $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jer je $p_i^n \geqslant 2^n > n$. Zaključujemo da svaki takav broj dijeli n^{m+1} za $m \geqslant n$.

Posebno, za svaki $m \geqslant n$, $f_m(n)$ je broj elemenata istog skupa, pa je $f_m(n) = f_{m+1}(n)$.

Drugo rješenje.

Neka je d djelitelj od n^{m+1} veći od n^m. Tada je nd djelitelj od n^{m+2} veći od n^{m+1}. Time smo svakom djelitelju od n^{m+1} većem od n^m injektivno pridružili djelitelj od n^{m+2} veći od n^{m+1}, pa je $f_m(n) \leqslant f_{m+1}(n)$ za svaki $m \geqslant 1$. Jednakost se postiže ako i samo ako je svaki djelitelj od n^{m+2} koji je veći od n^{m+1} ujedno djeljiv s n.

Dakle, treba dokazati da za svaki prirodan broj m osim konačno mnogo njih vrijedi da je svaki djelitelj od n^{m+1} koji je veći od n^m djeljiv s n. Dokazat ćemo da to vrijedi za svaki $m \geqslant n$.

Pretpostavimo suprotno. Onda postoji djelitelj d od n^{m+1} veći od n^m i prost broj p koji dijeli n takav da p^k dijeli n i p^k ne dijeli d. Međutim, onda je n^{m+1} djeljiv s $p^{(m+1)k}$ a d nije djeljiv s p^k, pa je njihov omjer djeljiv s p^{mk+1}, pa je

$$n^{m+1} \geqslant d \cdot p^{mk+1} > d \cdot (mk+1) > dn > n^{m+1},$$

kontradikcija.

Zadatak A-4.4.

Dan je jednakokračni trokut ABC sa stranicama duljina $|AB| = |AC| = 5$ te $|BC| = 6$. Točka D odabrana je na stranici $\overline{AC}$, a točka P na dužini $\overline{BD}$ tako da je $\sphericalangle CPA = 90°$. Ako je $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCB$, odredi omjer

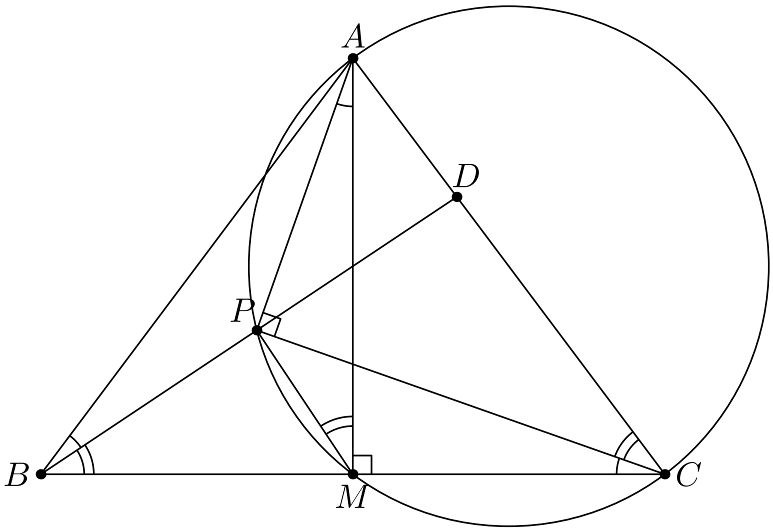
$$\frac{|AD|}{|DC|}.$$

Prvo rješenje.

Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. Zbog jednakokračnosti, $\sphericalangle AMC$ je pravi pa je po Talesovom teoremu četverokut $APMC$ tetivan. Posebno, to znači

$$\sphericalangle PAM = \sphericalangle PCM = \sphericalangle ABP, \quad \sphericalangle AMP = \sphericalangle ACP = \sphericalangle BPC.$$

Označimo $\sphericalangle PAM = \alpha, \sphericalangle AMP = \beta$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut AMC, dobivamo $|AM| = 4$.



Trokuti APM i BPC su slični pa vrijedi

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|MA|}{|BC|} = \frac{2}{3}.$$

Primjena sinusovog poučka na trokut BDC daje

$$\frac{|CD|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\sphericalangle BDC}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
|CD| &= \frac{6\sin\beta}{\sin(180^\circ - \alpha - 2\beta)} = \frac{6\sin\beta}{\sin(\beta + (\alpha+\beta))} \\
&= \frac{6\sin\beta}{\sin\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos\beta\sin(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{6}{\cos(\alpha+\beta) + \operatorname{ctg}\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{6}{\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Sada

$$|AD| = |AC| - |CD| = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3},$$

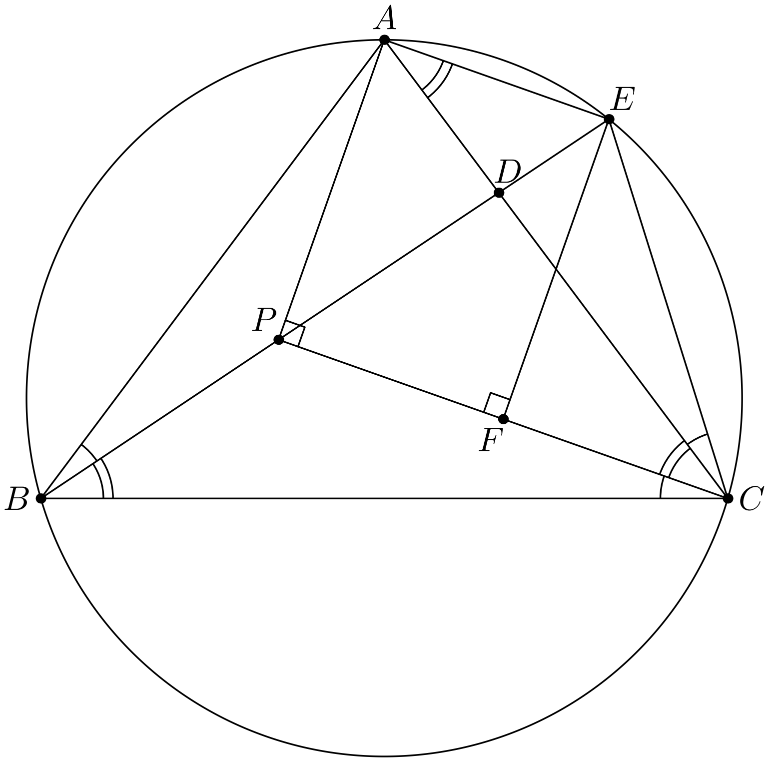
zbog čega je

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{1}{2}.$$

Drugo rješenje.

Neka je

$$\alpha = \sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP, \quad \beta = \sphericalangle PBC = \sphericalangle ACP.$$



Neka je E presjek pravca BP s opisanom kružnicom trokuta ABC. Tada je

$$\sphericalangle ECA = \sphericalangle EBA = \alpha, \quad \sphericalangle EPC = \sphericalangle ECP = \alpha + \beta.$$

Jer je kut $\sphericalangle EPC$ vanjski u trokutu BCP, jednak je $\alpha + \beta$, zbog čega je trokut EPC jednakokračan.

Također, jer je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EBC = \beta$, vrijedi $AE \parallel PC$. Neka je F nožište visine iz E na dužinu $\overline{PC}$. Zbog jednakokračnosti, F je polovište dužine $\overline{PC}$. Četverokut $APFE$ je pravokutnik pa je $AE = PF = FC$. Sada iz sličnosti trokuta AED i PDC, dobivamo

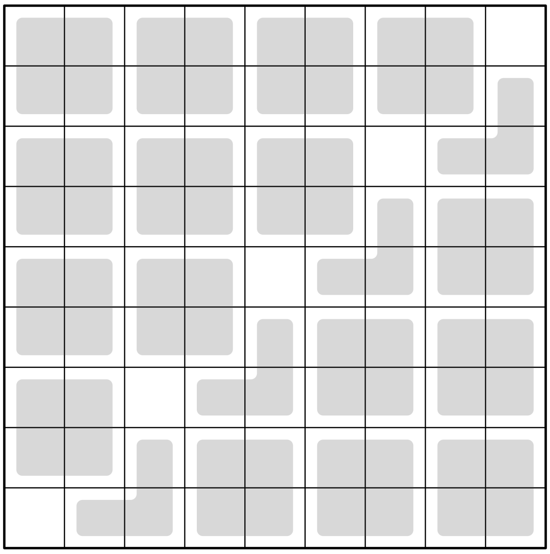
$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|PC|} = \frac{1}{2}.$$

Zadatak A-4.5.

Dana je ploča dimenzija 9×9 čija su sva polja bijela. Odredi najveći broj polja koja je moguće obojiti u crveno tako da svaki dio ploče dimenzija 2×2 sadržava najviše dva crvena polja.

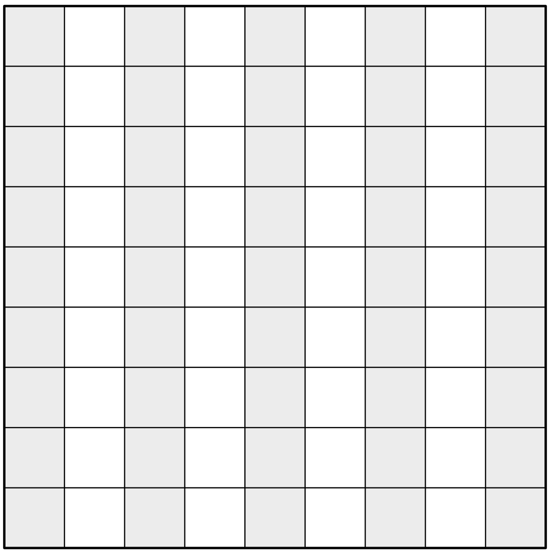
Rješenje.

Pokrijmo ploču 2×2 kvadratima i L-pločicama kao na slici, tako da bijela polja ostanu nepokrivena.



Svaki 2×2 kvadrat može sadržavati najviše dva crvena polja. Svaka L-pločica je sadržana u nekom 2×2 kvadratu, stoga također sadrži najviše 2 crvena polja. Među pokrivenim poljima može biti najviše 40 crvenih polja, te nam ostaje 5 nepokrivenih polja koja mogu biti crvena. Sveukupno može biti najviše 45 crvenih polja.

Primjer ploče sa 45 crvenih polja koja zadovoljava traženo svojstvo dobivamo ako obojamo svaki drugi stupac crveno kao na slici ispod.



Napomena: Postoji više prikladnih načina pokrivanja ploče 2×2 kvadratima i L-pločicama.