Dokazi u LK zadacima

Kada optimalna strategija nije optimalna?

Azra Tafro

Državno natjecanje iz matematike
Vodice, 29. travnja 2025.

Županijsko natjecanje 2025., zadatak 2.5

Dana je ploča dimenzija 10×10. U gornjemu lijevomu polju ploče nalazi se muha. Muha se može kretati na dva načina – *korakom* i *letom*. Korak je pomak na polje neposredno ispod ili desno od polja na kojemu se trenutačno nalazi. Letom muha prelazi s posljednjega (krajnjeg desnog) polja na prvo (krajnje lijevo) polje u istome retku ili sa posljednjega (donjeg) polja na prvo (gornje) polje u istome stupcu.
Koji je najmanji broj letova koje muha mora napraviti da bi posjetila svako polje ploče točno jednom?

Rješenje - 1. dio

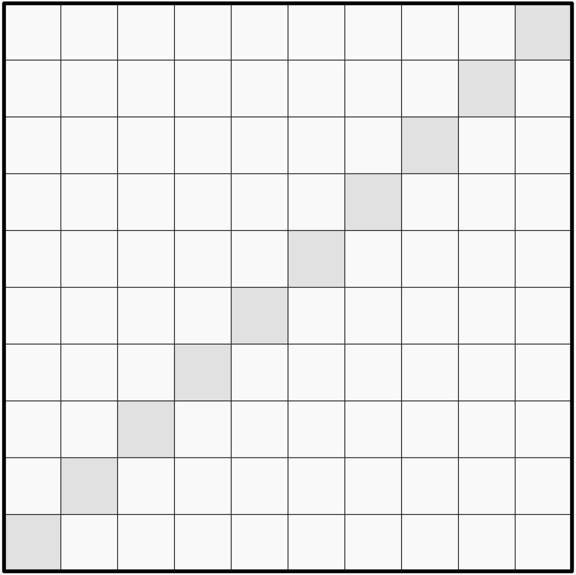
Odgovor je 9 letova. **1b**

Proglasimo *crnim* polja ploče koja leže na dijagonali koja spaja polje u gornjemu desnomu kutu i polje u donjemu lijevomu kutu. Tih je polja ukupno 10. **2b**

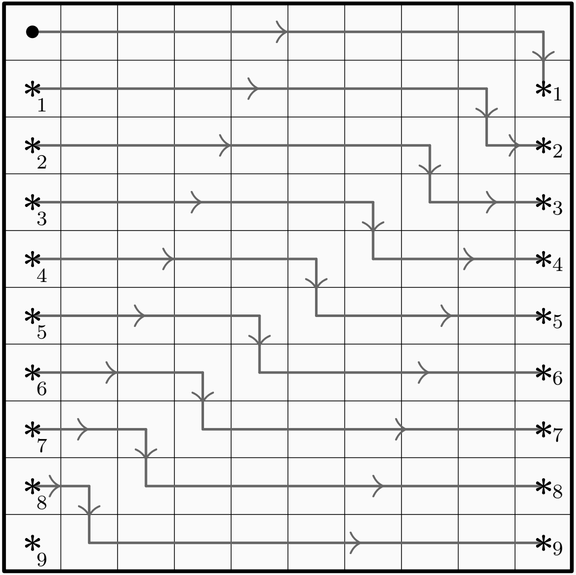
Primijetimo da muha ne može doći od jednog crnog polja ploče do drugog, a da između ne izvede barem jedan let. Na kojemu se god crnom polju ploče nalazi, polja su joj ispod nje nedostupna bez letova jer koracima ne može ići ulijevo, a crna polja iznad nje su joj nedostupna jer koracima ne može ići prema gore. **2b**

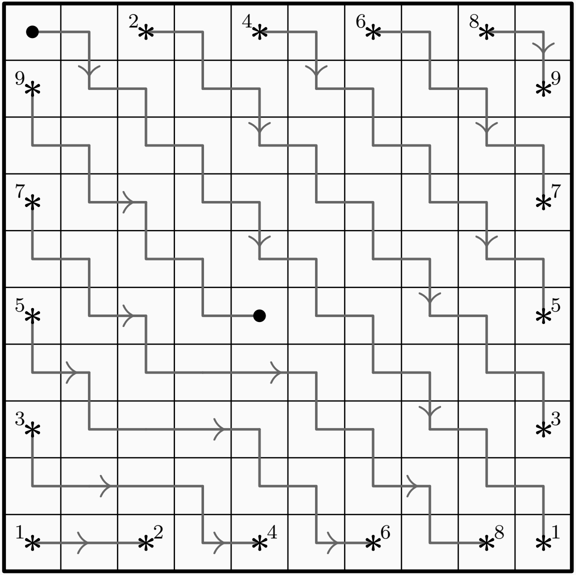
Nakon što muha posjeti prvo crno polje, kako bi posjetila preostalih 9 polja mora izvesti još najmanje 9 letova. Dakle, ne postoji šetnja po svim poljima ploče s manje od 9 letova. **2b**

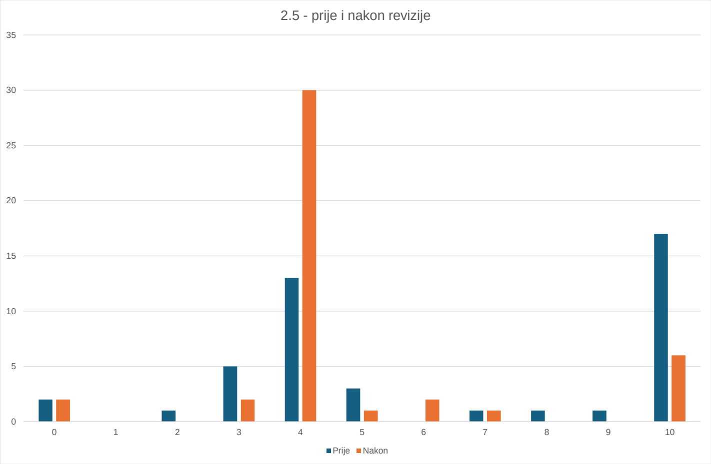
Da 9 zaista jest najmanji broj letova, dokazujemo konstrukcijom jedne takve šetnje... **3b**



Rješenje - 2. dio



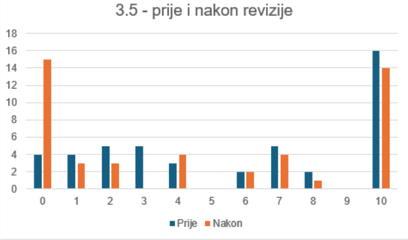

2
4
6
8
9
9
7
7
5
5
3
3
1
2
4
6
8
1

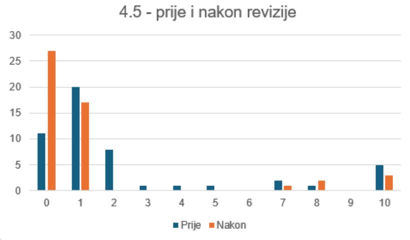


2.5 - prije i nakon revizije
35
30
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Prije
Nakon


1.5 - prije i nakon revizije
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Prije
Nakon


2.5 - prije i nakon revizije
0
5
10
15
20
25
30
35
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Prije
Nakon


3.5 - prije i nakon revizije
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Prije
Nakon


4.5 - prije i nakon revizije
0
5
10
15
20
25
30
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Prije
Nakon

LK zadaci na natjecanjima

- Svaka razina natjecanja u A varijanti sadrži (barem) jedan LK zadatak
- „prebroji..” vs. „dokaži..”
- LK teme najčešće nisu obuhvaćene nastavnim sadržajem
- „primjereno svim razredima” $\neq$ lagano!

Dodatni problemi ispravljača:

- Realna (vremenska) ograničenja u ispravljanju
- Ispravljači moraju predvidjeti tipične greške
- Usporedbom više sličnih rješenja lakše je uočiti nedostatke

Kako se pripremiti za dokazivanje?

„Dokaži...” = najveći „neprijatelj” prosječnog učenika.
Je li tako i natjecateljima?

- Koje tehnike i ideje se pojavljuju u dokazima?
- Koja logička pravila se pojavljuju?
- Koje su tipične pogreške?
- Kako naučiti ili uvježbati pisanje (i čitanje?) dokaza?

Problemi:

- razumijevanje problema
- formuliranje problema
- formuliranje rješenja

Logičko-kombinatorni zadaci

Općenito, možemo reći da se problemi tipično javljaju na 3 razine:

- razumijevanje problema - što se događa/traži u zadatku?
- formuliranje problema - kako „postaviti” tj. matematički zapisati zadatak?
- formuliranje rješenja - kako uobličiti ideje koje se čine „nadohvat ruke”?

Logičko-kombinatorni zadaci

Teme:

- Dirichletov princip
- invarijante i monovarijante
- matematička indukcija
- princip ekstrema (kombinatorna geometrija)
- dvostruko prebrojavanje
- igre i algoritmi

Osim standardnih predavanja po temama, pripreme iz ovog područja za cilj trebaju imati i razvoj kritičkog i (ne)linearnog razmišljanja, formuliranje i zapisivanje ideja.

Optimizacija

Na višim razinama često se javljaju zadaci „nađi najmanji (najveći) broj takav da..."

Rješenje **obavezno** mora uključivati dva dijela:

- Ogradu - zašto n ne može biti veći/manji od...
- Konstrukciju - nekad teže od ograde!

Ogradu dokazujemo nekom od poznatih tehnika: in/monovarijante, princip ekstrema, Dirichletov princip, ...

Primjer

Na stranicama i u unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta stranice 1 označeno je n točaka tako da su svake dvije točke udaljene više od 0.5. Odredi najveći mogući n.

Županijsko natjecanje 2025., Zadatak 1.5

Na ploču dimenzija 4×4 treba rasporediti određeni broj žetona tako da se na nekim poljima nalazi po jedan žeton, a neka su polja prazna. Za raspored žetona kažemo da je *siguran* ako se svaki žeton nalazi na polju kojemu su sva susjedna polja prazna (dva polja smatraju se susjednima ako imaju zajedničku stranicu).
Za koji najmanji prirodan broj k postoji siguran raspored k žetona takav da se na ploču ne može dodati nijedan žeton, a da raspored i dalje bude siguran?

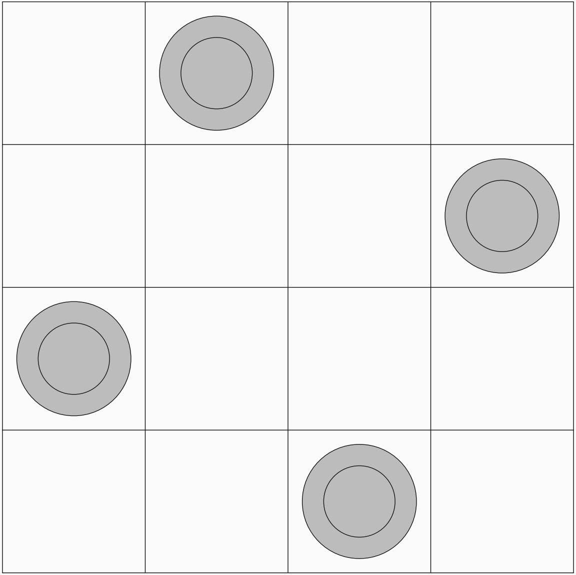
Rješenje - prva verzija

Odgovor je $k = 4$. **1b**

Primijetimo da za svaki postavljeni žeton na ploči postoji najviše 5 polja na koja se ne može postaviti žeton. To su polje na kojemu je žeton, i sva njemu susjedna polja (kojih je najviše 4). **2b**

Pretpostavimo da je moguće postići željeni raspored s $k \leq 3$ žetona. Tada postoji ukupno najviše $k \cdot 5 \leq 15$ polja na koje se ne može dodati žeton. Kako na ploči imamo 16 polja, ostaje najmanje jedno polje na koje se može dodati žeton, dakle mora vrijediti $k \geq 4$. **4b**

Jedan siguran raspored s četiri žetona dan je na slici. **3b**



Rješenje - druga verzija

Odgovor je $k = 4$. **1b**

Promotrimo polje koje se nalazi u gornjemu lijevom kutu ploče te njemu susjedna polja (ispod i desno od njega). Na jednome od ta tri polja mora se nalaziti žeton, u suprotnomu bi se mogao dodati žeton na kutno polje. **4b**

Isto možemo zaključiti i za preostala kutna polja ploče. **1b**

Kako među kutnim poljima i njima susjednim poljima nema preklapanja, potrebno nam je najmanje 4 žetona za siguran raspored. **1b**

Primjer sigurnog rasporeda s četiri žetona isti je kao u prvome rješenju. **3b**

HJMO 2024., Zadatak 2.

Na početku su sva polja ploče dimenzija 101×101 bijele boje. U svakom potezu biramo dio ploče dimenzija 2×2 (četiri polja koja imaju zajednički vrh) i na tom dijelu sva bijela polja pretvorimo u crna, a sva crna polja u bijela. Koliko najmanje bijelih polja može biti na ploči nakon nekog niza takvih poteza?

Rješenje - ograda

Promotrimo prvo kako svaki potez utječe na broj bijelih polja u pojedinom retku, odnosno stupcu. Svaki potez ili ne mijenja boju polja nekog retka, ili promijeni boju točno dva polja u tom retku. Ako su dva izmijenjena polja prije poteza bila oba obojana bijelom bojom, nakon poteza su oba obojana crnom bojom, odnosno broj bijelih polja u tom retku se smanjio za 2. Ako su izmijenjena polja prije poteza bila različite boje, onda su nakon poteza također različite boje pa se broj bijelih polja u tom retku nije promijenio. Konačno, ako su oba polja prije poteza bila crna, nakon poteza su oba bijela pa se broj bijelih polja u tom retku povećao za 2.

Zaključujemo da je parnost broja bijelih polja u svakom retku uvijek ista. Budući da se na početku u svakom retku nalazi 101 bijelo polje, znamo da se u svakom trenutku u svakom retku nalazi barem jedno bijelo polje. Budući da u svakom retku uvijek postoji barem jedno bijelo polje, zaključujemo da je broj bijelih polja na ploči uvijek barem 101.

Rješenje - konstrukcija

Pokažimo da zaista postoji niz poteza kojim možemo postići da se na ploči nalazi točno 101 bijelo polje. Promotrimo dijagonalu ploče od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja. Tu dijagonalu zovemo glavnom. Uvedimo koordinate na ploči tako da prva koordinata odgovara rednom broju retka, a druga stupca u kojoj se polje nalazi, tj. tako da su koordinate gornjeg lijevog polja ploče $(1, 1)$. Svaki potez možemo opisati koordinatom gornjeg lijevog polja 2×2 kvadrata na kojem radimo promjenu boje. Napravimo prvo poteze tako da sva polja strogo iznad glavne dijagonale i svako drugo polje na glavnoj dijagonali (počevši od drugog) promijene boju. To možemo postići nizom poteza $(1, 2), (1, 4), \ldots, (1, 100), (3, 4), (3, 6), \ldots, (3, 100), \ldots, (97, 100), (99, 100)$. Analogno možemo postići i da sva polja strogo ispod glavne dijagonale i svako drugo polje na glavnoj dijagonali promijeni boju. Ovim nizom poteza smo postigli da su sva polja izvan glavne dijagonale promijenila boju točno jednom, a svako polje na glavnoj dijagonali je boju promijenilo ili nula ili dva puta, odnosno sva polja na glavnoj dijagonali su bijela, dok su sva polja van glavne dijagonale crna.

Županijsko natjecanje 2017., 1.5.

Karlo i Lovro igraju sljedeću igru. Karlo će razrezati papir dimenzija 9×9 na pravokutnike cjelobrojnih dimenzija kojima je barem jedna dimenzija 1. Nakon toga će Lovro odabrati prirodni broj $k \in \{1, \ldots, 9\}$ i Karlo će mu dati onoliko novčića koliko iznosi ukupna površina svih pravokutnika dimenzija $1 \times k$ i $k \times 1$. Lovro će odabrati k tako da od Karla dobije što više novčića, a Karlo bi želio uštedjeti i pritom Lovri dati što manje novčića.
Odredi najmanji mogući broj novčića koje će Karlo dati Lovri.

Rješenje - ograda

Tvrdimo da će Karlo dati Lovri najmanje 12 novčića.

Pretpostavimo da postoji način da Karlo razreže papir tako da Lovri mora dati (strogo) manje od 12 novčića. Tim načinom rezanja Karlo bi napravio najviše 11 pravokutnika dimenzija 1×1, pet pravokutnika dimenzija 1×2, tri pravokutnika dimenzija 1×3, dva pravokutnika dimenzija 1×4, dva pravokutnika dimenzija 1×5, te po jedan pravokutnik dimenzija 1×6, 1×7, 1×8 i 1×9.

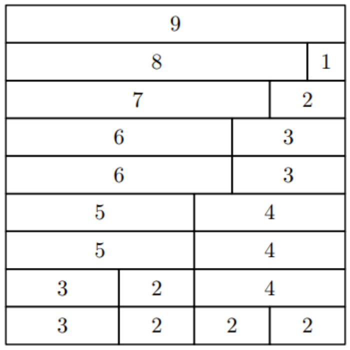
Svi ti pravokutnici zajedno bi imali površinu

$$11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 78.$$

Budući da je $78 < 81$, Karlo bi uz sve te pravokutnike morao napraviti još barem jedan pravokutnik kako bi iskoristio čitav papir dimenzija 9×9. Zato je nemoguće da Karlo da Lovri manje od 12 novčića.

Rješenje - konstrukcija

Sljedeći primjer pokazuje da Karlo može razrezati papir tako da bude siguran da će Lovri trebati dati najviše 12 novčića.



Kako biste bodovali ova dva dijela rješenja?

Kako „naučiti” dokaze?

> The only way to learn mathematics is to do mathematics.
>
> — Paul Halmos

Učenici:

- Interakcija i timski rad - prezentacije rješenja, međusobne pripreme/seminari
- Sudjelovanje u društvenoj mreži natjecatelja
  - www.artofproblemsolving.com/community
  - www.skoljka.org

Mentori:

- Zadaci „za tramvaj” - mozgalice koje se rješavaju bez papira
- Probna natjecanja s „pravim” ispravljanjem

Zaključak?

LK zadaci:

- priprema učenika da bolje formuliraju misli i zapisuju rješenje
- priprema mentora/ispravljača na prepoznavanje grešaka u razmišljanju

Općenito:

- učenici: svaku tvrdnju treba obrazložiti
- ispravljači: svaku tvrdnju treba obrazložiti :)

Izvori ideja:

- Bašić, M.: *AHA! Putovanje u središte problema*
- Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*
- Engel, A.: *Problem Solving Strategies*
- Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*
- Polya, G.: *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*
- Zeitz, P.: *The Art and Craft of Problem Solving*

Izvori zadataka:

- www.artofproblemsolving.com/community
- http://www.imo-official.org/
- natjecanja.math.hr
- Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" (mnm.hr)

Hvala na pažnji!