MEDO 2024./2025.

Peto kolo

4.4. – 6.4.2025.

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

U svako polje 3×3 tablice upisan je po jedan realan broj tako da vrijedi:

- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg stupca iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg retka iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg 2×2 kvadrata iznosi 2.

Koji je broj upisan u središnje polje tablice?

Rješenje.

Označimo brojeve koji se nalaze u tablici s $a_1, a_2, \ldots, a_9$ kao na slici:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Iz trećeg svojstva slijedi da je umnožak brojeva iz gornja 2×2 kvadrata jednak 4:

$$(a_1 a_2 a_4 a_5) \cdot (a_2 a_3 a_5 a_6) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Isti umnožak možemo napisati i na drugačiji način:

$$(a_1 a_2 a_4 a_5) \cdot (a_2 a_3 a_5 a_6) = (a_1 a_2 a_3) \cdot (a_4 a_5 a_6) \cdot a_2 a_5 = 1 \cdot 1 \cdot a_2 a_5 = a_2 a_5,$$

gdje smo koristili svojstvo da je umnožak svakog retka jednak 1. Dobivamo $a_2 a_5 = 4$.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Analognim postupkom iz donja dva retka zaključujemo da vrijedi $a_5 a_8 = 4$. Odatle slijedi

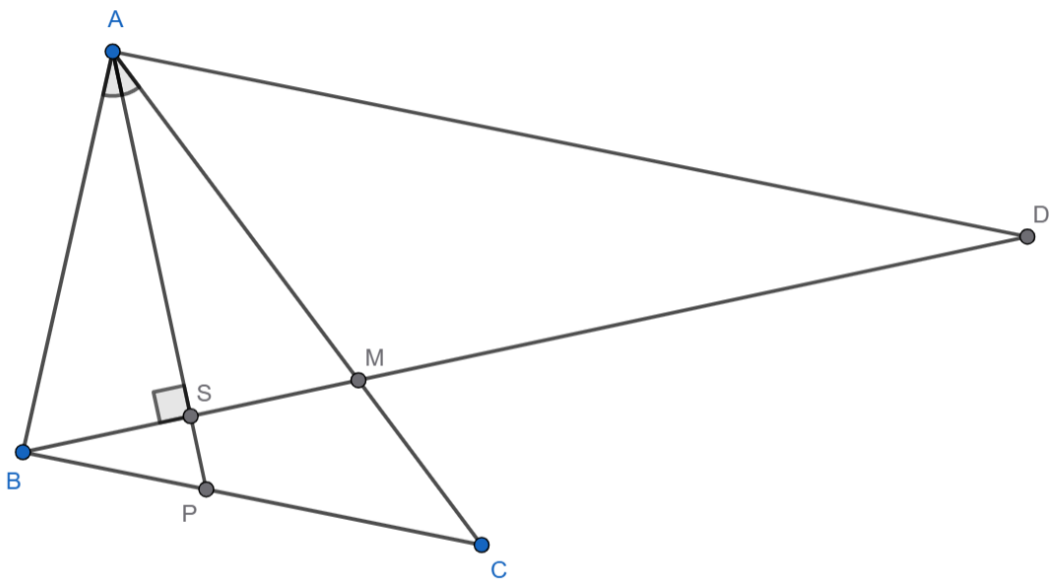
$$\begin{aligned} (a_2 a_5) \cdot (a_5 a_8) &= 4 \cdot 4 \\ (a_2 a_5 a_8) \cdot a_5 &= 16 \\ a_5 &= 16, \end{aligned}$$

gdje smo koristili da je umnožak brojeva iz drugog stupca jednak 1. Dakle, broj 16 je upisan u središnje polje.

Zadatak S-5.2. [20 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP| = 2$ i $|PC| = 3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D. Koliko iznosi $|AD|$?

Prvo rješenje.



Označimo sa S sjecište dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ te s M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

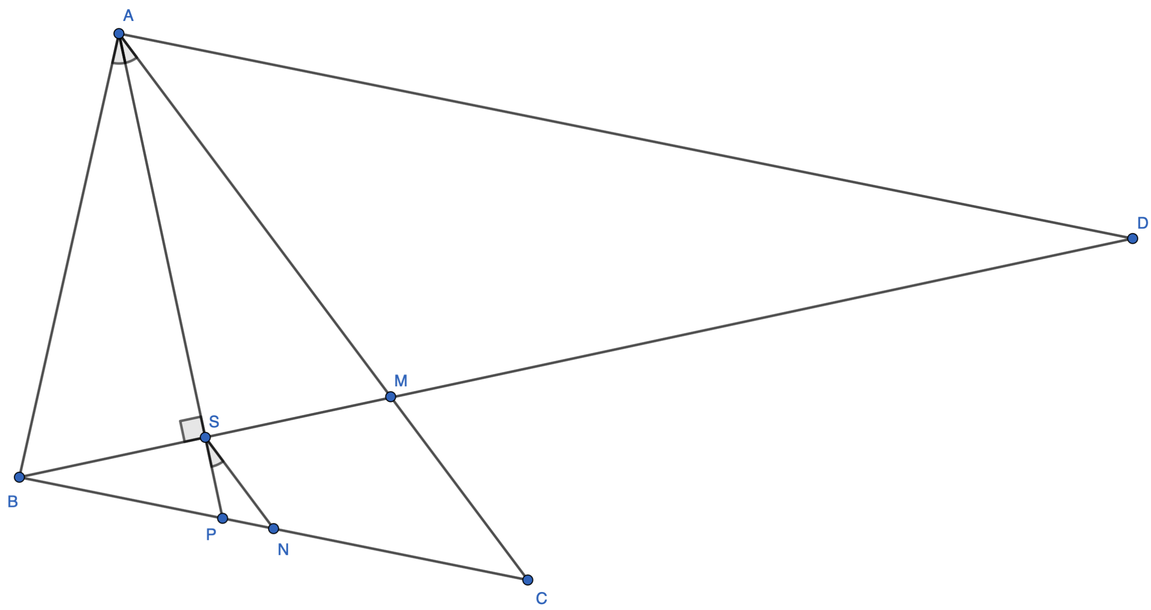
Uočimo sada da su pravokutni trokuti ASB i ASM sukladni po KSK poučku. Doista, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle SAM = \frac{\alpha}{2}$, dijele stranicu $\overline{AS}$ i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASM = 90°$. Zaključujemo da vrijedi $|BS| = |SM|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{BM}$.

Uočimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BCM \sim \triangle DAM$. Doista, oba para trokuta su slična po K-K poučku: parovi kutova su im jednaki kao vršni kutovi ili kutovi uz presječnicu usporednih pravaca. Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$
$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|DM|}$$

Označimo $|BS| = |SM| = x$. Iz prvog niza jednakosti imamo $\frac{2}{|AD|} = \frac{|BS|}{|DS|} = \frac{x}{|DM| + x}$, a iz drugog $\frac{5}{|AD|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{2x}{|DM|}$. Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo $\frac{5}{2} = \frac{2(|DM| + x)}{|DM|} = 2 + \frac{2x}{|DM|}$ iz čega slijedi $\frac{2x}{|DM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dvostruko duža od stranice $\overline{BC}$, tj. $|AD| = 2 \cdot |BC| = 2 \cdot 5 = 10$.

Drugo rješenje.



Kao u prvom rješenju zaključujemo da je točka S polovište dužine $\overline{BM}$. Definirajmo nadalje točku N kao presjek paralele s $\overline{AC}$ kroz S i dužine $\overline{BC}$.

Trokuti BSN i BMC su slični po K-K poučku jer dijele kut u vrhu B i $\overline{SN} \parallel \overline{MC}$. Kako $|BM| = 2|BS|$ slijedi da je $|BC| = 2|BN|$, odnosno $|BN| = (|BP| + |PC|)/2 = (2+3)/2 = 2.5$.

Također su trokuti PNS i PCA slični jer dijele kut u vrhu P i $\overline{NS} \parallel \overline{CA}$. Iz toga dobivamo

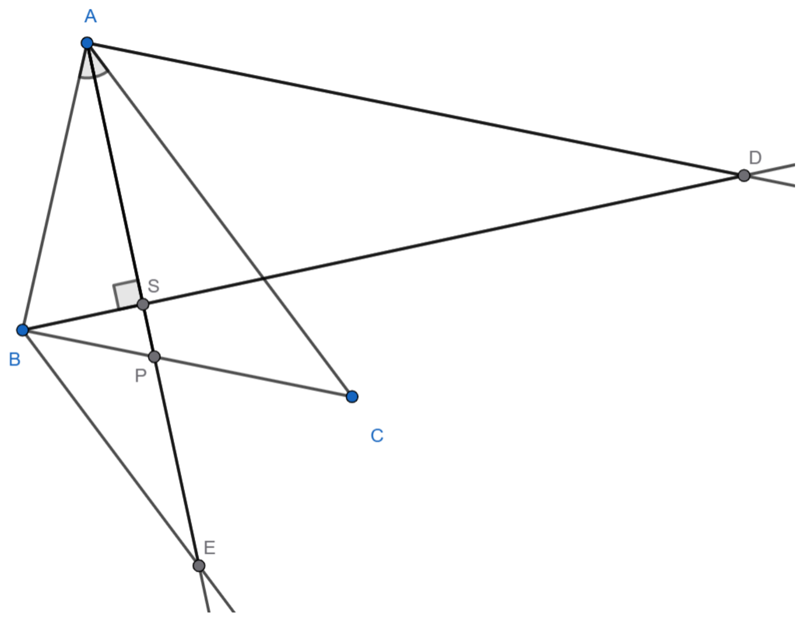
$$\frac{|PS|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PC|} = \frac{|BN| - |BP|}{|NC|} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Konačno, trokuti BSP i DSA su slični jer $\sphericalangle BSP = \sphericalangle DSA = 90^\circ$ i $\sphericalangle PBS = \sphericalangle ADS$ jer $\overline{BP} \parallel \overline{AD}$. Sada dobivamo

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{6}|PA|}{\frac{5}{6}|PA|} = \frac{1}{5},$$

odnosno $|AD| = 5|BP| = 10$.

Treće rješenje.



Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AC}$ iz točke B i označimo s E njeno sjecište sa simetralom kuta pri vrhu A. Imamo $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAE$, pa je trokut ABE jednakokračan i vrijedi $|AB| = |BE|$. Dužina BS je visina na osnovicu jednakokračnog trokuta pa je točka S polovište dužine $\overline{AE}$.

Primijetimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BEP \sim \triangle CAP$ (ponovno po K-K poučku, analogno kao u prvom rješenju). Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$
$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|EP|}{|AP|}.$$

Iz drugog niza jednakosti dobivamo $\dfrac{|EP|}{|AP|} = \dfrac{2}{3}$. Primijetimo usput da iz ovog niza jednakosti dobijemo i $\dfrac{|BE|}{|AC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{2}{3}$, što je poznati teorem o omjeru u kojem simetrala unutarnjeg kuta u trokutu dijeli nasuprotnu stranicu.

Označimo $|AE| = 2y$. Tada je $|AS| = |ES| = y$. Sada iz $2y = |EP| + |AP|$ dobivamo $|EP| = \dfrac{4}{5}y$, pa je $|PS| = |ES| - |EP| = \frac{1}{5}y$. Iz prvog niza jednakosti sada dobivamo

$$|AD| = |BP| \cdot \frac{|AS|}{|PS|} = 2 \cdot \frac{y}{\frac{1}{5}y} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Zadatak S-5.3. [30 bodova]

Riješi sljedeći sustav jednadžbi u skupu realnih brojeva:

$$\begin{aligned}
2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1} \\
2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2} \\
&\vdots \\
2x_{2025} &= x_{2024} + \frac{2}{x_{2024}} \\
2x_1 &= x_{2025} + \frac{2}{x_{2025}}.
\end{aligned}$$

Rješenje.

Primijetimo najprije da su svi brojevi istog predznaka. Naime, iz prve jednadžbe zaključujemo da su x_1 i x_2 istog predznaka, iz druge da su x_2 i x_3 itd. Također, svi brojevi su različiti od 0. Pretpostavimo prvo da su svi pozitivni. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geomertijske sredine imamo

$$x_i + \frac{2}{x_i} \geqslant 2\sqrt{2}, \text{ za sve } i = 1, 2, \ldots, 2025.$$

Stoga iz sustava zaključujemo da je $x_i \geqslant \sqrt{2}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, 2025$, a to znači da je $\frac{2}{x_i} \leqslant \sqrt{2}$. Sada zbrajanjem svih jednadžbi dobivamo:

$$2025\sqrt{2} \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{2025} = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{2}{x_{2025}} \leqslant 2025\sqrt{2}.$$

Odavde slijedi da ne može biti $x_i > \sqrt{2}$ pa mora biti $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2025} = \sqrt{2}$.

Ako su pak svi brojevi negativni, pomnožimo sve jednadžbe s -1 i stavimo $a_i = -x_i$. Tada su $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ pozitivni pa opet zaključujemo $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2025} = \sqrt{2}$, odakle je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2025} = -\sqrt{2}$.

Zadatak S-5.4. [40 bodova]

Neka je $k > 2$ prirodan broj. Dokaži da je $2^{2^k-1} - 2^k - 1$ složen broj.

Rješenje.

Neka je $N = 2^{2^k-1} - 2^k - 1$.

Ako je n paran, 2^n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a ako je n neparan, ostatak je 2. Stoga, ako je k paran, N je djeljiv s 3 i veći od 3 pa je složen.

Neka je k neparan. Uočimo:

$$2N = 2^{2^k} - 2^{k+1} - 2 = (2^{2^k} - 1) - (2^{k+1} + 1).$$

Dalje, raspisujući uzastopno razliku kvadrata, imamo

$$(2^{2^k}-1) = (2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-1}}-1) = (2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)(2^{2^{k-2}}-1) = \cdots = (2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)\cdots(2^{2^0}+1)$$

pa je $2N = (2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1)\cdots(2^{2^0} + 1) - (2^{k+1} + 1)$.

Kako je $k + 1$ paran možemo pisati $k + 1 = 2^a t$, za $a \geqslant 1$ i $t \geqslant 1$ neparan. Jer je t neparan imamo $2^{k+1} + 1 = (2^{2^a} + 1)(2^{2^a(t-1)} - 2^{2^a(t-2)} + \cdots - 2^{2^a} + 1)$ pa $2^{2^a} + 1 | 2^{k+1} + 1$.

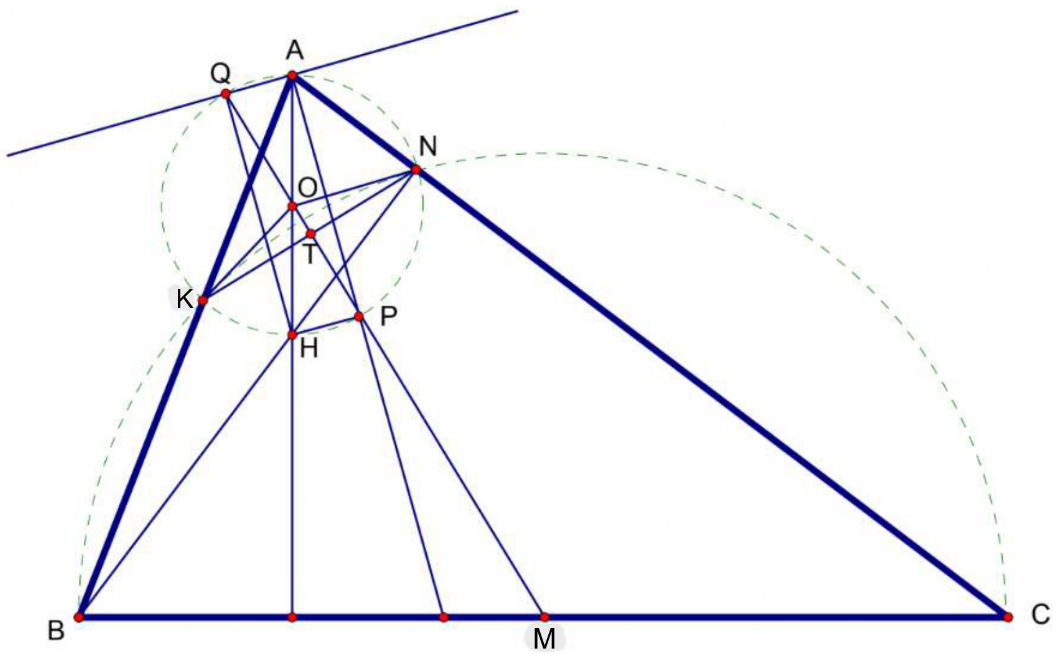
Ako je $a \geqslant k$, tada je $k+1 \geqslant 2^k$, što ne vrijedi za $k > 2$. Dakle $a \leqslant k-1$ pa se faktor $2^{2^a}+1$ pojavljuje u produktu $(2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1)\cdots(2^{2^0} + 1)$. Stoga $2^{2^a} + 1 | 2N$, a kako je to neparni djelitelj, slijedi $2^{2^a} + 1 | N$.

Ostaje još pokazati da je $2^{2^a} + 1 \neq N$ jer tada N ima djelitelja različitog od 1 i N. Ukoliko je $N = 2^{2^a} + 1$, tada jer je $a \geqslant 1$, N daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. S druge strane kako je $k > 2$ iz originalnog zapisa slijedi da N daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 što je kontradikcija.

Zadatak S-5.5. [50 bodova]

Dan je trokut ABC s ortocentrom H. Nožišta okomica iz točke H na simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta pri vrhu A su redom točke P i Q. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokaži da točke P, Q i M leže na istom pravcu.

Rješenje.



Ako je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, tada se točke P i Q podudaraju pa tvrdnja trivijalno vrijedi. Neka je dakle u nastavku $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$. Četverokut $HPAQ$ je očito pravokutnik, stoga mu možemo opisati kružnicu. Označimo njeno središte s O, a njena sjecišta sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom s K i N. U nastavku dokazujemo da su točke K i N nožišta okomica iz odgovarajućih vrhova u trokutu ABC, iz čega slijedi da je četverokut $BCNK$ tetivan sa središtem opisane kružnice u točki M te da je pravac QP simetrala tetive $\overline{KN}$, čime će biti dokazana tražena tvrdnja.

Označimo s T presjek pravca PQ (na kojem se nalazi središte kružnice O) s dužinom $\overline{KN}$. Kako je AP simetrala kuta kod vrha A, vrijedi $\sphericalangle KOP = 2 \cdot \sphericalangle KAP = 2 \cdot \sphericalangle PAN = \sphericalangle PON$. Sada vidimo da su trokuti KTO i NTO sukladni po S-K-S poučku. Ovo dokazuje da je pravac QP simetrala dužine $\overline{KN}$.

Kako je $\overline{AH}$ promjer kružnice opisane pravokutniku $HPAQ$, po Talesovom poučku vrijedi $\sphericalangle HNA = \sphericalangle HKA = 90^\circ$, a jer je H ortocentar trokuta ABC, slijedi da su dužine BN i CK visine u trokutu ABC. Sada po obratu Talesovog poučka zaključujemo da točke K i N leže na kružnici čiji je promjer stranica $\overline{BC}$.

Konačno, dokazali smo da je pravac QP simetrala tetive KN kružnice koja prolazi točkama B, C, N i K, iz čega slijedi da taj pravac prolazi i kroz središte te kružnice, a to je upravo točka M.

Zadatak S-5.6. [60 bodova]

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i) postoji realan broj M takav da je $f(x) < M$ za sve realne brojeve x

(ii) vrijedi $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$ za sve realne brojeve x i y.

Rješenje.

Za uređeni par realnih brojeva (x, y) označimo s $P(x, y)$ izraz $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$. Uvrstimo nekoliko pogodno odabranih konkretnih vrijednosti za x i y.

Iz $P(0, y)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f(0 \cdot f(y)) + yf(0) &= 0 \cdot f(y) + f(0 \cdot y) \\ \cancel{f(0)} + yf(0) &= 0 + \cancel{f(0)} \\ yf(0) &= 0. \end{aligned}$$

Kako je y proizvoljan realan broj, mora biti $f(0) = 0$.

Iz $P(x, 1)$ slijedi:

$$\begin{aligned} f(x \cdot f(1)) + 1 \cdot f(x) &= xf(1) + f(x \cdot 1) \\ f(xf(1)) + \cancel{f(x)} &= xf(1) + \cancel{f(x)} \\ f(xf(1)) &= xf(1) \end{aligned}$$

Ako bi bilo $f(1) \neq 0$, tada bi iz zadnje jednakosti slijedilo da je funkcija neogranična odozgo, što je u kontradikciji s prvim uvjetom zadatka. Stoga vrijedi $f(1) = 0$.

Iz $P(1, y)$ sada dobivamo:

$$\begin{aligned} f(1 \cdot f(y)) + yf(1) &= 1 \cdot f(y) + f(1 \cdot y) \\ f(f(y)) + y \cdot 0 &= 2f(y) \\ f(f(y)) &= 2f(y) \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $f^{(2)}(y) = 2f(y)$, gdje je $f^{(2)} = f \circ f$. Iz ovoga induktivno slijedi da za bilo koji prirodni broj n vrijedi $f^{(n)}(y) = 2^{n-1} f(y)$ za sve $y \in \mathbb{R}$. Kako bi f bila odozgo ograničena, mora vrijediti $f(y) \leqslant 0$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Vidimo da je $f \equiv 0$, tj. nul-funkcija $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, jedno rješenje dane funkcijske jednadžbe. Pretpostavimo sada da za neki realni broj r vrijedi $f(r) \neq 0$. Znamo da je $f(r) < 0$.

Neka je $t \in \mathbb{R}$ takav da $f(t) = 0$. Iz $P(r,t)$ tada dobijemo $f(tr) = t \cdot f(r)$. Kako je $f(x) \leqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je t nenegativan.

Iz $P\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, gdje je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{1}{x}f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right),$$

a iz $P\left(\dfrac{1}{x}, x\right)$:

$$f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x).$$

Zbrajanjem ove dvije jednakosti dobivamo $f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 0$. No, kako su oba pribrojnika nepozitivna, mora biti $f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sada iz prethodnog odjeljka zaključujemo da mora biti $xf\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 0$ i $\dfrac{1}{x}f(x) \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kako otprije znamo da je vrijednost funkcije uvijek nepozitivna, slijedi da za sve $x > 0$ mora biti $f(x) = 0$.

Iz $P(x, -1)$ dobijemo

$$f(xf(-1)) - f(x) = xf(-1) + f(-x).$$

Ako uvrstimo $x < 0$ onda znamo da je $f(-x) = 0$ te $f(xf(-1)) = 0$ jer je $xf(-1) > 0$. Slijedi da za $x < 0$ vrijedi $f(x) = -xf(-1)$. Iskoristimo sada naš $r \in \mathbb{R}$ za koji znamo da vrijedi $f(r) < 0$. Iz prethodne jednakosti uvrštavanjem $x = f(r)$ dobivamo $f(f(r)) = -f(r)f(-1)$. No, otprije znamo da vrijedi i $f(f(r)) = 2f(r)$. Izjednačavanjem ovih izraza dobivamo $f(-1) = -2$. Sada možemo zaključiti da za sve $x < 0$ vrijedi $f(x) = 2x$.

Uvrštavanjem se provjeri da funkcije $f \equiv 0$ i $f(x) = \begin{cases} 0, \ x \geqslant 0 \\ 2x, \ x < 0 \end{cases}$ zadovoljavaju početne uvjete.

Zadatak S-5.7. [70 bodova]

Dani prirodni broj transformiramo nizom koraka. U svakom koraku od trenutnog broja dobivamo novi broj tako da umetnemo jedan ili više znakova „+" između njegovih znamenki te izračunamo vrijednost dobivenog izraza. Primjerice, od broja 123 u jednom koraku možemo dobiti bilo koji od brojeva $1 + 23 = 24$, $12 + 3 = 15$ i $1 + 2 + 3 = 6$.

Odredi, ako postoji, najmanji prirodan broj M takav da opisanim postupkom možemo dobiti jednoznamenkasti broj u najviše M koraka počevši od bilo kojeg prirodnog broja.

Rješenje.

Odgovor: $M = 3$.

Uočimo da nam je za broj 289 potrebno najmanje 3 koraka da dođemo do jednoznamenkastog broja (npr. pomoću sljedećih koraka: $289 \longrightarrow 2 + 8 + 9 = 19 \longrightarrow 1 + 9 = 10 \longrightarrow 1 + 0 = 1$). Time imamo da je $M \geqslant 3$.

Za dokaz da je upravo $M = 3$ će nam trebati sljedeće tvrdnje.

Tvrdnja 1: Iz svakog prirodnog broja $n < 289$ možemo doći do jednoznamenkastog broja u najviše 2 koraka.

Dokaz.
Ako je zbroj znamenki broja n manji od 19 tada u prvom koraku možemo zbrojiti sve znamenke od

n i dobit ćemo broj $n' \leqslant 18$. U drugom koraku ponovo možemo zbrojiti sve znamenke od n' i time dobivamo jednoznamenkasti broj.

Promotrimo preostali slučaj kada je zbroj znamenki od n veći ili jednak 19. Budući da je $n < 289$ jedini mogući takav broj je upravo $n = 199$. U tom slučaju također možemo u 2 koraka doći do jednoznamenkastog broja sljedećim koracima

$$199 \longrightarrow 1 + 99 = 100 \longrightarrow 1 + 0 + 0 = 1.$$

$\square$

Tvrdnja 2: Neka je n prirodan broj sa zbrojem znamenki $s \geqslant 100$. Tada u jednom koraku možemo doći do broja oblika $\overline{a0\dots0bc}$ pri čemu je $a \leqslant 2$ i $\overline{bc} \leqslant 80$.

Dokaz.

Neka je $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ i označimo s $A = \max \left\{ \sum_{2 \leqslant 2l \leqslant k} a_{2l}, \sum_{1 \leqslant 2l-1 \leqslant k} a_{2l-1} \right\}$ veći od zbrojeva znamenki parnih indeksa (bez zadnje znamenke) i znamenki neparnih indeksa.

Kako je zbroj znamenki od n jednak s redom imamo

$$s = a_0 + a_1 + \ldots + a_k = a_0 + \sum_{2 \leqslant 2l \leqslant k} a_{2l} + \sum_{2 \leqslant 2l \leqslant k} a_{2l} \leqslant 9 + 2A,$$

iz čega slijedi da je $A \geqslant \dfrac{s-9}{2}$.

Pretpostavimo da se maksimum za A postiže za neparne indekse i promotrimo sljedeći korak:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \ldots + \overline{a_k a_{k-1}} \quad \text{ako je } k \text{ neparan}, \\ n &\longrightarrow \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \ldots + \overline{a_{k-1} a_{k-2}} + a_k \quad \text{ako je } k \text{ paran}. \end{aligned}$$

U oba slučaja imamo da novi zbroj iznosi

$$10 \sum_{1 \leqslant 2l-1 \leqslant k} a_{2l-1} + \sum_{2 \leqslant 2l \leqslant k} a_{2l} = 9 \sum_{1 \leqslant 2l-1 \leqslant k} a_{2l-1} + \sum_{1 \leqslant l \leqslant k} a_l = 9A + s.$$

Analogno, ako se maksimum za A postiže za parne znamenke onda promotrimo korak

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow a_0 \overline{a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3} + \ldots + \overline{a_k a_{k-1}} \quad \text{ako je } k \text{ paran}, \\ n &\longrightarrow a_0 + \overline{a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3} + \ldots + \overline{a_{k-1} a_{k-2}} + a_k \quad \text{ako je } k \text{ neparan} \end{aligned}$$

te ponovo u oba slučaja kao konačan zbroj dobijemo $9A + s$.

Promotrimo kako se promijeni konačni zbroj u prethodnom koraku ako umjesto grupiranja susjednih znamenki a_{i+1} i a_i u broj $\overline{a_{i+1} a_i}$ između njih stavimo znak plus i dobijemo $a_{i+1} + a_i$. Tada se konačni zbrojevi razlikuju za

$$\overline{a_{i+1} a_i} - (a_{i+1} + a_i) = 9a_{i+1} \leqslant 81.$$

Dakle, ovakvom modifikacijom prethodnog koraka će se konačni zbroj smanjiti najviše za 81.

Ovu modifikaciju možemo raditi na bilo kojem paru grupiranih znamenki iz prvog koraka. Time dobivamo sljedeći niz mogućih zbrojeva nakon gore opisanog prvog koraka s eventualnim modifikacijama $9A + s = s_l \geqslant s_{l-1} \geqslant \ldots \geqslant s_2 \geqslant s_1 = s$ gdje $s_l = 9A + s$ odgovara orginalnom zbroju nakon prvog koraka bez modifikacija, s_{l-1} odgovara konačnom zbroju nakon jedne modifikacije neke grupe $\overline{a_{i+1} a_i}$ koja se javlja u s_l, itd., s_2 odgovara konačnom zbroju neke grupe $\overline{a_{i+1} a_i}$ koja se javlja u s_3 te $s_1 = s$ odgovara konačnom zbroju nakon što smo proveli sve moguće modifikacije (u tom slučaju je taj zbroj upravo zbroj svih znamenki od n). Nadalje, kako s_i dobivamo jednom modifikacijom prethodnog konačnog zbroja s_{i+1} vrijedi da je $s_{i+1} - s_i \leqslant 81$ za sve $i = 1, 2, \ldots, l-1$.

Za prirodan broj N označimo s $I_N = [10^N, 2 \cdot 10^N\rangle$ i $J_N = [2 \cdot 10^N, 10^{N+1}\rangle$.

Budući da je $s_1 = s \geqslant 100$ imamo da je $s_1 \in I_N$ ili $s_1 \in J_N$ za neki $N \geqslant 2$.

Nadalje, korištenjem $A \geqslant \dfrac{s-9}{2}$ i $s \geqslant 100$ imamo da je

$$s_l = 9A + s \geqslant 9 \cdot \frac{s-9}{2} + s = \frac{11s-81}{2} > 5s = 5s_1.$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da brojevi s_1 i s_l ne mogu istovremeno oba biti u I_N ili J_N. To znači da će u nizu $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \ldots \leqslant s_l$ postojati neki indeks j tako da s_1 i s_j nisu istovremeno oba u I_N ili J_N te neka je j najmanji takav indeks.

Ovisno je li $s_1 \in I_N$ ili $s_1 \in J_N$ zbog minimalnosti indeks j i nejednakosti $s_j - s_{j-1} \leqslant 81$ imamo da je tada

$$s_j \in \left[2 \cdot 10^N, 2 \cdot 10^N + 81\right\rangle \quad \text{ili} \quad s_j \in \left[10^{N+1}, 10^{N+1} + 81\right\rangle.$$

Time imamo da će zbroj s_j koji odgovara konačnom zbroju nakon modificiranog prvog koraka biti upravo oblika $s_j = \overline{a0\ldots0bc}$ pri čemu je $a \leqslant 2$ i $\overline{bc} \leqslant 80$. $\square$

Konačno, tvrdnja $M = 3$ slijedi primjenom Tvrdnje 1 i Tvrdnje 2. Promotrimo sljedeća dva slučaja:

Ako je zbroj znamenki početnog broja n manji od 100 tada u prvom koraku možemo zbrojiti sve znamenke od n. Time dobivamo novi broj $n' < 100$. Iz Tvrdnje 1 znamo da iz broja n' u najviše 2 koraka možemo doći do jednoznamenkastog broja. Dakle, zajedno s prvim korakom u kojem smo iz n došli do n', dobivamo da u najviše 3 koraka iz n možemo doći do jednoznamenkastog broja.

S druge strane, ako je zbroj znamenki od n barem 100 primjenom Tvrdnje 2 u prvom koraku iz n možemo doći do broja oblika $\overline{a0\ldots0bc}$ pri čemu je $a \leqslant 2$ i $\overline{bc} \leqslant 80$. U idućem koraku zbrojimo sve znamenke od $\overline{a0\ldots0bc}$ i dobijemo broj $n' = a + b + c \leqslant 2 + 7 + 9 = 18$. Napokon, kako je $n' \leqslant 18$ zbrajanjem svih znamenki od n' dolazimo do jednoznamenkastog broja. Time smo u 3 koraka iz početnog broja n došli do jednoznamenkastog broja.

Za one koji žele znati (još) više: članak o problemu iz ovog zadatka u općenitoj bazi brojevnog sustava.