MEDO 2024./2025.
Peto kolo
4.4. – 6.4.2025.

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

Na livadi trava raste konstantnom brzinom. Ako bi se na livadu dovelo 9 krava na ispašu, trave bi nestalo za 4 dana. Ako bi se na livadu dovelo 8 krava, trave bi nestalo za 6 dana. Koliko najviše krava može pasti na toj livadi tako da nikada ne ostanu bez trave? Pretpostavljamo da svaka krava svakog dana popase jednaku količinu trave.

Rješenje.

Označimo s p početnu količinu trave na livadi (u kilogramima) te s d količinu trave (u kilogramima) koja naraste na livadi tijekom jednog dana. Također, označimo s k količinu trave (u kilogramima) koju popase jedna krava tijekom jednog dana.

Sada možemo postaviti jednadžbe. 9 krava tijekom 4 dana popase $9 \cdot 4 \cdot k$ kilograma trave. Kako nakon tog razdoblja na livadi nestane trave, to mora biti točno jednako ukupnoj količini trave koja se na livadi nalazi tijekom ta četiri dana, a to je jednako zbroju početne količine trave i količine trave koja naraste za 4 dana. Analogno zaključujemo za slučaj 8 krava, pa dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 9 \cdot 4 \cdot k = p + 4d \\ 8 \cdot 6 \cdot k = p + 6d. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobijemo $12k = 2d$, iz čega slijedi $d = 6k$. Iz toga zaključujemo da je dnevni prirast trave jednak količini trave koju 6 krava popase za jedan dan. To je i najveći mogući broj krava koje mogu pasti na livadi tako da nikada ne ostanu bez trave, jer ako ih je više onda će se količina trave svakog dana smanjivati i stoga će je u nekom trenutku nestati.

Zadatak J-5.2. [20 bodova]

Na velikom natjecanju u streljaštvu strijelac Oštrooki niti jednom nije promašio cijelu metu. Pogađao je samo desetke, devetke i sedmice i pritom je pogodio točno onoliko desetki koliko devetki i sedmica zajedno. Koliko je najmanje puta Oštrooki gađao metu ako se zna da je ukupno ostvario 920 bodova?

Rješenje.

Označimo s A broj desetki, s B broj devetki i s C broj sedmica koje je Oštrooki pogodio. Iz uvjeta zadatka čitamo $A = B + C$ te $10A + 9B + 7C = 920$. Zanima nas koliko najmanje može iznositi vrijednost $A + B + C$.

Uvrštavanjem $A = B+C$ u jednadžbu za broj bodova dobivamo *diofantsku jednadžbu* $19B+17C = 920$. Izrazimo li B iz ove jednadžbe dobijemo

$$B = \frac{920 - 17C}{19} = \frac{19 \cdot 48 + 8 - 17C}{19} = 48 - \frac{17C - 8}{19}.$$

Brojevi B i C moraju biti prirodni brojevi. Stoga 19 mora dijeliti $17C-8$ kako bi razlomak iz prethodnog izraza bio cijeli broj. Sada redom vrijedi:

$$\begin{aligned} 17C-8 &\in \{0,19,38,57,76,\ldots,912\} \quad /+8 \\ \Longrightarrow 17C &\in \{8,27,46,65,84,\ldots,920\} \quad /\div 17 \\ \Longrightarrow C &\in \{\cancel{\tfrac{8}{17}},\cancel{\tfrac{27}{17}},\cancel{\tfrac{46}{17}},\cancel{\tfrac{84}{17}},\ldots,\frac{255}{17}=15,\ldots,\frac{578}{17}=34,\frac{901}{17}=53,\cancel{\tfrac{920}{17}}\} \end{aligned}$$

Kad smo prvi put dobili da je razlomak prirodan broj 15, znali smo da će se idući put to dogoditi za vrijednost razlomka $15+19=34$ zato što brojnike razlomaka između ova dva broja možemo zapisati kao $255+19k$, gdje je $k=1,2,3,\ldots,16$ pa vrijedi $\dfrac{255+19k}{17}=15+\dfrac{19k}{17}$. Kako su 19 i 17 relativno prosti brojevi (nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1) zaključujemo da 17 mora dijeliti k. No, to je nemoguće dok je $k<17$.

Dakle, C može biti jedino 15, 34 i 53. Pripadne vrijednosti broja B su redom 35, 18 i 1. Moguće vrijednosti traženog zbroja $A+B+C=(B+C)+B+C=2(B+C)$ su sada redom 100, 104 i 108. Oštrooki je stoga najmanje 100 puta gađao metu.

Zadatak J-5.3. [30 bodova]

Koliko ima četvorki (a,b,c,d) prirodnih brojeva takvih da je

$$\mathrm{NZD}(a,b)=4,\ \mathrm{NZD}(b,c)=6,\ \mathrm{NZD}(c,d)=1,\ \mathrm{NZD}(d,a)=1$$

i $abcd=216000$?

Rješenje.

Vrijedi $216000=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5=2^6\cdot3^3\cdot5^3$. Kako je $\mathrm{NZD}(a,b)=4$, znamo da $4=2^2=2\cdot2$ dijeli brojeve a i b pa možemo pisati $a=2\cdot2\cdot x$, $b=2\cdot2\cdot x'$, gdje su x i x' neki relativno prosti prirodni brojevi (tj. nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1 jer bi u suprotnom najveći zajednički djelitelj brojeva a i b bio veći od 4). Analognim zaključivanjem dobijemo $b=2\cdot3\cdot y$ i $c=2\cdot3\cdot y'$, gdje su y i y' neki relativno prosti prirodni brojevi te iz preostale dvije jednakosti zaključujemo da su brojevi c i d te d i a međusobno relativno prosti.

Sada iz svega izrečenoga zaključujemo da vrijedi $a=2\cdot2\cdot a_1$, $b=2\cdot2\cdot3\cdot b_1$, $c=2\cdot3\cdot c_1$ i $d=d_1$, gdje su a_1, b_1, c_1 i d_1 prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$\mathrm{NZD}(a_1,b_1)=1,\ \mathrm{NZD}(b_1,c_1)=1,\ \mathrm{NZD}(c_1,d_1)=1 \text{ i } \mathrm{NZD}(d_1,a_1)=1. \qquad (\star)$$

Također znamo da broj a_1 ne sadrži faktor 3, broj c_1 ne sadrži faktor 2 i broj d_1 ne sadrži faktore 2 i 3.

Uvrštavajući ove izraze u jednakost $abcd=216000$ nakon skraćivanja dobijemo $a_1b_1c_1d_1=2\cdot3\cdot5^3$. Sada moramo prebrojati na koliko načina možemo rasporediti faktore 2, 3 i 5^3 među brojevima a_1, b_1, c_1 i d_1. Faktor 2 može pripadati jedino brojevima a_1 i b_1 pa imamo dvije mogućnosti; faktor 3 može pripadati jedino brojevima b_1 i c_1 pa i za njega imamo dvije mogućnosti. Faktori 5 iz umnoška 5^3 se zbog $(\star)$ mogu rasporediti jedino između parova brojeva a_1 i c_1 ili b_1 i d_1. U svakom od ova dva slučaja imamo 4 mogućnosti: prvi broj iz para može imati 0, 1, 2 ili 3 faktora 5, a drugi broj preostale faktore. Svi prethodni izbori su međusobno neovisni pa ukupan broj četvorki (a_1,b_1,c_1,d_1), a time i traženih četvorki (a,b,c,d), računamo kao umnožak $2\cdot2\cdot(2\cdot4)=32$.

Zadatak J-5.4. [40 bodova]

Niz od četiri znamenke može se transformirati na sljedeće načine:

(i) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 0, one se mogu istovremeno smanjiti za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 8770 i 9760)

(ii) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 9, one se mogu istovremeno povećati za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 9980 i 9881).

Može li se uzastopnom primjenom ovih transformacija niz 1233 transformirati u niz:

a) 2025?

b) 5052?

Rješenje.

a) Opisanim transformacijama moguće je niz 1233 pretvoriti u 2025, na primjer:

$$\underline{12}33 \xrightarrow{\text{(ii)}} 2\underline{33}3 \xrightarrow{\text{(i)}} 2\underline{22}3 \xrightarrow{\text{(i)}} 2\underline{11}3 \xrightarrow{\text{(i)}} 20\underline{03} \xrightarrow{\text{(ii)}} 20\underline{14} \xrightarrow{\text{(ii)}} 2025.$$

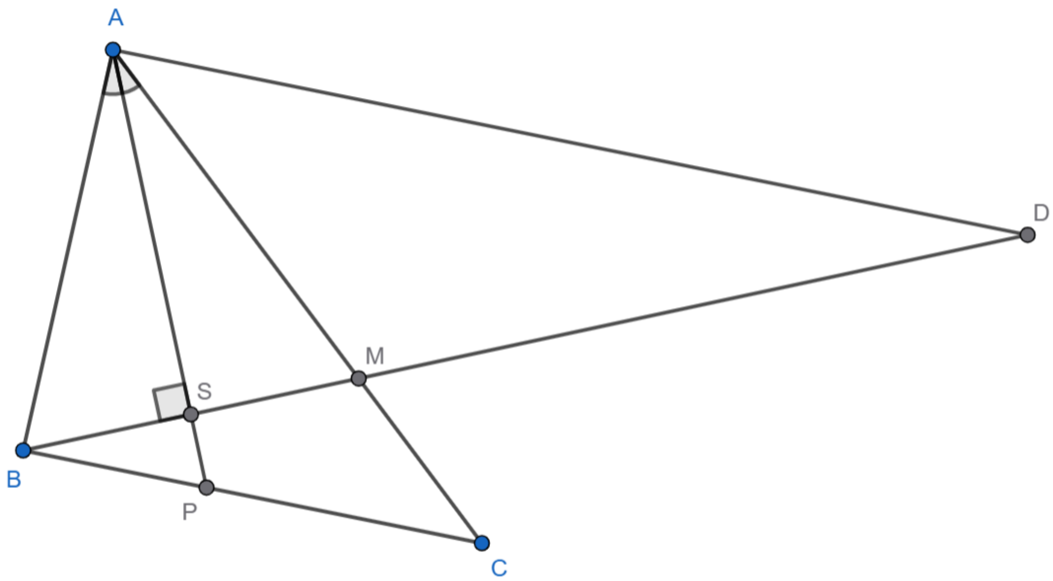
b) Dokažimo da opisanim transformacijama nije moguće broj 1233 pretvoriti u 5052 koristeći *invarijantu* ove transformacije. Za niz od četiri znamenke $\overline{abcd}$ promatrajmo izraz $(a+c)-(b+d)$, odnosno razliku između zbroja znamenaka na neparnim i parnim pozicijama. Kako transformacije (i) i (ii) mijenjaju vrijednosti susjednih znamenaka za isti iznos, gornja razlika se nakon bilo koje od njih neće promijeniti, jer će se oba zbroja $a+c$ i $b+d$ istovremeno povećati ili smanjiti za 1. Za 1233 promatrana razlika iznosi $1-2+3-3=-1$, dok za 5052 iznosi $5-0+5-2=8$, što znači da nije moguće danim transformacijama pretvoriti jedan broj u drugi.

Drugo rješenje za dio b).
Promatramo li zadani niz od četiri znamenke kao četveroznamenkasti prirodni broj, dozvoljene transformacije možemo interpretirati kao pribrajanje ili oduzimanje nekog od brojeva 11, 110 i 1100. Primijetimo kako su svi ovi brojevi djeljivi s 11. Stoga se korištenjem bilo koje transformacije ne mijenja ostatak koji broj daje pri dijeljenju s 11. Sada je dovoljno primijetiti da brojevi 1233 i 5052 ne daju isti ostatak pri dijeljenju s 11.

Zadatak J-5.5. [50 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP|=2$ i $|PC|=3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D. Koliko iznosi $|AD|$?

Prvo rješenje.



Označimo sa S sjecište dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ te s M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

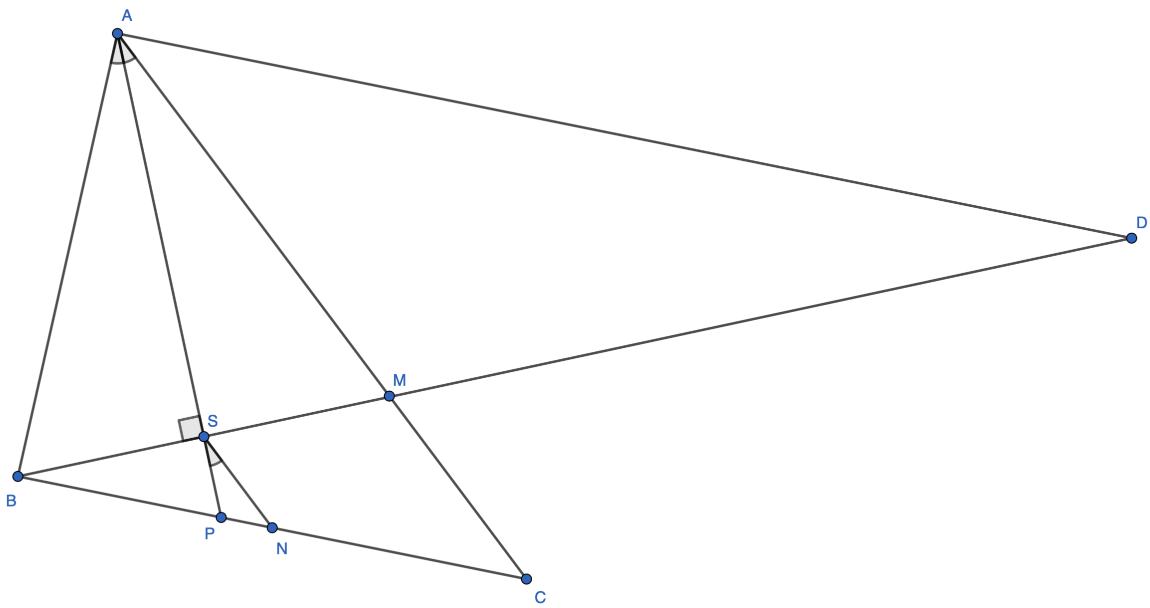
Uočimo sada da su pravokutni trokuti ASB i ASM sukladni po KSK poučku. Doista, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle SAM = \frac{\alpha}{2}$, dijele stranicu $\overline{AS}$ i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASM = 90°$. Zaključujemo da vrijedi $|BS| = |SM|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{BM}$.

Uočimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BCM \sim \triangle DAM$. Doista, oba para trokuta su slična po K-K poučku: parovi kutova su im jednaki kao vršni kutovi ili kutovi uz presječnicu usporednih pravaca. Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$
$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|DM|}$$

Označimo $|BS| = |SM| = x$. Iz prvog niza jednakosti imamo $\frac{2}{|AD|} = \frac{|BS|}{|DS|} = \frac{x}{|DM|+x}$, a iz drugog $\frac{5}{|AD|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{2x}{|DM|}$. Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo $\frac{5}{2} = \frac{2(|DM|+x)}{|DM|} = 2 + \frac{2x}{|DM|}$ iz čega slijedi $\frac{2x}{|DM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dvostruko duža od stranice $\overline{BC}$, tj. $|AD| = 2 \cdot |BC| = 2 \cdot 5 = 10$.

Drugo rješenje.



Kao u prvom rješenju zaključujemo da je točka S polovište dužine $\overline{BM}$. Definirajmo nadalje točku N kao presjek paralele s $\overline{AC}$ kroz S i dužine $\overline{BC}$.

Trokuti BSN i BMC su slični po K-K poučku jer dijele kut u vrhu B i $\overline{SN} \parallel \overline{MC}$. Kako $|BM| = 2|BS|$ slijedi da je $|BC| = 2|BN|$, odnosno $|BN| = (|BP| + |PC|)/2 = (2+3)/2 = 2.5$.

Također su trokuti PNS i PCA slični jer dijele kut u vrhu P i $\overline{NS} \parallel \overline{CA}$. Iz toga dobivamo

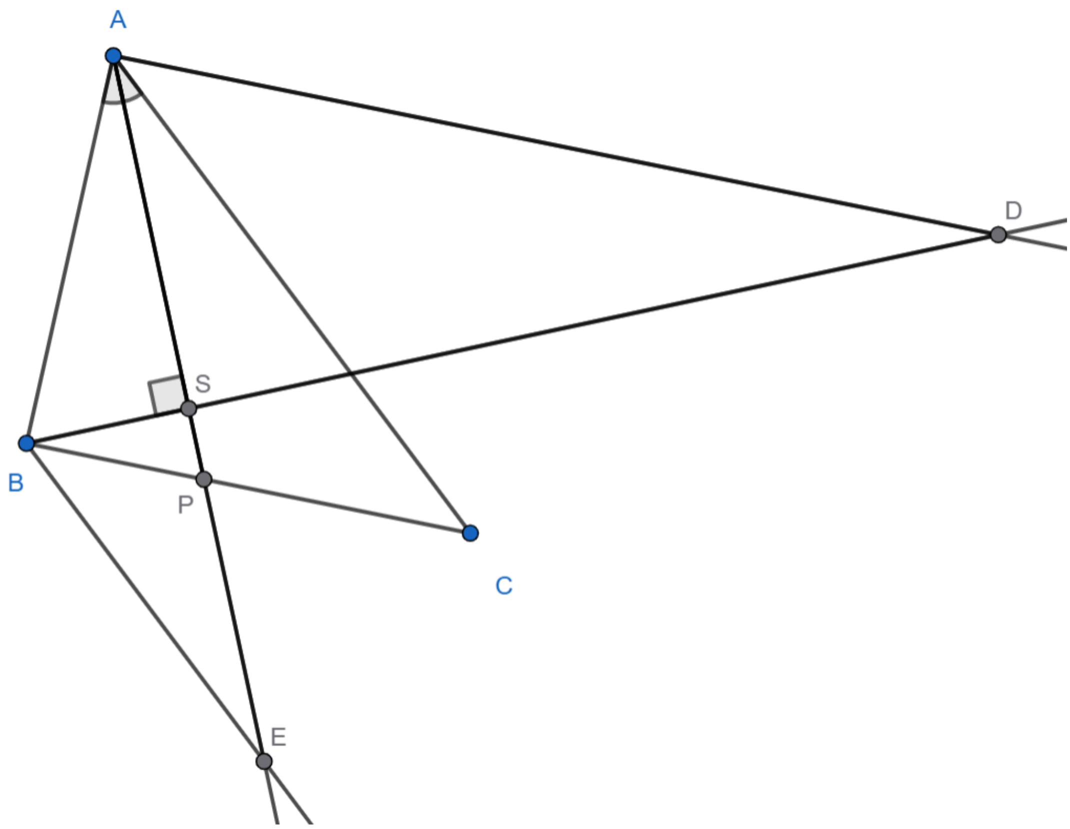
$$\frac{|PS|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PC|} = \frac{|BN| - |BP|}{|NC|} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Konačno, trokuti BSP i DSA su slični jer $\sphericalangle BSP = \sphericalangle DSA = 90°$ i $\sphericalangle PBS = \sphericalangle ADS$ jer $\overline{BP} \parallel \overline{AD}$. Sada dobivamo

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{6}|PA|}{\frac{5}{6}|PA|} = \frac{1}{5},$$

odnosno $|AD| = 5|BP| = 10$.

Treće rješenje.



Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AC}$ iz točke B i označimo s E njeno sjecište sa simetralom kuta pri vrhu A. Imamo $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAE$, pa je trokut ABE jednakokračan i vrijedi $|AB| = |BE|$. Dužina BS je visina na osnovicu jednakokračnog trokuta pa je točka S polovište dužine $\overline{AE}$.

Primijetimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BEP \sim \triangle CAP$ (ponovno po K-K poučku, analogno kao u prvom rješenju). Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$
$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|EP|}{|AP|}.$$

Iz drugog niza jednakosti dobivamo $\dfrac{|EP|}{|AP|} = \dfrac{2}{3}$. Primijetimo usput da iz ovog niza jednakosti dobijemo i $\dfrac{|BE|}{|AC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{2}{3}$, što je poznati teorem o omjeru u kojem simetrala unutarnjeg kuta u trokutu dijeli nasuprotnu stranicu.

Označimo $|AE| = 2y$. Tada je $|AS| = |ES| = y$. Sada iz $2y = |EP| + |AP|$ dobivamo $|EP| = \dfrac{4}{5}y$, pa je $|PS| = |ES| - |EP| = \frac{1}{5}y$. Iz prvog niza jednakosti sada dobivamo

$$|AD| = |BP| \cdot \frac{|AS|}{|PS|} = 2 \cdot \frac{y}{\frac{1}{5}y} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Zadatak J-5.6. [60 bodova]

Odredi najmanji prirodni broj N za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

> među bilo kojih N različitih prirodnih brojeva postoje četiri različita broja a, b, c i d takva da $a+b$ i $c+d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

Rješenje.

Promatrat ćemo ostatke brojeva pri dijeljenju s 20. Primijetimo da ako među N ralićitih prirodnih brojeva postoje međusobno različiti brojevi a, b, c i d, takvi da a i c imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20 i b i d imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20, onda $a+b$ i $c+d$ imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20 pa je tvrdnja zadovoljena.

Pretpostavimo da to nije slučaj. Tada najviše 3 broja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20, dok su svi ostali ostaci različiti. Označimo ostatak koji se možda ponavlja s x. To znači da imamo bar $N-2$ različitih ostataka (x i $N-3$ ostalih ostataka koji su svi različiti i različiti od x).

Od $N-2$ brojeva možemo napraviti $\frac{(N-2)(N-1)}{2}$ parova. Naime, prvi broj u paru možemo odabrati na $N-2$ načina, a drugi biramo od preostalih $N-1$ brojeva. Kako redoslijed brojeva nije bitan, nije važno jesmo li prvo birali a pa b ili b pa a. Zato broj načina treba još podijeliti s 2. Npr. ako od 3 broja 1,2,3 želimo odabrati 2, imamo $3 \cdot 2 = 6$ parova:

$$(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),$$

ali redoslijed nije bitan pa zapravo imamo 3 različita para.

Ako je $\frac{(N-2)(N-1)}{2} \geqslant 21$, to jest $N \geqslant 9$, onda sume elemenata neka dva para imaju po *Dirichletovom principu* iste ostatke pri dijeljenju s 20. Neka su ta dva para (a, b) i (c, d). Ukoliko su svi brojevi a, b, c i d različiti, našli smo tražene brojeve. No može se dogoditi da ta dva para sadrže isti broj. Neka su to parovi (a, b) i (a, c). To znači da b i c imaju iste ostatke pri dijeljenju s 20. Ali krenuli smo od $N-2$ brojeva koji svi imaju različite ostatke pa to nije moguće.

Pokazali smo da za $N \geqslant 9$ uvijek vrijedi tvrdnja zadatka. Pokažimo još primjerom da tvrdnja ne vrijedi za $N < 9$. Ako odaberemo sljedećih 8 prirodnih brojeva:

$$20, 40, 60, 1, 2, 4, 7, 12$$

ne možemo naći 2 para koji u sumi imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20. To znači da ako odaberemo bilo kojih N od ovih 8 brojeva ($N \leqslant 8$), tvrdnja ne vrijedi. Stoga je 9 doista najmanji prirodni broj za koji tvrdnja vrijedi.

Zadatak J-5.7. [70 bodova]

Neka je $p > 3$ prost broj. Odredi sve uređene parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$a^2 + 3ab + 2p(a+b) + p^2 = 0.$$

Prvo rješenje.

Riješimo danu jednadžbu po nepoznanici b:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ap + p^2 + b(3a+2p) &= 0 \\ b(3a+2p) &= -(a+p)^2 \\ b &= -\frac{(a+p)^2}{3a+2p}. \end{aligned}$$

Kako je b cijeli broj, mora vrijediti $3a + 2p \mid (a+p)^2$. Tada vrijedi i $3a+2p \mid 9 \cdot (a+p)^2 = (3a+3p)^2$. Izraz $(3a+3p)^2$ možemo rastaviti kao

$$(3a+2p+p)^2 = (3a+2p)^2 + 2(3a+2p)p + p^2.$$

Slijedi da vrijedi $3a + 2p \mid p^2$. Kako je p prost broj, znamo da su svi njegovi cjelobrojni djelitelji ± 1, $\pm p$ i $\pm p^2$; dakle, $3a + 2p$ mora biti jednako nekom od ovih brojeva.

Neka je stoga $3a + 2p = P$, gdje je P neki od brojeva ± 1, $\pm p$ i $\pm p^2$. Vidimo da mora vrijediti $3 \mid P - 2p$, pa ćemo podijeliti daljnja razmatranja u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju broja p s 3; kako je p prost i veći od 3, mora biti $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$ za neki prirodni broj k.

1.° $p = 3k + 1$

Ako je $P = 1$, dobijemo $3a = 1 - 2p = 1 - 2(3k + 1) = -6k - 1$, što nije moguće. Za $P = -1$ dobijemo $3a = -6k - 3$, tj. $a = -2k - 1$; uvrštavanjem u izraz za b dobivamo $b = k^2$. Zaključujemo da svi uređeni parovi $(a, b) = (-2k - 1, k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

Ako je $P = p$, dobivamo $3 \mid -p$, što nije moguće. Ako je $P = -p$, vrijedi $3a = -3p$, tj. $a = -p = -3k - 1$; tada vrijedi $b = 0$, pa u ovom slučaju svi uređeni parovi $(a, b) = (-3k - 1, 0)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

Ako je $P = p^2$, nije zadovoljeno $3 \mid P - 2p$. Ako je $P = -p^2 = -9k^2 - 6k - 1$, dobijemo $3a = -p^2 - 2p = -p(p + 2) = -(3k + 1)(3k + 3)$, tj. $a = -(3k + 1)(k + 1)$. Tada dobivamo $b = k^2$, pa i svi uređeni parovi $(a, b) = (-(3k + 1)(k + 1), k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

2.° $p = 3k - 1$

Ako je $P = 1$, vrijedi $3a = 1 - 2p = 1 - 2(3k - 1) = -6k + 3$, tj. $a = -2k + 1$; dalje dobivamo $b = -k^2$, pa su svi uređeni parovi $(a, b) = (-2k + 1, -k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu. Ako je $P = -1$ dobijemo $3a = -1 - 2p = -6k + 1$, što nije moguće.

Ponovno nije moguće $P = p$. Ako je $P = -p$, ponovno dobivamo $3a = -3p$, tj. $a = -p = -3k + 1$; opet vrijedi $b = 0$, pa su i svi uređeni parovi $(a, b) = (-3k + 1, 0)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

Ako je $P = p^2$, vrijedi $3a = p^2 - 2p = p(p - 2) = (3k - 1)(3k - 3)$, tj. $a = (3k - 1)(k - 1)$; dobijemo $b = -k^2$, pa svi uređeni parovi $(a, b) = ((3k - 1)(k - 1), -k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu. Konačno, ako je $P = -p^2$, ne vrijedi $3 \mid P - 2p$.

Drugo rješenje.

Označimo $d = (a, b)$. Iz početne jednadžbe imamo $d \mid p^2$, tj. d može biti p^2, p ili 1. Ako je $d = p^2$ onda možemo zapisati $a = p^2 x$, $b = p^2 y$ pri čemu su x i y relativno prosti cijeli brojevi. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu imamo $p^4 x^2 + 3p^4 xy + 2p^3(x + y) + p^2 = 0$ što daje kontradikciju modulo p^3.

Ako je $d = p$, stavimo $a = px$ i $b = py$ pri čemu su x i y relativno prosti cijeli brojevi. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $x^2 + 3xy + 2(x + y) + 1 = 0$, odakle slijedi da je $y = -\dfrac{(x + 1)^2}{3x + 2}$. Lagano se provjeri da su $x + 1$ i $3x + 2$ relativno prosti za svaki cijeli broj x iz čega slijedi da y može biti cijeli broj jedino ako je $3x + 2 = \pm 1$. Ovime dobivamo prvo rješenje kada je $x = -1$ i $y = 0$, tj. $a = -p$ i $b = 0$.

Ako je $d = 1$, onda znamo da su a i b relativno prosti. Nadopunjavanjem do potpunog kvadrata početnu jednadžbu možemo zapisati u obliku $(a + b + p)^2 = b(b - a)$. Budući da su a i b relativno prosti imamo da su i brojevi b i $b - a$ relativno prosti. Posebno, iz gornje jednadžbe onda slijedi da je $b = x^2$ i $b - a = y^2$ za neke relativno proste cijele brojeve x i y. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu i sređivanjem dolazimo do jednadžbe $2x^2 - y^2 + p = xy$. Gornju jednadžbu možemo zapisati u obliku $(x - y)(2x + y) = -p$ koja se lagano riješi te dobijemo preostala rješenja u ovisnosti o p modulo 3 kao u prvom rješenju.