Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

1. Ako za realne brojeve a i b vrijedi $a+b=9$ i $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{4}$, izračunaj $\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}$.

2. Odredi sve vrijednosti realnoga parametra p tako da jednadžbe

$$\frac{x-1}{x^2+2x}+\frac{x+3}{4-x^2}=\frac{4x^2+2}{x^3-4x}-\frac{x}{2x-x^2}$$

i

$$(x+p)^2+(x-p)^2=2(x-0.5p)(x+0.5p)-\frac{1}{x}\cdot p$$

imaju isti skup rješenja.

3. Koliko ima troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s četiri daju ostatak dva, a pri dijeljenju s tri daju ostatak jedan?

4. U pravokutnome trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 8 cm mjera unutarnjega kuta u vrhu B dvostruko je veća od mjere unutarnjega kuta u vrhu A. Izvan toga trokuta konstruirani su jednakostranični trokuti ACD i BEC. Koliko iznosi površina četverokuta $ABED$?

5. Na školskome je natjecanju iz matematike u prvome razredu sudjelovalo 7 učenika među kojima su Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Budući da je ljestvica poretka objavljena sa zaporkama, njihovi se prijatelji iz razreda zabavljaju pogađanjem koja su mjesta ostvarili Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Pri tome su im poznati sljedeći podatci:

- nema učenika s istim brojem bodova
- Tonijev je rang paran broj
- Dino je ispred Ane.

Na koliko načina prijatelji mogu dodijeliti rang Ani, Dinu, Jakovu, Katji i Toniju?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\frac{x^9}{7}+\frac{1}{7}=\frac{x^6}{3}+\frac{x^3}{3}.$$

2. Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se $1:\sqrt{2}$. Odredi kosinus manjega kuta koji zatvaraju težišnice povučene na katete tog trokuta.

3. Odredi sve različite racionalne brojeve $\frac{\overline{ab}}{10}$ i $\frac{\overline{cd}}{10}$ za koje vrijedi $\left(\frac{\overline{ab}}{10}\right)^2+\left(\frac{\overline{cd}}{10}\right)^2=\frac{\overline{ab}}{10}+\frac{\overline{cd}}{10}$, pri čemu su a,b,c,d znamenke i $b\neq 0$, $d\neq 0$.

4. Zadan je pravokutan trapez $ABCD$ s pravim kutovima pri vrhovima A i D. Duljine su osnovica trapeza $|AB|=9\,\text{cm}$ i $|CD|=4\,\text{cm}$. Kružnica s promjerom $\overline{AD}$ dodiruje krak $\overline{BC}$. Kolika je površina trapeza?

5. U pravokutniku $ABCD$ na stranici $\overline{AB}$ označeno je n točaka, a na svakoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ po pet točaka. Ukupan broj svih trokuta kojima su vrhovi određeni označenim točkama iznosi 2150. Odredi broj n ako vrhovi pravokutnika nisu među označenim točkama.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

1. Koji je najveći četveroznamenkasti prirodni broj koji se može zapisati koristeći sve znamenke brojeva A, B, C ako je

$$A = \sqrt[4]{5\sqrt[3]{2025}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt[4]{2025}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt[4]{5}},$$

$$B = \log\left(\frac{2^{\sqrt{\log_2 2025}}}{2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}}}\right),$$

$$C = 2025^{\log\left(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ\right)}?$$

2. Odredi zbroj rješenja jednadžbe $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{\cos x} = 4$ na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi]$.

3. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva m i n za koje je temeljni period funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|3 \cdot \sin \dfrac{x}{m^2}\right| - 5 \cdot \cos \dfrac{2x}{n^2}$ jednak 2025π.

4. Neka je $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ pravilna uspravna šesterostrana prizma u kojoj je točka P polovište brida $\overline{AB}$, a točka R polovište brida $\overline{EF}$. U kojemu su omjeru obujam piramide $DRPE'$ i obujam zadane prizme?

5. Martin je na rasprodaji potrošio 972 € kupivši ukupno 42 videoigre za svoju tek otvorenu igraonicu videoigara na igraćim konzolama 1 i 2. Sve su videoigre za igraću konzolu 1 imale identičnu cijenu, koja je izražena u eurima prirodni broj. Videoigre za igraću konzolu 2 prodavale su se po 6 € nižoj cijeni od cijene videoigara za igraću konzolu 1. Koliko je videoigara za igraću konzolu 1 mogao kupiti Martin i po kojoj cijeni ako se zna da je kupio više videoigara za igraću konzolu 2?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

1. Koliko ima kompleksnih brojeva z kojima su realni i imaginarni dio cijeli brojevi i za koje vrijedi

$$\operatorname{Im}(z^2+1) \geqslant 2(\operatorname{Im} z)^2$$
$$|z-i| < 3\,?$$

2. Odredi koordinate središta i polumjer kružnice koja dira os x, pravac s jednadžbom $y=\sqrt{3}x$ i kružnicu s jednadžbom $(x-10\sqrt{3})^2+(y-10)^2=25$.

3. Brojevi a_1, a_2, a_3, $\ldots$ čine aritmetički niz, pri čemu je $a_1 \neq a_2$. Tri člana istoga niza, a_2, a_5 i a_9, čine geometrijski niz tim redoslijedom. Odredi najmanje moguće pozitivne cijele brojeve k i l za koje i brojevi a_3, a_k, a_l također čine geometrijski niz tim redoslijedom.

4. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

Odredi $f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)$.

5. Riješi jednadžbu $x^7+1=(x+1)^7$ u skupu kompleksnih brojeva.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.