ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako za realne brojeve a i b vrijedi $a+b=9$ i $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{4}$, izračunaj $\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}$.

Prvo rješenje.

Faktorizacijom brojnika i nazivnika slijedi:

$$\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}$$ 2 boda

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$ 2 boda

$$=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}.$$ 1 bod

Iz $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{4}$ slijedi $\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{4}$ pa je $ab=12$. 2 boda

Nadalje vrijedi:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=81-24=57,$$ 2 boda

pa je

$$\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}=\frac{57}{(57+12)(57-12)}=\frac{57}{69\cdot 45}=\frac{19}{1035}.$$ 1 bod

Napomena: Kod prva dva boda 1 bod nosi pravilna faktorizacija brojnika, a 1 bod pravilna faktorizacija nazivnika. Analogno se dodjeljuju i druga dva boda.

Drugo rješenje.

Faktorizacijom brojnika i nazivnika te kraćenjem slijedi:

$$\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}$$ 2 boda

$$=\frac{a^2+b^2}{a^4+a^2b^2+b^4}.$$ 1 bod

Kao i u prvom rješenju dobijemo da je $ab=12$, odnosno $a^2b^2=144$ 2 boda te da je $a^2 + b^2 = 57$. 2 boda

Nadalje je:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 57^2 - 2 \cdot 144 = 2961. \qquad \text{2 boda}$$

Konačno dobivamo:

$$\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} = \frac{a^2 + b^2}{a^4 + a^2b^2 + b^4} = \frac{57}{2961 + 144} = \frac{57}{3105} = \frac{19}{1035}. \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Kod prva dva boda 1 bod nosi pravilna faktorizacija brojnika, a 1 bod pravilna faktorizacija nazivnika.

Zadatak B-1.2.

Odredi sve vrijednosti realnoga parametra p tako da jednadžbe

$$\frac{x-1}{x^2+2x} + \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{4x^2+2}{x^3-4x} - \frac{x}{2x-x^2}$$

i

$$(x+p)^2 + (x-p)^2 = 2(x-0.5p)(x+0.5p) - \frac{1}{x} \cdot p$$

imaju isti skup rješenja.

Prvo rješenje.

Riješimo najprije prvu jednadžbu. Faktorizacijom svih nazivnika u jednadžbi dobivamo:

$$\frac{x-1}{x(x+2)} - \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+2}{x(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x(x-2)} \qquad \text{2 boda}$$

Jednadžba ima smisla ako $x \notin \{-2, 0, 2\}$. 1 bod

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi:

$$(x-2)(x-1) - x(x+3) = 4x^2 + 2 + x(x+2), \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$5x^2 + 8x = 0, \qquad \text{1 bod}$$

$$x(5x+8) = 0.$$

Samo je $x = -\frac{8}{5}$ rješenje zadane jednadžbe. 1 bod

Uvrštavanjem tog rješenja u drugu jednadžbu dobivamo:

$$\left(-\frac{8}{5} + p\right)^2 + \left(-\frac{8}{5} - p\right)^2 = 2\left(-\frac{8}{5} - \frac{1}{2}p\right)\left(-\frac{8}{5} + \frac{1}{2}p\right) + \frac{5}{8}p,$$

$$\frac{64}{25} - \frac{16}{5}p + p^2 + \frac{64}{25} + \frac{16}{5}p + p^2 = \frac{128}{25} - \frac{1}{2}p^2 + \frac{5}{8}p,$$

$$p\left(\frac{5}{2}p - \frac{5}{8}\right) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Ako je $p = 0$, druga jednadžba prelazi u jednadžbu

$$(x+0)^2 + (x-0)^2 = 2(x - 0.5 \cdot 0)(x + 0.5 \cdot 0) - \frac{1}{x} \cdot 0,$$

odnosno jednadžbu $2x^2 = 2x^2$ čija su rješenja svi realni brojevi osim nule, pa jednadžbe nemaju isti skup rješenja. 1 bod

Ako je $p = \frac{1}{4}$ i $x \neq 0$, druga jednadžba poprima oblik

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 2\left(x - 0.5 \cdot \frac{1}{4}\right)\left(x + 0.5 \cdot \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4},$$

odnosno $2x^2 + \frac{1}{8} = 2x^2 - \frac{1}{32} - \frac{1}{4x}$ koja ima jedinstveno rješenje $x = -\frac{8}{5}$. 1 bod

Dakle, jedino za $p = \frac{1}{4}$ zadane jednadžbe imaju isti skup rješenja. 1 bod

Napomena: Učenik treba provjeriti i za $p = 0$ i za $p = \frac{1}{4}$ rješenje druge jednadžbe, odnosno navesti da za $p = 0$ rješenje nije jedinstveno, a za $p = \frac{1}{4}$ jest jedinstveno. Ukoliko to ne napravi oduzeti po 1 bod po slučaju.

Drugo rješenje.

Druga jednadžba ima smisla ako je $x \neq 0$. Nakon kvadriranja, množenja i sređivanja druga jednadžba poprima oblik:

$$\frac{5}{2}p^2 + \frac{p}{x} = 0,$$ 1 bod

$$p\left(\frac{5}{2}p + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ako je $p = 0$ skup rješenja druge jednadžbe je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ako je $p \neq 0$ tada je rješenje druge jednadžbe oblika $x = -\frac{2}{5p}$. 1 bod

Analogno kao i u prvom rješenju dobivamo da je jedino rješenje prve jednadžbe $x = -\frac{8}{5}$. 6 bodova

Budući da prva jednadžba ima samo jedno rješenje, $p = 0$ ne može biti vrijednost traženog parametra. 1 bod

Jedina moguća vrijednost parametra p dobiva se izjednačavanjem rješenja jednadžbi:

$$-\frac{2}{5p} = -\frac{8}{5},$$

$$p = \frac{1}{4}.$$ 1 bod

Zadatak B-1.3.

Koliko ima troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s četiri daju ostatak dva, a pri dijeljenju s tri daju ostatak jedan?

Prvo rješenje.

Neka je x traženi troznamenkasti broj.

Ako pri dijeljenju broja x s četiri ostatak iznosi dva, tada je $x = 4a + 2$, $a \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Ako pri dijeljenju broja x s tri ostatak iznosi jedan, tada je $x = 3b + 1$, $b \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Slijedi $4a + 2 = 3b + 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$ 1 bod

Nadalje je $b = \dfrac{4a+1}{3} = \dfrac{3a+a+1}{3} = a + \dfrac{a+1}{3}$. 1 bod

Budući da su a i b cijeli brojevi zaključujemo da $\dfrac{a+1}{3}$ treba biti cijeli broj, odnosno $\dfrac{a+1}{3} = c$, $c \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Nadalje, s obzirom da je $a = 3c - 1$, slijedi

$$x = 4a + 2 = 4(3c - 1) + 2 = 12c - 2, \ c \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Kako je x troznamenkasti broj zaključujemo da je $100 \leqslant 12c - 2 \leqslant 999$, 1 bod

odnosno $\dfrac{17}{2} \leqslant c \leqslant \dfrac{1001}{12}$. 1 bod

Zaključujemo da je $c \in \{9, \ldots, 83\}$, te da ima $83 - 8 = 75$ traženih brojeva. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da je $4a+2 = 3b+1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, odnosno da vrijedi diofantska jednadžba $4a - 3b = -1$. 3 boda

Uočimo da je jedno partikularno rješenje ove jednadžbe $a = -1$, $b = -1$, pa vrijedi

$$4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = -1,$$ 1 bod

$$4a - 3b = -1.$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$4(a + 1) - 3(b + 1) = 0,$$ 1 bod

odnosno $a + 1 = 3c$, $b + 1 = 4c$, $c \in \mathbb{Z}$ pa je $a = 3c - 1$, $b = 4c - 1$ te

$$x = 12c - 2, \ c \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Sada kao i u prvom rješenju zaključujemo da je $c \in \{9, \ldots, 83\}$, te da ima $83 - 8 = 75$ traženih brojeva. 4 boda

Treće rješenje.

Troznamenkasti brojevi koji daju ostatak dva pri djeljenju s četiri su 102, 106, 110, 114, 118, ..., 994, 998. 2 boda

Troznamenkasti brojevi koji daju ostatak jedan pri djeljenju s tri su 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, ..., 994, 997. 2 boda

U oba niza nalaze se brojevi 106, 118, ..., 994. 3 boda

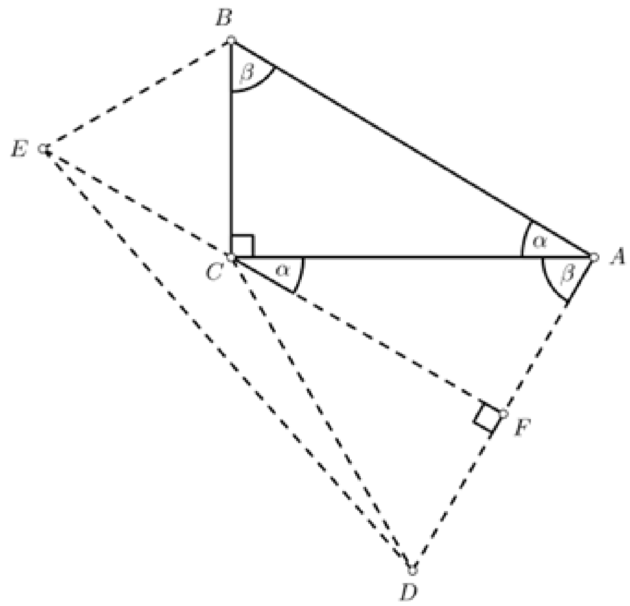
Zaključujemo da se radi o brojevima oblika $106 + 12k$, $k \in \{0, 1, 2, ..., 74\}$ te da takvih brojeva ima 75. 3 boda

Napomena: Ukoliko učenici ispišu sve tražene brojeve i točno ih prebroje dodijeliti svih 10 bodova.

Zadatak B-1.4.

U pravokutnome trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 8 cm mjera unutarnjega kuta u vrhu B dvostruko je veća od mjere unutarnjega kuta u vrhu A. Izvan toga trokuta konstruirani su jednakostranični trokuti ACD i BEC. Koliko iznosi površina četverokuta $ABED$?

Prvo rješenje.



1 bod

Neka je $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ i $\beta = |\sphericalangle CBA|$. Tada iz $\beta = 2\alpha$, slijedi $\alpha = 30°$ i $\beta = 60°$. 1 bod

Neka je točka F sjecište pravaca EC i AD. Budući da su trokuti BEC i CDA jednakostranični, zaključujemo da je $|\sphericalangle CAF| = 60° = \beta$, $|\sphericalangle FCA| = 180° - 90° - 60° = 30° = \alpha$ pa je i $|\sphericalangle AFC| = 90°$. 1 bod

Tražena je površina četverokuta $ABED$ jednaka zbroju površina četiriju trokuta:

$$P_{ABED} = P_{ABC} + P_{BEC} + P_{ACD} + P_{CED}.$$ 1 bod

Kako je $\sin\alpha = \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \dfrac{|\overline{BC}|}{8}$, slijedi $|\overline{BC}| = 4$ cm i $|\overline{AC}| = 4\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Sada je redom:

$$P_{ABC} = \frac{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad \text{1 bod}$$

$$P_{BEC} = \frac{|\overline{BC}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad \text{1 bod}$$

$$P_{ACD} = \frac{|\overline{AC}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad \text{1 bod}$$

$$P_{CED} = \frac{|\overline{EC}| \cdot |\overline{DF}|}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad \text{1 bod}$$

Konačno izračunavamo ukupnu površinu:

$$P_{ABED} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad \text{1 bod}$$

Napomena: Učenik je do duljine katete $\overline{BC}$ mogao doći zaključivanjem da je u pravokutnom trokutu s danim mjerama unutarnjih kutova duljina katete $\overline{BC}$ jednaka radijusu opisane kružnice, odnosno koristiti se činjenicom da je u takvom trokutu duljina kraće katete jednaka polovici duljine hipotenuze.
1 bod za određivanje duljina kateta trokuta ABC treba dodijeliti ako su duljine kateta točno izračunate, neovisno o načinu izračuna.

Drugo rješenje.

Skica je ista kao i u prvom rješenju. 1 bod

Kao i u prvom rješenju nalazimo da je $\alpha = 30°$ i $\beta = 60°$ te da je $|\overline{BC}| = 4$ cm i $|\overline{AC}| = 4\sqrt{3}$ cm. 2 boda

Neka je točka F sjecište pravaca EC i AD. Na isti način kao i u prvom rješenju nalazimo da je $|\sphericalangle FCA| = 30°$ i $|\sphericalangle AFC| = 90°$. 1 bod

Tražena je površina četverokuta $ABED$ jednaka zbroju površina četverokuta $EFAB$ i trokuta EDF:

$$P_{ABED} = P_{EFAB} + P_{EDF}. \quad \text{1 bod}$$

Unutarnji kutovi uz vrhove A i F četverokuta $EFAB$ su pravi zbog čega je taj četverokut trapez. 1 bod

Uočimo da je $\overline{CF}$ visina jednakostraničnog trokuta kojem je osnovica duljine $4\sqrt{3}$ cm, pa je $|\overline{CF}| = 6$ cm, a $|\overline{EF}| = 10$ cm. 1 bod

Sada je redom:

$$P_{EFAB} = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{EF}| + |\overline{AB}|) \cdot |\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot (10 + 8) \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad \text{1 bod}$$

$$P_{EDF} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DF}| \cdot |\overline{EF}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3}. \quad \text{1 bod}$$

Konačno izračunavamo ukupnu površinu:

$$P_{ABED} = 18\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.5.

Na školskome je natjecanju iz matematike u prvome razredu sudjelovalo 7 učenika među kojima su Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Budući da je ljestvica poretka objavljena sa zaporkama, njihovi se prijatelji iz razreda zabavljaju pogađanjem koja su mjesta ostvarili Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Pri tome su im poznati sljedeći podatci:

- nema učenika s istim brojem bodova
- Tonijev je rang paran broj
- Dino je ispred Ane.

Na koliko načina prijatelji mogu dodijeliti rang Ani, Dinu, Jakovu, Katji i Toniju?

Prvo rješenje.

Ako svakom od pet navedenih učenika dodijelimo njegov rang, dobit ćemo peteroznamenkasti broj. Anin rang je prva znamenka, Dinov druga, Jakovljev treća, Katjin četvrta i Tonijev zadnja, peta znamenka.

Stoga traženih rasporeda ima i koliko različitih peteroznamenkastih brojeva sastavljenih od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 pri čemu se znamenke ne mogu ponavljati, broj je paran i prva znamenka mora biti veća od druge.

Ako je Tonijev rang paran broj, zadnja znamenka može biti 2, 4, 6. Dakle, zadnju znamenku biramo na 3 načina. 2 boda

Neka je zadnja znamenka 2. Preostale znamenke biramo iz skupa $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Budući da prva znamenka mora biti veća od druge:

- ako je druga znamenka 1, prvu biramo iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ (5 izbora)
- ako je druga znamenka 3, prvu biramo iz skupa $\{4, 5, 6, 7\}$ (4 izbora)
- ako je druga znamenka 4, prvu biramo iz skupa $\{5, 6, 7\}$ (3 izbora)
- ako je druga znamenka 5, prvu biramo iz skupa $\{6, 7\}$ (2 izbora)
- ako je druga znamenka 6, prvu biramo iz skupa $\{7\}$ (1 izbor). 2 boda

Ukupan broj mogućih načina da izaberemo prve dvije znamenke je
$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. 2 boda

Nakon odabira prve dvije i zadnje znamenke treću i četvrtu znamenku biramo od preostala četiri broja. To možemo učiniti na $4 \cdot 3 = 12$ načina. 2 boda

Za svaki od 3 odabira zadnje znamenke postoji 15 odabira prve i druge, što je ukupno $3 \cdot 15$ odabira za te tri znamenke.

Za svaki od tih $3 \cdot 15$ odabira, postoji po 12 odabira treće i četvrte znamenke, što daje ukupno $3 \cdot 15 \cdot 12 = 540$ različitih peteroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju dane uvjete.

Stoga je 540 načina da se danim učenicima dodijeli rang od 1 do 7. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prethodnom rješenju svakom ćemo od pet navedenih učenika pridružiti njegov rang, odnosno jedan od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Najprije Toniju pridružujemo jedan od brojeva iz skupa $\{2, 4, 6\}$ što možemo napraviti na 3 načina. 2 boda

Preostala 4 natjecatelja mogu dobiti bilo koji od preostalih šest brojeva što možemo napraviti na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ načina. 3 boda

Opisano pridruživanje možemo napraviti na $3 \cdot 360 = 1080$ načina. 2 boda

U pola od tih načina će Ana imati poziciju veću od Dina, a u pola će biti obrnuto što nam nosi ukupno $1080 : 2 = 540$ načina koji odgovaraju uvjetu zadatka. 3 boda

Treće rješenje.

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. Dino je prvi.
   Tada za Tonija možemo odabrati jednu od 3 parne pozicije, dok za Anu preostaje 5 pozicija što je $3 \cdot 5 = 15$ razmještaja. 1 bod
2. Dino je drugi.
   Tada za Tonija možemo odabrati jednu od preostale 2 parne pozicije, dok Anu možemo smjestiti na 4 pozicije. Prema tome u ovom slučaju za njih imamo $2 \cdot 4 = 8$ razmještaja. 1 bod
3. Dino je treći.
   Ako je Toni na drugoj poziciji tada Anu možemo smjestiti na 4 pozicije, a ako Toni na četvrtoj ili šestoj poziciji Anu možemo smjestiti na 3 pozicije. To je ukupno $4 + 2 \cdot 3 = 10$ razmještaja. 1 bod
4. Dino je četvrti.
   Ako je Toni na drugoj poziciji, za Anu na raspolaganju imamo 3 pozicije. Ako je Toni na šestoj poziciji, za Anu imamo 2 pozicije. Prema tome u ovom slučaju imamo ukupno 5 razmještaja. 1 bod
5. Dino je peti.
   Ako je Toni na 6 poziciji, Ana mora biti na sedmoj. Ako je Toni na drugoj ili četvrtoj poziciji, Ana mora ići na šestu ili sedmu poziciju. Prema tome izbor pozicije za Tonija i Anu nosi $1 + 2 \cdot 2 = 5$ načina. 1 bod
6. Dino je šesti.
   Tada Ana mora biti na sedmoj poziciji, a Toni može biti na drugoj ili četvrtoj poziciji pa za njega imamo 2 načina. 1 bod

Za Dina, Anu i Tonija prema navedenom imamo ukupno $15 + 8 + 10 + 5 + 5 + 2 = 45$ razmještaja. 1 bod

Preostala 4 natjecatelja možemo razmjestiti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

Međutim kako učenike koji nisu među navedenih 5 ne razlikujemo, taj broj moramo podijeliti s 2. Prema tome, za te natjecatelje imamo ukupno $24 : 2 = 12$ načina. 1 bod

Ukupno imamo $45 \cdot 12 = 540$ razmještaja. 2 boda

Četvrto rješenje.

Kao i u prethodnom rješenju rezultate natjecanja shvaćamo kao niz od 7 znakova, pri čemu pozicija znaka označava rang natjecatelja.

Od tri parna mjesta odaberimo najprije mjesto za Tonija što možemo učiniti na 3 načina. 2 boda

Od preostalih 6 mjesta sada odabiremo 2 mjesta za Anu i Dina. Prvo mjesto odabiremo na 6 načina, a drugo onda na 5 načina što ukupno daje $6 \cdot 5 = 30$ načina. Međutim, kod Ane i Dina su pozicije određene, tj. Dino mora biti na poziciji s manjim, a Ana na poziciji s većim brojem što ukupno daje $30 : 2 = 15$ načina. 2 boda

Preostaje još 4 mjesta na koja proizvoljno možemo rasporediti preostale 4 osobe što možemo učiniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 2 boda

Opisani proces daje ukupno $3 \cdot 15 \cdot 24 = 1080$ načina. 2 boda

Kako poredak dva natjecatelja koja nisu među odabranima nije bitan, rang odabranih pet natjecatelja možemo dodijeliti na $1080 : 2 = 540$ načina. 2 boda

Napomena: Učenik je mogao najprije odrediti broj načina za Anu i Dina, no u tom slučaju bi trebao analizirati tri posebna slučaja u ovisnosit koliko parnih pozicija zauzimaju Ana i Dino. Ako je učenik korektno zapisao pripadna tri slučaja dobiva 1 bod, te po 1 bod za točno određen broj načina u svakom od slučaja. Preostalih 6 bodova tada dodijeliti prema navedenoj shemi.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\frac{x^9}{7}+\frac{1}{7}=\frac{x^6}{3}+\frac{x^3}{3}.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u pogodnijem obliku:

$$\frac{1}{7}\left(x^9+1\right)-\frac{x^3}{3}\left(x^3+1\right)=0$$

$$3\left(x^9+1\right)-7x^3\left(x^3+1\right)=0$$

$$3\left(x^3+1\right)\left(x^6-x^3+1\right)-7x^3\left(x^3+1\right)=0$$ 3 boda

$$\left(x^3+1\right)\left(3(x^6-x^3+1)-7x^3\right)=0$$

$$\left(x^3+1\right)\left(3x^6-10x^3+3\right)=0$$ 2 boda

Slijedi da je $x^3+1=0$ ili $3x^6-10x^3+3=0$. 1 bod

U prvom je slučaju $x_1=\sqrt[3]{-1}=-1$. 1 bod

U drugom slučaju uvođenjem supstitucije $x^3=t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $3t^2-10t+3=0$ čija su rješenja jednaka $t_1=3$, $t_2=\frac{1}{3}$. 1 bod

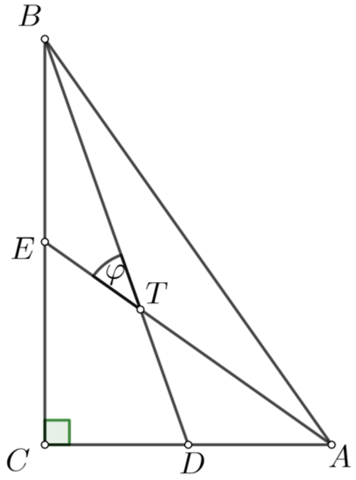
Slijedi da je $x_2=\sqrt[3]{3}$, $x_3=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. 2 boda

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su $-1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Zadatak B-2.2.

Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se $1 : \sqrt{2}$. Odredi kosinus manjega kuta koji zatvaraju težišnice povučene na katete tog trokuta.

Rješenje.



Neka je $b : a = 1 : \sqrt{2}$, odnosno $b = k$ i $a = \sqrt{2}k$.

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut AEC dobivamo da je duljina težišnice povučene iz vrha A trokuta ABC jednaka:

$$t_a = |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{k\sqrt{6}}{2}.$$ 2 boda

Analogno, primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut DBC dobivamo da je duljina težišnice povučene iz vrha B trokuta ABC jednaka:

$$t_b = |BD| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2}k)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{3k}{2}.$$ 2 boda

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut TBE dobivamo:

$$|BE|^2 = |TE|^2 + |TB|^2 - 2|TE| \cdot |TB| \cdot \cos\varphi. \quad (*)$$ 2 boda

Kako težište dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha trokuta, zaključujemo da je:

$$|TE| = \frac{1}{3}t_a = \frac{k\sqrt{6}}{6}, \quad |TB| = \frac{2}{3}t_b = k.$$ 2 boda

Konačno, uvrštavanjem $|TE| = \frac{k\sqrt{6}}{6}$, $|TB| = k$ i $|BE| = \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2}k}{2}$ u $(*)$ slijedi:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{6} + k^2 - 2 \cdot \frac{k\sqrt{6}}{6} \cdot k \cdot \cos\varphi,$$

odakle sređivanjem dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$ 2 boda

Napomena: Budući da se traži kosinus kuta u trokutu, učenici mogu pretpostaviti da se radi o pravokutnom trokutu s duljinama kateta $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ te im zbog toga ne treba oduzimati bodove.

Zadatak B-2.3.

Odredi sve različite racionalne brojeve $\dfrac{\overline{ab}}{10}$ i $\dfrac{\overline{cd}}{10}$ za koje vrijedi
$\left(\dfrac{\overline{ab}}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{\overline{cd}}{10}\right)^2 = \dfrac{\overline{ab}}{10} + \dfrac{\overline{cd}}{10}$, pri čemu su a, b, c, d znamenke i $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Prvo rješenje.

Nakon množenja zadane jednakosti sa 100 dobivamo jednakost

$$\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 10(\overline{ab} + \overline{cd}).$$

Označimo $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$. Tada je

$$x^2 + y^2 = 10(x + y).$$ 1 bod

Zapišimo posljednju jednadžbu u pogodnom obliku:

$$x^2 - 10x + y^2 - 10y = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 50.$$

Tada je $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50$. 2 boda

Budući da su x, y prirodni brojevi, vrijedi da je

$(x-5)^2 = 25$ i $(y-5)^2 = 25$, $(x-5)^2 = 1$ i $(y-5)^2 = 49$ ili $(x-5)^2 = 49$ i $(y-5)^2 = 1$ 2 boda

pa imamo sljedeće mogućnosti

$$x - 5 = \pm 5 \text{ i } y - 5 = \pm 5 \text{ ili } x - 5 = \pm 7 \text{ i } y - 5 = \pm 1$$

ili obrnuto, što nam daje isto rješenje zbog simetričnosti jednadžbi.

U prvom ćemo slučaju dobiti $(x, y) \in \{(10, 10), (0, 0), (10, 0), (0, 10)\}$ što nije rješenje zbog uvjeta u zadatku. 1 bod

U drugom slučaju riješimo redom sustave:

$$\begin{cases} x - 5 = 7 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (12, 6),$$

$$\begin{cases} x - 5 = -7 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, 6),$$

$$\begin{cases} x-5=7 \\ y-5=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow (x,y)=(12,4),$$

$$\begin{cases} x-5=-7 \\ y-5=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow (x,y)=(-2,4).$$

2 boda

Jedina moguća rješenja su uređeni parovi $(12,6)$ i $(12,4)$, pa su traženi decimalni brojevi

$$1.2 \text{ i } 0.6 \quad \text{ili} \quad 1.2 \text{ i } 0.4.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Nakon množenja zadane jednakosti sa 100 dobivamo jednakost

$$\overline{ab}^2+\overline{cd}^2=10(\overline{ab}+\overline{cd}).$$

Tada je

$$(10a+b)^2+(10c+d)^2=10(10a+b+10c+d),$$

odnosno

$$100a^2+20ab+100c^2+20cd+(b^2+d^2)=100a+100c+10(b+d) \quad (*)$$ 1 bod

Uočimo da su svi pribrojnici osim b^2+d^2 djeljivi s 10, pa i zbroj b^2+d^2 mora biti djeljiv s 10. 1 bod

Imamo sljedeće mogućnosti:

$$(b,d) \text{ ili } (d,b) \in \{(1,3),(2,4),(2,6),(5,5),(4,8),(3,9),(6,8),(7,9)\},$$ 1 bod

odnosno

$$b^2+d^2 \in \{10,20,40,50,80,90,100,130\}.$$ 1 bod

Ako u izraz $(*)$ uvrstimo da je $b^2+d^2=10k$, $k \in \{1,2,4,5,8,9,10,13\}$ i podijelimo s 10 dana jednakost prelazi u

$$10a^2+2ab+10c^2+2cd+k=10a+10c+(b+d), k \in \{1,2,4,5,8,9,10,13\}. \quad (**)$$

Budući da je $b+d$ uvijek paran broj, slijedi da je $k \in \{2,4,8,10\}$, odnosno 1 bod

(b, d) ili $(d, b) \in \{(2,4),(2,6),(4,8),(6,8)\}$ i $b+d \in \{6,8,12,14\}$. 1 bod

Iz jednakosti $(**)$ slijedi

$$10(a^2+c^2-a-c)=(b+d)-k-2(ab+cd).$$

Budući da je razlika $(b+d)-k$ jednaka 4 slijedi

$$5(a^2+c^2-a-c)=2-(ab+cd).$$ 1 bod

Uočimo da je lijeva strana uvijek pozitivna ili jednaka 0 te da desna strana mora biti djeljiva s 5. Zaključujemo da je $ab+cd=2$. 1 bod

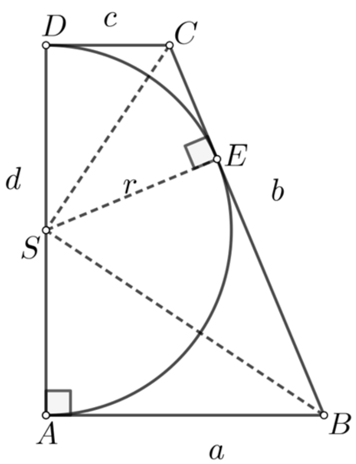
Kako su b i d različiti od 0, jedina je mogućnost $(a, c)=(1,0)$, $(b, d) \in \{(2,4),(2,6)\}$. Zbog simetričnosti isto vrijedi za (c, a), odnosno (d, b). 1 bod

Traženi su brojevi tada jednaki 1.2 i 0.6 ili 1.2 i 0.4. 1 bod

Zadatak B-2.4.

Zadan je pravokutan trapez $ABCD$ s pravim kutovima pri vrhovima A i D. Duljine su osnovica trapeza $|AB|=9$ cm i $|CD|=4$ cm. Kružnica s promjerom $\overline{AD}$ dodiruje krak $\overline{BC}$. Kolika je površina trapeza?

Prvo rješenje.



Skicirajmo pravokutni trapez, označimo diralište polukružnice i kraka trapeza s E te uočimo pravi kut SEB, pri čemu je točka S središte dane kružnice. 2 boda

Uvedimo oznake $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|DC|=c$, $|AD|=d$.

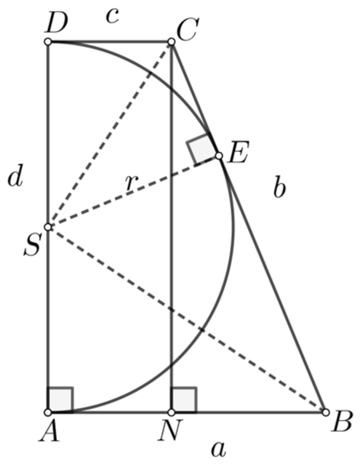
Kako su trokuti ABS i BES pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom, te kako je $|SA|=|SE|=r$, po S-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti ABS i BES sukladni.

Stoga je $|BE|=a$. 2 boda

Analogno, kako su trokuti SEC i SCD pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom te kako je $|SD| = |SE| = r$, po S-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su i trokuti SEC i SCD sukladni.

Stoga je $|CE| = c$. 2 boda

Nadopunimo skicu spuštanjem visine iz vrha C na osnovicu a trapeza $ABCD$.



Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutan trokut BCN dobivamo da je duljina visine trapeza:

$$|CN| = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm.}$$ 2 boda

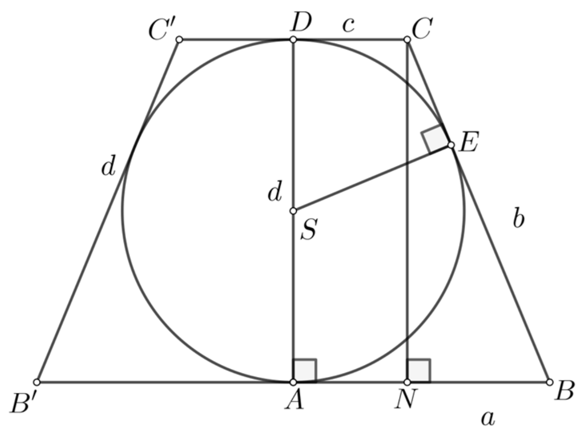
Konačno, površina trapeza je:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CN| = \frac{9+4}{2} \cdot 12 = 78 \text{ cm}^2.$$ 2 boda

Napomena: Ako učenik uoči da su navedeni trokuti sukladni po poučku SSK, a nije obrazložio (zajednička hipotenuza, polumjer i kut nasuprot hipotenuze) dodijeliti sve pripadajuće bodove.

Drugo rješenje.

Ako zadani trapez $ABCD$ osnosimetrično preslikamo s obzirom na os koja sadrži promjer kružnice, dobit ćemo jednakokračan trapez $B'BCC'$. 2 boda



Budući da je novonastali trapez opisan zadanoj kružnici, zaključujemo da je $B'BCC'$ tangencijalni četverokut. 2 boda

Prema svojstvu tangencijalnog četverokuta vrijedi da je:

$$|BB'| + |CC'| = |BC| + |B'C'|,$$ 1 bod

odnosno

$$18 + 8 = 2|BC|.$$

Odatle je $|BC| = 13$ cm. 1 bod

Tada je visina trapeza spuštena iz vrha C jednaka:

$$|CN| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm}.$$ 2 boda

Površina zadanog trapeza jednaka je:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CN| = \frac{9 + 4}{2} \cdot 12 = 78 \text{ cm}^2.$$ 2 boda

Zadatak B-2.5.

U pravokutniku $ABCD$ na stranici $\overline{AB}$ označeno je n točaka, a na svakoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ po pet točaka. Ukupan broj svih trokuta kojima su vrhovi određeni označenim točkama iznosi 2150. Odredi broj n ako vrhovi pravokutnika nisu među označenim točkama.

Prvo rješenje.

Načine povezivanja odabranih točaka u trokut možemo podijeliti na pet slučajeva.

Prvi slučaj.

Jedan vrh trokuta nalazi se na stranici $\overline{AB}$, a preostala dva vrha svaki na jednoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$.

Vrh trokuta na stranici $\overline{AB}$ možemo odabrati na n načina, dvije od preostale tri stranice na kojima se nalazi po jedan vrh trokuta možemo odabrati na 3 načina, dok točku na svakoj od tih stranica možemo odabrati na 5 načina.

Broj tako dobivenih trokuta je $n \cdot 3 \cdot 5^2 = 75n$. 2 boda

Drugi slučaj.

Jedan vrh trokuta je na stranici $\overline{AB}$, a preostala dva vrha na jednoj od preostalih triju stranica pravokutnika.

Vrh trokuta na stranici $\overline{AB}$ možemo odabrati na n načina, stranicu na kojoj se nalaze dva vrha možemo odabrati na 3 načina, a dvije točke na toj stranici možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina.

Broj tako dobivenih trokuta je $n \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 30n$. 2 boda

Treći slučaj.

Na stranici $\overline{AB}$ nalaze se dva vrha trokuta, dok je treći vrh na jednoj od preostale tri stranice pravokutnika.

Dva vrha trokuta koji se nalaze na stranici $\overline{AB}$ možemo odabrati na $\frac{n(n-1)}{2}$ načina, stranicu na kojoj se nalazi treći vrh možemo odabrati na 3 načina, dok točku na odabranoj stranici možemo odabrati na 5 načina.

Broj tako dobivenih trokuta je $\frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{15}{2} n \cdot (n-1)$. 2 boda

Četvrti slučaj.

Na svakoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ nalazi se po jedan vrh.

Na svakoj od tih stranica vrh možemo odabrati na 5 načina.

Broj tako dobivenih trokuta je $5^3 = 125$. 1 bod

Peti slučaj.

Na jednoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ nalaze se dva vrha trokuta, a na jednoj od njih jedan vrh.

Stranicu na kojoj se nalaze dva vrha možemo odabrati na 3 načina, a vrhove na toj stranici možemo odabrati na $\frac{5\cdot 4}{2}$ načina.

Preostalu stranicu na kojoj se nalazi treći vrh možemo odabrati na 2 načina, a vrh na toj stranici na 5 načina.

Broj tako dobivenih trokuta je $3 \cdot \frac{5\cdot 4}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 300$. 1 bod

Zbrojimo li broj trokuta po navedenim slučajevima slijedi

$$75n + 30n + \frac{15}{2} \cdot n \cdot (n-1) + 125 + 300 = 2150,$$

dakle sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$n^2 + 13n - 230 = 0$$

1 bod

čija su rješenja 10 i -23.

Kako je n broj točaka na stranici $\overline{AB}$ zaključujemo $n = 10$. 1 bod

Drugo rješenje.

Ukupno je označeno $n + 15$ točaka. Od njih biramo tri koje će biti vrhovi trokuta.

Bilo koje tri točke možemo odabrati na

$$(n+15)(n+15-1)(n+15-2)$$

načina, ali taj broj moramo podijeliti s brojem njihovih međusobnih rasporeda (bez obzira na poredak).

Međusobnih rasporeda tri točke ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. 2 boda

Dakle, tri vrha trokuta od $n + 15$ točaka možemo odabrati na

$$\frac{(n+15)(n+14)(n+13)}{6}$$

načina. 1 bod

Od toga broja moramo oduzeti odabire triju točaka koje se nalaze na istoj stranici pravokutnika.

Tako na stranici $\overline{AB}$ tri točke možemo odabrati na

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

načina. 1 bod

Na svakoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ tri točke možemo odabrati na

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

načina. 1 bod

Tada je ukupan broj odabira tri vrha trokuta jednak:

$$\frac{(n+15)(n+14)(n+13)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 3 \cdot 10.$$

2 boda

Stoga je traženi broj rješenje jednadžbe:

$$\frac{(n+15)(n+14)(n+13)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 30 = 2150.$$

1 bod

Nakon množenja jednadžbe sa 6 i sređivanja imamo redom:

$$(n^2 + 29n + 210)(n + 13) - n \cdot (n^2 - 3n + 2) - 180 = 12900$$

$$n^3 + 42n^2 + 587n + 2730 - n^3 + 3n^2 - 2n - 180 = 12900$$

$$45n^2 + 585n - 10350 = 0$$

$$n^2 + 13n - 230 = 0$$

1 bod

Traženi broj n je pozitivno rješenje ove jednadžbe, broj $n = 10$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Koji je najveći četveroznamenkasti prirodni broj koji se može zapisati koristeći sve znamenke brojeva A, B, C ako je

$$A = \sqrt[4]{5\sqrt[3]{2025}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt[4]{2025}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt[4]{5}},$$

$$B = \log\left(\frac{2^{\sqrt{\log_2 2025}}}{2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}}}\right),$$

$$C = 2025^{\log\left(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ\right)}?$$

Rješenje.

Izračunajmo vrijednosti brojeva A, B i C.

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt[4]{5\sqrt[3]{2025}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt[4]{2025}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3 \cdot 2025}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4 \cdot 2025}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^4 \cdot 5}} = \\
&= \sqrt[12]{5^3 \cdot 2025} \cdot \sqrt[12]{3^4 \cdot 2025} \cdot \sqrt[12]{5^5} = \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot 2025^2} = \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot \left(5^2 \cdot 3^4\right)^2} = \\
&= \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 3^8} = \sqrt[12]{5^{12} \cdot 3^{12}} = 5 \cdot 3 = 15.
\end{aligned}$$

3 boda

$$B = \log\frac{2^{\sqrt{\log_2 2025}}}{2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}}} = \log 2^{\sqrt{\log_2 2025}} - \log 2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}} =$$

1 bod

$$= \sqrt{\log_2 2025} \cdot \log 2 - \sqrt{\log_{2025} 2} \cdot \log 2025 =$$

1 bod

$$= \sqrt{\frac{\log 2025}{\log 2} \cdot \log^2 2} - \sqrt{\frac{\log 2}{\log 2025} \cdot \log^2 2025} =$$

1 bod

$$= \sqrt{\log 2025 \cdot \log 2} - \sqrt{\log 2 \cdot \log 2025} = 0.$$

1 bod

$$C = 2025^{\log\left(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ\right)} = 2025^{\log\left(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ\right)} =$$

1 bod

$$= 2025^{\log 1} = 2025^0 = 1.$$

1 bod

Traženi četveroznamenkasti broj je 5110. 1 bod

Napomena: Bilo koji ispravan način određivanja točne vrijednosti broja A vrijedi 3 boda. Za svaku računsku pogrešku oduzeti 1 bod.

Zadatak B-3.2.

Odredi zbroj rješenja jednadžbe $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{\cos x}=4$ na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi]$.

Rješenje.

Primijetimo da je $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=4-3=1$, odnosno $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$. 1 bod

Stoga zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}}=4.$$

Supstitucijom $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}$ jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2-4t+1=0. \quad \text{2 boda}$$

Njezina su rješenja $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$. 1 bod

U prvom slučaju je $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}=2+\sqrt{3}$ pa je

$$\cos x=1, \quad \text{1 bod}$$

odnosno $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

U drugom je slučaju $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}=2-\sqrt{3}$ pa je

$$\cos x=-1, \quad \text{1 bod}$$

odnosno $x=(2k-1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Uočimo da su sva rješenja polazne jednadžbe oblika $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi]$ rješenja su $-2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$. 1 bod

Njihov zbroj iznosi 3π. 1 bod

Napomena: Učenik ne treba zapisati opća rješenja trigonometrijskih jednadžbi. Ukoliko za svaku jednadžbu u oba promatrana slučaja ispiše rješenja na traženom intervalu treba mu dodijeliti sve bodove predviđene za ta rješenja (ukupno 3 boda).

Učenik može polaznu jednadžbu pomnožiti ili s $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x}$ ili s $\left(2-\sqrt{3}\right)^{\cos x}$ i na taj način doći do kvadratne jednadžbe. U tom slučaju treba mu dodijeliti sve bodove predviđene za tu kvadratnu jednadžbu (3 boda).

Zadatak B-3.3.

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva m i n za koje je temeljni period funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|3\cdot\sin\frac{x}{m^2}\right|-5\cdot\cos\frac{2x}{n^2}$ jednak 2025π.

Rješenje.

Funkcija f je zbroj dvije periodične funkcije $f_1(x) = \left|3 \cdot \sin \dfrac{x}{m^2}\right|$ i $f_2(x) = -5 \cdot \cos \dfrac{2x}{m^2}$.
Njezin je temeljni period jednak najmanjem pozitivnom realnom broju koji je period obiju tih funkcija, tj. najmanjem zajedničkom višekratniku njihovih perioda, u slučaju da takav broj postoji. 1 bod

Odredimo temeljni period svake od tih funkcija.

Temeljni period funkcije $g(x) = 3 \sin \dfrac{x}{m^2}$ jednak je $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{m^2}} = 2m^2\pi$. 1 bod

Tada je temeljni period funkcije $f_1(x) = \left|3 \cdot \sin \dfrac{x}{m^2}\right|$ jednak polovini temeljnog perioda funkcije g, odnosno $P_1 = m^2\pi$. 1 bod

Funkcija $f_2(x) = -5 \cdot \cos \dfrac{2x}{n^2}$ ima temeljni period $P_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{2}{n^2}} = n^2\pi$. 1 bod

Kako je najmanji zajednički višekratnik perioda funkcija f_1 i f_2 broj $V(m^2\pi, n^2\pi) = 2025\pi$, zaključujemo da je $V(m^2, n^2) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$. 1 bod

Tada je $m^2, n^2 \in \{1, 9, 25, 81, 225, 2025\}$ jer su to jedini djelitelji broja 2025 koji su potpuni kvadrati. 1 bod

Budući da vrijedi $D(m^2, n^2) \cdot V(m^2, n^2) = m^2 \cdot n^2$, a $V(m^2, n^2) = 2025$, 2025 mora biti djelitelj umnoška brojeva m^2 i n^2. 1 bod

Stoga imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{aligned}(m^2, n^2) \in \{&(1, 2025), (2025, 1), (9, 2025), (2025, 9), (25, 2025), (2025, 25),\\ &(81, 2025), (2025, 81), (225, 2025), (2025, 225), (2025, 2025),\\ &(25, 81), (81, 25), (81, 225), (225, 81)\}\,.\end{aligned}$$

Kako su m i n prirodni brojevi traženi uređeni parovi su:

$$\begin{aligned}(m, n) \in \{&(1, 45), (45, 1)(3, 45), (45, 3), (5, 45), (45, 5), (9, 45), (45, 9),\\ &(15, 45), (45, 15), (45, 45), (5, 9), (9, 5), (9, 15), (15, 9)\}\,.\end{aligned}$$

(ukupno 15 uređenih parova). 3 boda

Napomena: U zadnjem koraku je moguće dobiti 1 bod ako učenik navede najmanje 6 uređenih parova koji slijede iz prethodnog koraka, a 2 boda ako navede bar 12 točnih uređenih parova.

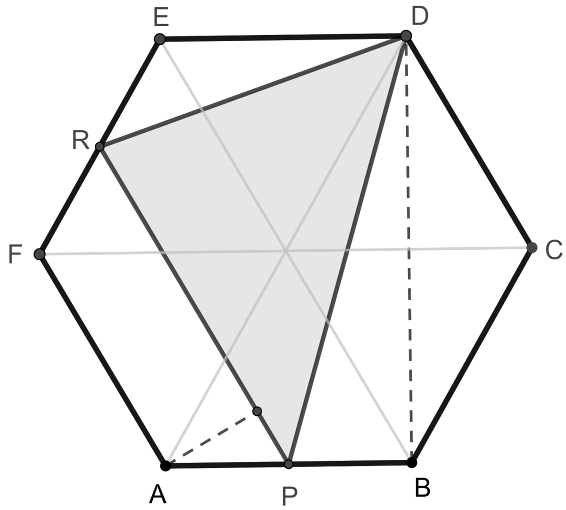
Ako nigdje nije vidljivo da učenik određuje najmanji zajednički višekratnik perioda dviju funkcija, odnosno brojeva m^2, n^2 i nije odredio skup svih mogućih m^2 i n^2, onda može dobiti 4 boda za određivanje perioda funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ i još 1 bod za ispitivanje nekih mogućih slučajeva i 1 bod za određivanje najmanje 6 točnih uređenih parova (m, n) (ukupno najviše 6 bodova).

Ako učenik zaboravi podijeliti temeljni period funkcije apsolutne vrijednosti s 2, određivat će najmanji zajednički višekratnik od $2m^2\pi$ i $n^2\pi$ koji bi trebao biti 2025π, što je nemoguće jer je $2m^2$ sigurno paran broj. U tom slučaju učenik može dobiti maksimalno 6 bodova (ako je uočio da se radi o apsolutnoj vrijednosti, da traži najmanji zajednički višekratnik brojeva $2m^2$ i n^2 te ako je i napisao zaključak da ne postoje takvi prirodni brojevi jer 2025 nije paran, a $2m^2$ je paran broj).

Zadatak B-3.4.

Neka je $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ pravilna uspravna šesterostrana prizma u kojoj je točka P polovište brida $\overline{AB}$, a točka R polovište brida $\overline{EF}$. U kojemu su omjeru obujam piramide $DRPE'$ i obujam zadane prizme?

Rješenje.



Skicirajmo bazu prizme, pravilini šesterokut $ABCDEF$ i označimo točke P i R. Označimo duljinu osnovnog brida prizme $|AB| = a$ i sa h duljinu visine prizme i piramide. Tada je površina baze prizme

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}.$$ 1 bod

Površina baze piramide jednaka je površini trokuta DRP i može se izračunati kao razlika površine baze prizme i zbroja površina trapeza $APRF$, četverokuta $BCDP$ i trokuta DER.

Četverokut $APRF$ je jednakokračan trapez (jer je $\overline{PR}$ srednjica trapeza $ABEF$ i stoga je $PR \parallel AF$ i duljine $|PR| = \frac{3}{2}a$) čija je visina jednaka visini jednakostraničnog trokuta duljine stranice $|AP| = \frac{a}{2}$ pa je njegova površina jednaka

$$P_{APRF} = \frac{a + |PR|}{2} \cdot \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a + \frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{16}a^2\sqrt{3}.$$ 2 boda

Četverokut $BCDP$ može se podijeliti na jednakokračni trokut BCD i pravokutni trokut BDP. Unutrašnji kutovi jednakokračnog trokuta BCD su $120°$, $30°$ i $30°$, pa je njegova površina jednaka površini jednakostraničnog trokuta čija je stranica duljine a, tj. $P_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Površina pravokutnog trokuta BDP jednaka je $P_{BDP} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Stoga je površina $P_{BCDP} = P_{BCD} + P_{BDP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Površina trokuta DER jednaka je $P_{DER} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot \sin 120°}{2} = \frac{a^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 1 bod

Konačno, površina baze piramide, odnosno površina trokuta DRP jednaka je

$$\begin{aligned} P_{DRP} &= B - (P_{APRF} + P_{BCDP} + P_{DER}) = \\ &= \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - \left(\frac{5}{16}a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$ 1 bod

Obujam piramide $DRPE'$ jednak je

$$V_{\text{piramida}} = \frac{1}{3} \cdot P_{DRP} \cdot h = \frac{3}{16}a^2\sqrt{3}h.$$ 1 bod

Obujam prizme jednak je $V_{\text{prizma}} = B \cdot h = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}h$. **1 bod**

Traženi omjer obujma piramide i prizme jest

$$\frac{V_{\text{piramida}}}{V_{\text{prizma}}} = \frac{\frac{3}{16}a^2\sqrt{3}h}{\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}h} = \frac{1}{8}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Napomena: Učenik ne mora posebno računati obujmove prizme i piramide. Budući da imaju iste visine, mogu zaključiti da je obujam piramide jednak trećini obujma prizme s istom bazom DRP. Stoga je dovoljno izračunati omjer površina trokuta DRP i šesterokuta $ABCDEF$ i podijeliti s tri.

Osim na prikazani način, učenik može i na druge načine izračunati površinu trokuta DRP i taj račun ako je potpuno točan nosi **6 bodova** (na primjer može izračunati $|PR| = \frac{3}{2}a$, $|RD| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $|DP| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, svaka ta udaljenost po **1 bod** plus računanje površine Heronovom formulom ili nekom drugom metodom **3 boda**).

Zadatak B-3.5.

Martin je na rasprodaji potrošio 972 € kupivši ukupno 42 videoigre za svoju tek otvorenu igraonicu videoigara na igraćim konzolama 1 i 2. Sve su videoigre za igraću konzolu 1 imale identičnu cijenu, koja je izražena u eurima prirodni broj. Videoigre za igraću konzolu 2 prodavale su se po 6 € nižoj cijeni od cijene videoigara za igraću konzolu 1. Koliko je videoigara za igraću konzolu 1 mogao kupiti Martin i po kojoj cijeni ako se zna da je kupio više videoigara za igraću konzolu 2?

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake:

$m =$ broj kupljenih videoigara za igraću konzolu 1
$n =$ broj kupljenih videoigara za igraću konzolu 2
$c =$ cijena po kojoj su se prodavale videoigre za igraću konzolu 1
$c - 6 =$ cijena po kojoj su se prodavale videoigre za igraću konzolu 2

Prema uvjetima u zadatku vrijedi da je $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$. **1 bod**

Ukupan broj kupljenih videoigara kao i cijena koja je za njih plaćena modelira se sustavom jednadžbi

$$m + n = 42 \qquad (1) \qquad \textbf{1 bod}$$
$$m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. \qquad (2) \qquad \textbf{1 bod}$$

Iz jednadžbe (2) redom slijedi:

$$\begin{aligned} mc + nc - 6n &= 972 \\ (m+n)c - 6n &= 972 \\ 42c - 6n &= 972 \qquad \Big/ : 6 \\ 7c - n &= 162, \qquad \text{odnosno} \qquad 7c = 162 + n. \end{aligned} \qquad \textbf{1 bod}$$

Zaključujemo da $162 + n$ mora biti višekratnik broja 7. 1 bod
Budući da je $m < n$ i $42 = m + n < 2n$ slijedi da je $n > 21$, odnosno $22 \leqslant n \leqslant 42$.
Sada se lako provjeri da je $162+n$ višekratnik broja 7 jedino za brojeve $n \in \{27, 34, 41\}$. 2 boda
Iz sustava jednadžbi (1) i (2) imamo sljedeće mogućnosti:

$$\text{za } n = 27 \Rightarrow m = 15 \Rightarrow c = 27, \quad \text{1 bod}$$
$$\text{za } n = 34 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow c = 28, \quad \text{1 bod}$$
$$\text{za } n = 41 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow c = 29. \quad \text{1 bod}$$

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28€ za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Drugo rješenje.

Uvodimo iste oznake kao i u prvom rješenju postavljajući identične uvjete $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$. 1 bod
Također kao i u prvom rješenju matematički model je sustav jednadžbi

$$m + n = 42 \qquad (3) \quad \text{1 bod}$$
$$m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. \qquad (4) \quad \text{1 bod}$$

Sređivanjem jednadžbe (4) redom slijedi

$$\begin{aligned} m \cdot c + (42 - m) \cdot (c - 6) &= 972 \\ mc + 42c - 252 - mc + 6m &= 972 \\ 42c + 6m &= 1224 \quad \Big/ : 6 \\ 7c + m &= 204 \quad \text{odnosno} \quad 7c = 204 - m. \end{aligned} \quad \text{1 bod}$$

Zaključujemo $204 - m$ mora biti višekratnik broja 7. 1 bod
Budući da je $m < n$ i $42 = m + n > 2m$ slijedi da je $m < 21$, odnosno $0 \leqslant m \leqslant 20$.
Sada se lako provjeri da je $204-m$ višekratnik broja 7 jedino za brojeve $m \in \{1, 8, 15\}$. 2 boda
Iz sustava jednadžbi (3) i (4) imamo sljedeće mogućnosti:

$$\text{za } m = 15 \Rightarrow c = 27, \quad \text{1 bod}$$
$$\text{za } m = 8 \Rightarrow c = 28, \quad \text{1 bod}$$
$$\text{za } m = 1 \Rightarrow c = 29. \quad \text{1 bod}$$

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28€ za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Treće rješenje.

Uvodimo iste oznake kao i u prvom rješenju postavljajući identične uvjete $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$. 1 bod
Također kao i u prvom rješenju matematički model je sustav jednadžbi

$$m + n = 42 \qquad (5) \quad \text{1 bod}$$
$$m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. \qquad (6) \quad \text{1 bod}$$

Riješimo li ovaj sustav jednadžbi po nepoznanicama m i n dobit ćemo

$$m = -7c + 204 \quad \text{i} \quad n = 7c - 162. \tag{7}$$ 1 bod

Prema uvjetu u zadatku $m \geqslant 0$ pa je

$$-7c + 204 \geqslant 0, \text{ odakle slijedi da je } c \leqslant 29.$$ 1 bod

Iz uvjeta da je $m < n$ slijedi da je

$$-7c + 204 < 7c - 162, \quad \text{odnosno} \quad c \geqslant 27.$$ 1 bod

Dakle, $c \in \{27, 28, 29\}$. 1 bod
Tada iz (7) slijedi

za $c = 27 \Rightarrow m = 15$, 1 bod
za $c = 28 \Rightarrow m = 8$, 1 bod
za $c = 29 \Rightarrow m = 1$. 1 bod

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28 € za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Napomena: Ako učenik zadatak rješava isključivo metodom pogađanja, za svako pogođeno rješenje dodijeliti po 1 bod, tj. pogađanjem rješenja može dobiti najviše 3 boda.

Ako učenik djelomično modelira jednadžbama pa potom prijeđe na metodu pogađanja dodijeliti za svako pogođeno rješenje po 1 bod kao i one bodove koji mu po bodovnoj shemi pripadaju za pojedini zaključak koji je zapisao.

Da bi učenik dobio 1 bod za uvjete ne mora nužno zapisati uvjet $c > 6$, niti je nužno da uvjete navodi na početku rješavanja. Dovoljno je da u tijeku rješavanja jasno koristi činjenicu da su dane veličine m, n, c cijeli brojevi (nenegativni) i da je $m < n$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Koliko ima kompleksnih brojeva z kojima su realni i imaginarni dio cijeli brojevi i za koje vrijedi

$$\operatorname{Im}(z^2+1) \geqslant 2(\operatorname{Im} z)^2$$
$$|z-i| < 3\,?$$

Rješenje.

Neka je $z = x + yi$. Tada je

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ i } z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi.$$ 1 bod

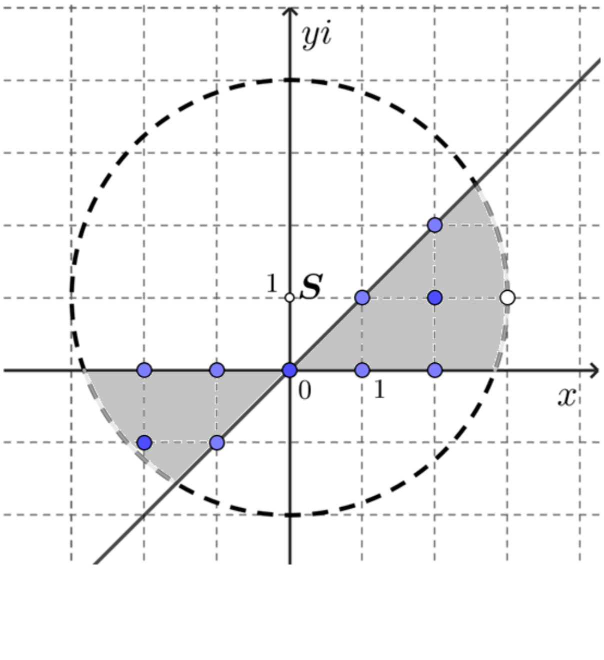
Tada nejednakost $\operatorname{Im}(z^2+1) \geqslant 2(\operatorname{Im} z)^2$ prelazi u $2xy \geqslant 2y^2$, odnosno $y^2 - xy \leqslant 0$. Iz $y(y-x) \leqslant 0$ slijede dvije mogućnosti 1 bod 1 bod

$$\begin{cases} y \leqslant 0 \\ y \geqslant x \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant x \end{cases}, \qquad (\star)$$

što je u koordinatnom sustavu dio ravnine između osi x i pravca $y = x$. 2 boda

Druga nejednakost $|z - i| < 3$ za $z = x + yi$ prelazi u nejednadžbu $x^2 + (y-1)^2 < 9$, što je u koordinatnom sustavu otvoreni krug sa središtem $S(0,1)$ i polumjerom $r = 3$. 1 bod

Traženi skup točaka prikazan je na sljedećoj slici.



2 boda

Za točke (x,y) s cjelobrojnim koordinatama koje su unutar danog kruga vrijedi $-3 < x < 3$, $-2 < y < 4$. Sa skice i direktnom provjerom uvjeta iz $(\star)$ dobivamo 10 točaka s cjelobrojnim koordinatama koje pripadaju skiciranom skupu. Dakle, traženih kompleksnih brojeva ima 10. 2 boda

Napomena: Učenik može i bez geometrijskog prikaza traženog skupa kompleksnih brojeva doći do rješenja. Nakon navođenja svih uvjeta za x i y može direktnom provjerom tih uvjeta ispisati sve tražene uređene parove cijelih brojeva. U tom slučaju treba dodijeliti sve predviđene bodove ako je jasno da je proveden postupak provjere uvjeta.

Napomena: Zadatak se može riješiti i koristeći trigonometrijski zapis kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Prva se nejednadžba tada svodi na nejednadžbu $r^2 \sin(2\varphi) \geqslant 2r^2 \sin^2\varphi$ (2 boda), iz koje slijedi:

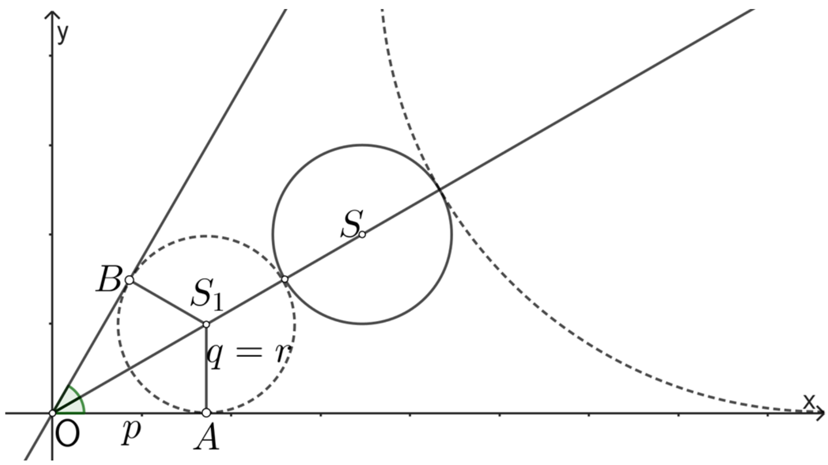
$$\left\{\begin{array}{c}\sin\varphi \geqslant 0\\ \cos\varphi \geqslant \sin\varphi\end{array}\right. \quad \text{ili} \quad \left\{\begin{array}{c}\sin\varphi \leqslant 0\\ \cos\varphi \leqslant \sin\varphi\end{array}\right. \quad \text{(1 bod)}, \tag{$\star$}$$

Rješavanjem ovih sustava nejednadžbi za argument se dobije $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$. Pripadni kompleksni brojevi z su dakle u Gaussovoj ravnini između osi x i pravca $y = x$ (2 boda). Druga nejednadžba u Gaussovoj ravnini ponovno određuje otvoreni krug polumjera $r = 3$ sa središtem u točki $S(0,1)$ (1 bod). Daljnji postupak i bodovanje je isto kao u navedenom rješenju.

Zadatak B-4.2.

Odredi koordinate središta i polumjer kružnice koja dira os x, pravac s jednadžbom $y = \sqrt{3}x$ i kružnicu s jednadžbom $(x - 10\sqrt{3})^2 + (y - 10)^2 = 25$.

Rješenje.



Skica

Neka tražena kružnica k ima središte u točki $S(p,q)$ i polumjer r. Budući da kružnica k dira zadani pravac i os x, njezino je središte od zadanog pravca i osi x udaljeno za r te se nalazi na simetrali kuta $\varphi = \sphericalangle AOB$ kojeg zadani pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x. 1 bod

Kako je $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^\circ$, slijedi da je $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{q}{p}$. $(\star)$. 2 boda

Zbog uvjeta da kružnica k dira zadanu kružnicu $(x - 10\sqrt{3})^2 + (y - 10)^2 = 25$ vrijedi da je $|S_1 S| = r + 5$, odnosno $(10\sqrt{3} - p)^2 + (10 - q)^2 = (r + 5)^2$. 2 boda

Kako je $q = r$ i zbog $(\star)$ je $p = \sqrt{3}q$, prethodna jednakost prelazi u jednadžbu s jednom nepoznanicom. Slijedi redom:

$$\begin{aligned}(10\sqrt{3} - \sqrt{3}q)^2 + (10 - q)^2 &= (q + 5)^2 \\ 4(10 - q)^2 &= (q + 5)^2.\end{aligned}$$ 1 bod

Tada je $2(10 - q) = q + 5$ ili $2(10 - q) = -q - 5$, odnosno $q_1 = 5$ i $q_2 = 25$. 2 boda

Tada je $p_1 = 5\sqrt{3}$ i $p_2 = 25\sqrt{3}$. Dakle, tražena kružnica može imati središte u točki $S_1(5\sqrt{3}, 5)$ i polumjer $r_1 = 5$ ili u točki $S_2(25\sqrt{3}, 25)$ i polumjer $r_2 = 25$. 2 boda

Zadatak B-4.3.

Brojevi a_1, a_2, a_3, ... čine aritmetički niz, pri čemu je $a_1 \neq a_2$. Tri člana istoga niza, a_2, a_5 i a_9, čine geometrijski niz tim redoslijedom. Odredi najmanje moguće pozitivne cijele brojeve k i l za koje i brojevi a_3, a_k, a_l također čine geometrijski niz tim redoslijedom.

Rješenje.

Neka je prvi član aritmetičkog niza a i neka je d njegova razlika. Tada je opći član tog niza jednak $a_n = a + (n - 1)d$. Za geometrijski niz a_2, a_5, a_9 vrijedi redom

$$(a + 4d)^2 = (a + d)(a + 8d)$$ 2 boda

$$\begin{aligned}a^2 + 8ad + 16d^2 &= a^2 + 9ad + 8d^2 \\ ad &= 8d^2.\end{aligned}$$ 1 bod

Kako je prema uvjetima zadatka $d \neq 0$ slijedi da je $a = 8d$. 1 bod

Tada je opći član zadanog niza jednak

$$a_n = 8d + (n - 1)d = (7 + n)d. \qquad (\star)$$ 1 bod

Za geometrijski niz a_3, a_k, a_l vrijedi $a_k^2 = a_3 \cdot a_l$, $3 < k < l$ pa primijenimo li $(\star)$ dobit ćemo 1 bod

$$\begin{aligned}(7 + k)^2 d^2 &= 10d(7 + l)d \\ (7 + k)^2 &= 10(7 + l).\end{aligned}$$ 2 boda

Zaključujemo da $7 + k$ mora biti višekratnik od 10. 1 bod

Za $k = 3$ dolazimo do suprotnosti s uvjetom $3 < k < l$.

Za $k = 13$ slijedi $l = 33$ što zadovoljava uvjet zadatka. Stoga su traženi brojevi $k = 13$, $l = 33$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

Odredi $f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)$.

Rješenje.

Faktorizirajmo izraze pod korijenom u nazivniku zadane funkcije:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

1 bod

Proširivanjem razlomka s $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$ dobit ćemo u nazivniku razliku kubova:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(x+1)-(x-1)}.$$

2 boda

Konačno, zadana funkcija ima sljedeći oblik:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$$

1 bod

Uvrštavanjem redom brojeva 1, 2, …, 2025 za x slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
2f(1)&=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}\\
2f(2)&=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1}\\
2f(4)&=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\\
&\vdots\\
2f(2023)&=\sqrt[3]{2024}-\sqrt[3]{2022}\\
2f(2024)&=\sqrt[3]{2025}-\sqrt[3]{2023}\\
2f(2025)&=\sqrt[3]{2026}-\sqrt[3]{2024}
\end{aligned}$$

3 boda

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$2\left(f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)\right)=\sqrt[3]{2026}+\sqrt[3]{2025}-\sqrt[3]{1}.$$

Stoga je traženi zbroj jednak

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2026}+\sqrt[3]{2025}-1).$$

3 boda

Zadatak B-4.5.

Riješi jednadžbu $x^7+1=(x+1)^7$ u skupu kompleksnih brojeva.

Rješenje.

Ako desnu stranu zadane jednadžbe raspišemo po binomnoj formuli dobit ćemo

$$x^7+1=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1. \qquad \text{1 bod}$$

Nakon toga ćemo zapisati jednadžbu u pogodnijem obliku kako slijedi:

$$\begin{gathered} 7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x=0 \quad / :7 \\ x^6+3x^5+5x^4+5x^3+3x^2+x=0 \\ x\left(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right)=0. \end{gathered} \qquad \text{1 bod}$$

Zaključujemo da je jedno rješenje jednadžbe $x_1=0$. 1 bod

Preostala ćemo rješenja dobiti rješavanjem simetrične jednadžbe 5. stupnja

$$x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1=0.$$

Ona se može napisati u obliku

$$(x^5+x^4+2x^4)+(2x^3+3x^3+3x^2)+(2x^2+3x+1)=0$$

iz čega slijedi da je

$$x^4(x+1)+2x^3(x+1)+3x^2(x+1)+(2x+1)(x+1)=0,$$

odnosno

$$(x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)=0. \qquad \text{2 boda}$$

Tada je $x+1=0$ ili $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$. Iz $x+1=0$ slijedi drugo rješenje $x_2=-1$. 1 bod

Preostaje još riješiti simetričnu jednadžbu četvrtog stupnja $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$. Faktorizirajmo izraz s lijeve strane:

$$\begin{aligned} x^4+2x^3+3x^2+2x+1 &= (x^4+x^2+1)+(2x^3+2x^2+2x) \\ &= (x^4+2x^2+1-x^2)+2x(x^2+x+1) \\ &= ((x^2+1)^2-x^2)+2x(x^2+x+1) \\ &= (x^2-x+1)(x^2+x+1)+2x(x^2+x+1) \\ &= (x^2+x+1)(x^2-x+1+2x)=(x^2+x+1)^2. \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Zaključujemo da su preostala rješenja jednaka $x_{3,4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_{5,6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 2 boda

Napomena: Učenik može doći do rješenja simetrične jednadžbe petog stupnja $x_2=-1$ na bilo koji način, drukčijim raspisom ili pogađanjem. Navođenje tog rješenja donosi 1 bod, a točna faktorizacija polinoma 2 boda.

Također, ako se simetrična jednadžba četvrtog stupnja točno riješi na neki drugi način, postupak se isto boduje s 2 boda plus 2 boda za rješenja.