

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

17. ožujka 2025.

**Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.**

## Zadatak OŠ-4.1.

Vito, Marko, Ivan i Stipe žele popuniti svatko svoj album sa sličicama.

- Vito, Stipe, Marko i Ivan ukupno u svojim albumima imaju 2025 sličica.
- Vito, Marko i Ivan ukupno u svojim albumima imaju 1520 sličica.
- Vito u albumu ima pet puta manje sličica od Stipe.
- Marko u albumu ima 205 sličica više od Stipe.

Ako se u album može zalijepiti najviše 799 sličica, koliko sličica nedostaje Ivanu da popuni cijeli album?

## Rješenje.

Iz prve dvije tvrdnje zaključujemo da Stipe ima  $2025 - 1520 = 505$  sličica. 3 boda

Iz treće tvrdnje slijedi da Vito ima  $505 : 5 = 101$  sličicu. 2 boda

Iz četvrte tvrdnje slijedi da Marko ima  $505 + 205 = 710$  sličica. 2 boda

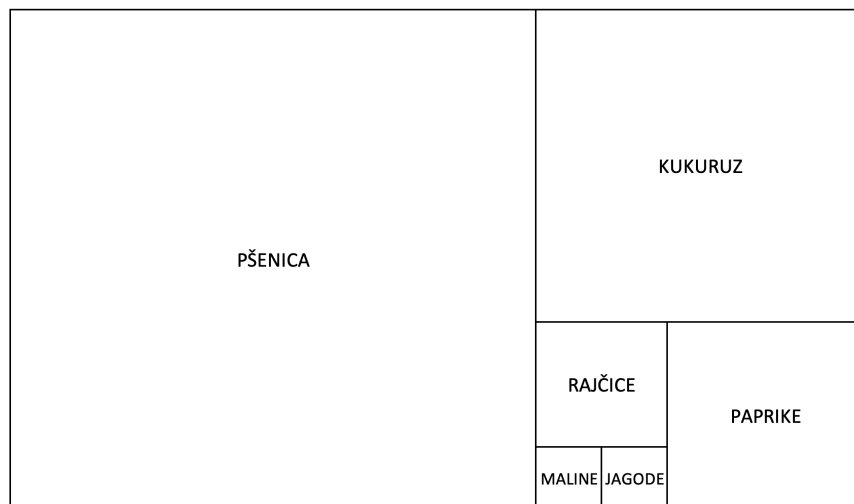
Iz druge tvrdnje zaključujemo da Ivan ima  $1520 - 101 - 710 = 709$  sličica. 2 boda

Za popuniti album Ivanu nedostaje  $799 - 709 = 90$  sličica. 1 bod

**Napomena:** Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, grafički ili simbolima (jednadžbama).  
Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

### Zadatak OŠ-4.2.

Nikola ima vrt oblika pravokutnika koji je podijelio na šest manjih dijelova oblika kvadrata, kao na slici. Na najvećemu dijelu posadit će pšenicu, na sljedećemu po veličini kukuruz, nakon toga paprike, pa rajčice te na najmanjim površinama maline i jagode. Dio vrta na kojemu su posađene jagode ima opseg 16 metara. Nikola želi postaviti ogradu duž cijelog ruba vrta i između dijelova vrta. Koliko mu je najmanje metara ograde za to potrebno?



#### Prvo rješenje.

Dio vrta s jagodama kvadratnog je oblika i opsega 16 metara pa je duljina stranice toga kvadrata  $16 : 4 = 4$  metra.

1 bod

Odredimo duljine stranica preostalih dijelova vrta redom od manjih prema većima. Dio vrta s malinama i dio vrta s jagodama imaju zajedničku stranicu pa je stranica dijela vrta s malinama također duljine 4 metra.

Stranica dijela vrta s rajčicama ima istu duljinu kao stranice dijelova vrta s jagodama i malinama zajedno, pa ima duljinu  $4 + 4 = 8$  metara.

1 bod

Na sličan način određujemo duljine stranica ostalih dijelova vrta.

Dio vrta	Duljina stranice u metrima
Jagode	4
Maline	4
Rajčice	$4 + 4 = 8$
Paprike	$4 + 8 = 12$
Kukuruz	$8 + 12 = 20$
Pšenica	$4 + 8 + 20 = 32$

2 boda

Duljina cijelog vrta odgovara duljini dijela s kukuruzom i pšenicom tj.  $20 + 32 = 52$  metra. Širina cijelog vrta odgovara duljini dijela s pšenicom tj. 32 metra,

1 bod

pa duljina ograde potrebne za vanjske rubove vrta iznosi  $2 \cdot (32 + 52) = 168$  metara.

2 boda

Za odvajanje dijelova vrta, Nikola treba redom dodati četvrtu stranicu svakog dijela vrta, osim onog s jagodama, od većeg prema manjem (prvo četvrtu stranicu za dio sa pšenicom, pa s kukuruzom itd. sve do četvrte stranice dijela s malinama).

Za to mu je potrebno još  $32 + 20 + 12 + 8 + 4 = 76$  metara ograde.

2 boda

Nikoli je ukupno potrebno  $168 + 76 = 244$  metra ograde.

1 bod

**Napomena:** Ako učenik, nakon određivanja duljina stranica svih dijelova vrta, ispravno odredi opseg vrta na neki drugi način nego što je prikazano u rješenju dodijeliti 3 boda. U slučaju jedne računске pogreške uz ispravnu strategiju (npr. ispravnu formulu za opseg pravokutnika ili zbrajanjem svih duljina stranica dijelova vrta uz rub) dodijeliti 2 boda. U slučaju dvije ili više računskih pogrešaka dodijeliti 0 bodova. Ako učenik ispravno odredi duljinu ili širinu vrta, ali nema strategiju za računanje opsega cijelog vrta treba dobiti 1 bod.

### Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo duljine stranica svih dijelova vrta.

4 boda

Opseg svih dijelova vrta iznosi

$$4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 32 = 4 \cdot (4 + 4 + 8 + 12 + 20 + 32) = 4 \cdot 80 = 320 \text{ m.}$$

2 boda

Pritom smo dijelove ograde koji odvajaju dijelove vrta računali dva puta, pa ih moramo oduzeti.

Za odvajanje dijelova vrta, koristimo četvrtu stranicu svakog dijela vrta od većeg prema manjem (prvo četvrtu stranicu za dio sa pšenicom, pa s kukuruzom itd. sve do četvrte stranice dijela s malinama).

Za to je potrebno još  $32 + 20 + 12 + 8 + 4 = 76$  metara ograde.

2 boda

Nikoli je ukupno potrebno  $320 - 76 = 244$  metra ograde.

2 boda

### Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo duljine stranica svih dijelova vrta.

4 boda

Na opseg dijela vrta s jagodama od 16 metara pribrajamo duljine po tri stranice od svakog sljedećeg dijela vrta (od manjih prema većima), tj. najmanja duljina ograde koja je potrebna Nikoli iznosi

$$16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 32.$$

4 boda

Budući da vrijedi

$$16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 32 = 16 + 3 \cdot (4 + 8 + 12 + 20 + 32) = 16 + 3 \cdot 76 = 16 + 228 = 244,$$

Nikoli će trebati ukupno 244 metra za potrebne ograde.

2 boda

### Zadatak OŠ-4.3.

Odredi sve troznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica za 3 veća ili za 3 manja od znamenke jedinica, a znamenka stotica za 3 veća ili za 3 manja od znamenke desetica.

#### Prvo rješenje.

Neka je  $a$  znamenka stotica,  $b$  znamenka desetica te  $c$  znamenka jedinica troznamenkastog broja  $\overline{abc}$ . Da bismo bili sigurni da smo odredili sve tražene brojeve ispisujemo ih redom prema znamenki stotica.

$a$	$b$	$c$	$\overline{abc}$
1	4	1 ili 7	141, 147
2	5	2 ili 8	252, 258
3	0	3	303
	6	3 ili 9	363, 369
4	1	4	414
	7	4	474
5	2	5	525
	8	5	585
6	3	0 ili 6	630, 636
	9	6	696
7	4	1 ili 7	741, 747
8	5	2 ili 8	852, 858
9	6	3 ili 9	963, 969

10 bodova

#### Drugo rješenje.

Zapišimo sve tražene brojeve gledajući slučajeve koja znamenka je najveća (i koja je najmanja).

Odredimo prvo sve brojeve u kojima je znamenka jedinica najmanja, a znamenka stotica najveća. To su brojevi 963, 852, 741, 630.

Odredimo brojeve u kojima je znamenka jedinica najveća, a znamenka stotica najmanja. To su brojevi 147, 258, 369.

Još je moguće da znamenke stotica i jedinica budu jednake, a znamenka desetica veća ili manja od njih.

Brojevi kod kojih je znamenka desetica manja su 969, 858, 747, 636, 525, 414, 303.

Brojevi kod kojih je znamenka desetica veća su 141, 252, 363, 474, 585, 696.

10 bodova

**Napomena:** Dokaz da nema drugih rješenja sastoji se u sustavnoj organizaciji slučajeva koja može biti vidljiva iz poretka kojim učenik ispisuje brojeve i ne mora biti opisana riječima. Svaka dva tražena broja vrednovati kao 1 bod. Neparan broj rješenja zaokruživati na manji cijeli broj bodova. Ako učenik ispiše i suvišna (netočna) rješenja za svaka dva netočna broja oduzimati 1 bod.

#### Zadatak OŠ-4.4.

Na ploči je nacrtan niz od 166 krugova. Ana je upisala slovo A u prvi i četvrti krug na lijevoj strani niza, te dalje u svaki treći krug slijeva nadesno. Bruno je upisao slovo B u prvi i treći krug na desnoj strani niza, te dalje u svaki drugi krug zdesna nalijevo. Koliko ima krugova u kojima su napisana oba slova, a u koliko krugova nije napisano ni slovo A ni slovo B?

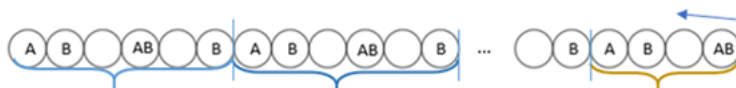
#### Prvo rješenje.

Na ploči je 166 krugova. Ana je napisala slovo A u prvi krug i redom u svaki treći krug. Uočimo da je  $166 : 3 = 55$  i ostatak 1, što znači da je u posljednjem krugu slovo A. Nakon što je Ana napisala sva slova niz izgleda ovako:



2 boda

Bruno je krenuo iz suprotnog smjera i u svaki drugi krug napisao slovo B. Nakon što je Bruno napisao sva slova niz izgleda ovako:



2 boda

Uočimo šestorku koja se ponavlja (A, B, 0, AB, 0, B).

2 boda

Budući da je  $166 : 6 = 27$  i ostatak 4, takvih šestorki ima 27.

1 bod

Posljednja četiri kruga su popunjena slovima (A, B, 0, AB).

1 bod

Krug sa slovima AB se pojavljuje jednom u svakoj šestorki i u posljednjoj četvorki.

Dakle, oba slova AB su napisana u  $27 \cdot 1 + 1 = 28$  krugova.

1 bod

Krugovi u kojima nije napisano nijedno slovo se u svakoj od 27 šestorki pojavljuju dva puta i jednom u ostatku, tj. u posljednjoj četvorki.

Dakle, broj krugova bez slova je  $27 \cdot 2 + 1 = 55$ .

1 bod

#### Drugo rješenje.

Slovo A se nalazi na 1., 4., 7., 10., 13., 16., 19., 22., ..., 166. mjestu.

Budući da je  $166 : 3 = 55$  i ostatak 1, slovo A se ukupno pojavljuje 56 puta.

1 bod

Slovo B se nalazi na 2., 4., 6., 8., 10., 12., 14., 16., 18., 20., 22., 24., ..., 166. mjestu.

Budući da je  $166 : 2 = 83$ , slovo B se ukupno pojavljuje 83 puta.

1 bod

Zaključujemo da se slova A i B zajedno nalaze na 4., 10., 16., 22., ..., 166. mjestu.

2 boda

Budući da je  $166 : 6 = 27$  i ostatak 4, slova A i B se u istom krugu pojavljuju 28 puta.

2 boda

Samo slovo A se u krugu pojavljuje  $56 - 28 = 28$  puta.

1 bod

Samo slovo B se u krugu pojavljuje  $83 - 28 = 55$  puta.

1 bod

Krugova s jednim ili dva slova imamo  $28 + 28 + 55 = 111$ .

1 bod

Praznih krugova je onda  $166 - 111 = 55$ .

1 bod

**Napomena:** Ako učenik nacрта 166 krugova i zadatak riješi brojanjem slova i praznih krugova, rezultate vrednovati analogno predloženom drugom rješenju. Tim načinom učenik uz točna rješenja može ostvariti 10 bodova.

### Zadatak OŠ-4.5.

Učiteljica je donijela u školu kutiju s bombonima. Ako svakoj djevojčici u razredu da po 3 bombona, a svakome dječaku po 2 bombona, učiteljici će ostati 7 bombona. Ako djevojčicama da po 2 bombona, a dječacima po 4 bombona, ostatak će joj biti 6 bombona. U razredu su 23 djeteta. Koliko je bombona u kutiji?

#### Prvo rješenje.

Jedan bombon označimo s •


Neka crveni pravokutnik (■) prikazuje broj bombona koje bismo podijelili kada bi svaka djevojčica dobila jedan bombon. Ako učiteljica svakoj djevojčici daje po 3 bombona onda taj broj prikazujemo s tri crvena pravokutnika.

Neka bijeli pravokutnik (□) prikazuje broj bombona koje bismo podijelili kada bi svaki dječak dobio jedan bombon. Ako učiteljica svakom dječaku daje po 2 bombona onda taj broj prikazujemo s dva bijela pravokutnika.

Ukupan broj bombona možemo prikazati na sljedeća dva načina.

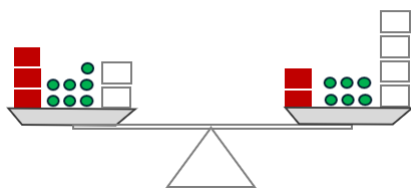
Prikaz prve raspodjele bombona: 

1 bod

Prikaz druge raspodjele bombona: 

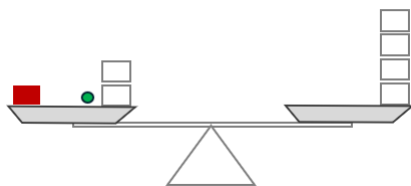
1 bod

Budući da u obje raspodjele imamo isti ukupan broj bombona, prikaze možemo staviti na različite strane vage tako da vaga bude u ravnoteži.



Ako iz oba prikaza uklonimo po dva crvena pravokutnika, jedan bijeli pravokutnik i šest bombona, vaga će i dalje biti u ravnoteži, odnosno dobit ćemo prikaze koji prikazuju isti broj bombona.

2 boda



- Na prvom prikazu ostaje jedan crveni pravokutnik, jedan bijeli pravokutnik i jedan bombon, a na drugom prikazu ostaju tri bijela pravokutnika. 1 bod
- Crveni i bijeli pravokutnik odgovaraju broju bombona koje bismo podijelili kada bi svaki učenik (djevojčica ili dječak) dobili po jedan bombon. Taj broj je jednak ukupnom broju učenika u razredu, što iznosi 23. 2 boda
- Stoga, jedan bombon, crveni i bijeli pravokutnik zajedno prikazuju 24 bombona, pa zaključujemo da i tri bijela pravokutnika prikazuju 24 bombona. 1 bod
- Jedan bijeli pravokutnik prikazuje  $24 : 3 = 8$  bombona, pa zaključujemo da je broj dječaka 8 (jer bijeli pravokutnik prikazuje broj bombona ako svaki dječak dobije jedan bombon). Broj djevojčica je  $23 - 8 = 15$ . 1 bod
- Ukupan broj bombona u kutiji je  $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$ . 1 bod
- Napomena:** Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, grafički ili simbolima (jednadžbama). Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

### Drugo rješenje.

- Ako bi u razredu bile samo djevojčice, onda bi prema prvoj raspodjeli bilo  $3 \cdot 23 + 7 = 76$  bombona, a prema drugoj raspodjeli  $2 \cdot 23 + 6 = 52$  bombona.
- Ako bi u razredu bile 22 djevojčice i 1 dječak, onda bi prema prvoj raspodjeli bilo  $3 \cdot 22 + 2 \cdot 1 + 7 = 75$  bombona, a prema drugoj raspodjeli  $2 \cdot 22 + 4 \cdot 1 + 6 = 54$  bombona.
- Smanjimo li broj djevojčica za 1 te povećamo broj dječaka za 1, broj bombona u prvoj raspodjeli će se smanjiti za 1 bombon, a u drugoj raspodjeli povećati za 2 bombona. 4 boda
- Dakle, smanjimo li broj djevojčica za 1, razlika između broja bombona u prvoj i drugoj raspodjeli se smanjuje za 3 bombona. 2 boda
- Kada nema dječaka ta razlika iznosi  $76 - 52 = 24$ . 1 bod
- Taj broj trebamo podijeliti sa 3 kako bismo dobili broj dječaka. 1 bod
- Stoga bi broj dječaka trebalo povećati za  $24 : 3 = 8$ . Tada će biti  $23 - 8 = 15$  djevojčica. 1 bod
- Ukupan broj bombona u kutiji je  $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$ . 1 bod
- Napomena:** Prva 4 boda, odnosno prvih 6 bodova, učenik dobiva ako uoči navedenu pravilnost za bilo koja dva broja djevojčica koja se razlikuju za 1. Preostala 4 boda nosi određivanje točnog rješenja.

### Treće rješenje.

- U zadatku su opisana dva načina raspodjele bombona. U prvoj raspodjeli (kada učiteljici ostane 7 bombona) dječaci dobivaju po 2 bombona, koliko i djevojčice u drugoj raspodjeli (kada učiteljici ostane 6 bombona). Djevojčice u prvoj raspodjeli dobivaju manji broj bombona nego dječaci u drugoj raspodjeli. U drugoj raspodjeli ostaje samo 1 bombon manje nego u prvoj raspodjeli, što je manje od broja bombona koji dobiva jedna osoba, pa možemo zaključiti da broj djevojčica mora biti veći od broja dječaka. 3 boda
- Promotrimo mogućnosti za broj djevojčica i dječaka u razredu i broj bombona koji dobivamo prema pojedinoj raspodjeli.

Broj djevojčica	Broj dječaka	Prva raspodjela	Druga raspodjela
12	11	$12 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 7 = 65$	$12 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 6 = 74$
13	10	$13 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 7 = 66$	$13 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 6 = 72$
14	9	$14 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 7 = 67$	$14 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 6 = 70$
<b>15</b>	<b>8</b>	<b><math>15 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 = 68</math></b>	<b><math>15 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 6 = 68</math></b>
16	7	$16 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 = 69$	$16 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 6 = 66$

4 boda

Nastavimo li povećavati broj djevojčica, ukupan broj bombona prema prvoj raspodjeli biti veći od 68. Nastavimo li povećavati broj djevojčica ukupan broj bombona prema drugoj raspodjeli bit će manji od 68. Dakle, nema drugih rješenja.

3 boda

Jedino moguće rješenje je da ima 15 djevojčica, 8 dječaka i 68 bombona.

**Napomena:** Odgovor da ima 68 bombona nosi 1 bod. Tvrdnja da je broj djevojčica 15 i broj dječaka 8 nosi 1 bod. Dokaz da ne postoji drugih rješenja nosi 8 bodova. Kao dokaz za 8 bodova priznaje se:

- provjera svih 24 slučajeve (broj djevojčica od 0 do 23);
- eliminacija nekih slučajeva argumentacijom (npr. broj djevojčica ne može biti paran, djevojčica mora biti više od dječaka itd.) i provjera preostalih slučajeva;
- tvrdnja: "Smanjimo li broj djevojčica za 1, te povećamo broj dječaka za 1, broj bombona u prvoj raspodjeli će se smanjiti za 1 bombon, a u drugoj raspodjeli povećati za 2 bombona. Stoga postoji samo jedno rješenje."

Učenik koji provjerom više od 4, a manje od 24 slučajeve, i bez dodatne argumentacije, dođe do rješenja (npr. ima samo tablicu iz prikazanog rješenja) ostvaruje 2 boda za dokaz i 2 boda za odgovor.

### Četvrto rješenje.

U zadatku su opisana dva načina raspodjele bombona. Prva raspodjela: Ako svakoj djevojčici u razredu da po 3 bombona, a svakom dječaku po 2 bombona, učiteljici će ostati 7 bombona. Druga raspodjela: Ako djevojčicama da po 2 bombona, a dječacima po 4 bombona, ostatak će joj 6 bombona.

Promotrimo na koji način bi učiteljica od prve raspodjele mogla napraviti drugu raspodjelu. Kako bi postigla drugu raspodjelu iz prve, učiteljica bi svakoj djevojčici i sebi trebala oduzeti po 1 bombon, a svakom dječaku dati još po 2 bombona. Tada svaka djevojčica i učiteljica dobiju dvostruko manje bombona od svakog dječaka. Zato je broj dječaka dvostruko manji od broja djevojčica s učiteljicom.

4 boda

Kako je broj djevojčica zajedno s učiteljicom jednak dvostrukom broju dječaka, ukupan broj osoba je jednak trostrukom broju dječaka.

2 boda

Ukupno imamo 23 djeteta te s učiteljicom imamo 24 osobe.

Taj broj treba podijeliti s 3 da bismo dobili broj dječaka.

2 boda

Stoga je broj dječaka  $24 : 3 = 8$ . Broj djevojčica je  $23 - 8 = 15$ .

1 bod

Ukupan broj bombona u kutiji je  $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$ .

1 bod