ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drukčiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo treba i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-5.1.

Tena je zamislila tri prirodna broja. Odredi sva tri broja ako je poznato sljedeće:

- prvi je broj najmanji parni četveroznamenkasti broj s različitim znamenkama
- drugi je broj najveći četveroznamenkasti broj s različitim neparnim znamenkama koji nije djeljiv s tri
- treći je broj jednak zbroju tri četvrtine prvoga i četiri sedmine drugoga broja.

Rješenje.

Kako bi prvi broj bio najmanji četveroznamenkasti broj s različitim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica redom su 1, 0 i 2. 2 boda

Znamenka jedinica mora biti 4 kako bi traženi broj bio paran, pa je prvi broj 1024. 1 bod

Zatim, kako bi drugi broj bio najveći četveroznamenkasti broj s različitim neparnim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica redom su 9, 7 i 5. 2 boda

Kako je $9 + 7 + 5 = 21$, znamenka jedinica ne smije biti 3 jer drugi broj nije djeljiv s 3, pa mora biti 1. Dakle, drugi broj je 9751. 2 boda

Odredimo još treći broj. Četvrtina prvog broja je $1024 : 4 = 256$, pa tri četvrtine prvog broja iznose $256 \cdot 3 = 768$. 1 bod

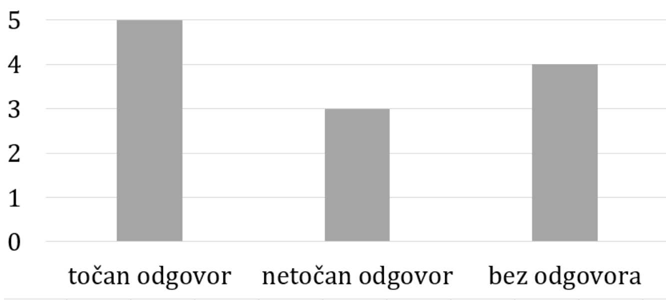
Sedmina drugog broja iznosi $9751 : 7 = 1393$, pa četiri sedmine drugog broja iznose $1393 \cdot 4 = 5572$. 1 bod

Konačno, treći je broj $768 + 5572 = 6340$. 1 bod

Napomena: Ako su pogrešno određeni prvi ili drugi broj, pri određivanju trećega broja učeniku se, od predviđena 3 boda, dodjeljuju najviše 2 boda na sljedeći način: 1 bod za određivanje tri četvrtine prvog broja ako je prvi broj djeljiv s 4, te 1 bod za određivanje četiri sedmine drugog broja ako je drugi broj djeljiv sa 7.

Zadatak OŠ-5.2.

Astra i Gea rješavale su ispit iz astronomije. Za svaki zadatak s točnim odgovorom daje se isti broj bodova. Za svaki zadatak bez odgovora oduzima se isti broj bodova. Za svaki zadatak s netočnim odgovorom oduzima se dvostruko više bodova nego za zadatak bez odgovora. Gea je u svim zadatcima dala točne odgovore i postigla 120 bodova. Astra je postigla ukupno 20 bodova te je dijagramom prikazano koliko je imala točnih i netočnih odgovora te na koliko zadataka nije dala odgovor. Koliko se bodova oduzima za svaki zadatak bez odgovora?



Prvo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5 + 3 + 4 = 12$ zadataka. 1 bod

Za svaki se zadatak s točnim odgovorom daje $120 : 12 = 10$ bodova. 1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5 \cdot 10 = 50$ bodova. 1 bod

Kako je postigla ukupno 20 bodova, $50 - 20 = 30$ bodova je izgubila na netočne odgovore i zadatke bez odgovora. 1 bod

Kako je na tri zadatka dala netočan odgovor i na još četiri nije odgovorila, za svaki netočan odgovor oduzima se manje od 10 bodova. Broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor mora biti paran; 2, 4, 6 ili 8 bodova. 2 boda

U tim slučajevima bi se za zadatak bez odgovora oduzimalo redom 1, 2, 3 ili 4 boda. 1 bod

bodovi koji se oduzimaju za netočan odgovor	2	4	**6**	8
bodovi koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora	1	2	**3**	4
ukupno se oduzima Astri za netočne odgovore	6	12	**18**	24
ukupno se oduzima Astri za zadatke bez odgovora	4	8	**12**	16
ukupno se oduzima Astri	10	20	**30**	40
	nemoguće	nemoguće	**moguće**	nemoguće

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda. 3 boda

Napomena: Za posljednja 3 boda potrebno je pokazati da je rješenje jedinstveno, tj. da nema drugih rješenja. To se može argumentirati uočavanjem rasta (pada) ukupnog broja bodova koji se oduzimaju Astri s obzirom na rast (pad) broja bodova koji se oduzimaju. Učenik može i pretpostaviti da je broj bodova prirodan broj (kao što je prikazano tablicom). Tada se za navedena tri nemoguća slučaja dodjeljuju 2 boda (1 bod za dva, 2 boda za sva tri slučaja), a 1 bod dodjeljuje se za mogući slučaj, odnosno rješenje zadatka.

Drugo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5+3+4=12$ zadataka. 1 bod

Za svaki se točan odgovor daje $120:12=10$ bodova. 1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5\cdot 10=50$ bodova. 1 bod

Neka je N broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor, a X broj bodova koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora.

Astra je postigla 20 bodova, pa je broj bodova koje je izgubila za netočne odgovore ili zadatke bez odgovora 30. 1 bod

Odnosno

$$3\cdot N+4\cdot X=30,$$ 2 boda

te $N=2\cdot X$. 1 bod

Stoga,

$$6X+4X=30$$ 1 bod

$$10X=30$$ 1 bod

$$X=3.$$ 1 bod

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda.

Zadatak OŠ-5.3.

Koliko ima prirodnih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ koji su djeljivi s 9, a čiji su ostatci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki?

Prvo rješenje.

Ostatak pri dijeljenju s 2 može biti 1 ili 0, a ostatak pri dijeljenju s 5 može biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Ako ostatci moraju biti međusobno jednaki, tada su to ostatci 0 i 1. 2 boda

I.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 i s 5 jednak 0, zaključujemo da je broj djeljiv s 10 i posljednja je znamenka traženoga broja $c=0$.

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2+0+2+5+a+b+0=9+a+b$, $9+a+b\in\{9,18,27\}$, tj. $a+b\in\{0,9,18\}$. 1 bod

Ako je $a+b=0$, tada je $a=b=0$. Takav je **jedan broj**.

Ako je $a+b=18$, tada je $a=b=9$. Takav je **jedan broj**. 1 bod

Ako je $a+b=9$, tada je $b=9-a$. S obzirom na to da a može biti bilo koja od 10 znamenaka, takvih je **deset brojeva**. 1 bod

II.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 jednak 1, znamenka je c neparna, tj. $c\in\{1,3,5,7,9\}$. Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 1, vrijedi $c\in\{1,6\}$.

Zaključujemo da vrijedi $c=1$. 1 bod

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2+0+2+5+a+b+1 = 10+a+b$, $10+a+b \in \{18, 27\}$, tj. $a+b \in \{8, 17\}$. 1 bod

Ako je $a+b=8$, tada je $b=8-a$, pa a može biti bilo koja znamenka osim 9. Takvih je **devet brojeva**. 1 bod

Ako je $a+b=17$, takva su **dva broja** jer je $a=8$ i $b=9$ ili $a=9$ i $b=8$. 1 bod

Ukupno traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Drugo rješenje.

Promatramo brojeve oblika $\overline{2025abc}$ koji su višekratnici broja 9 te provjeravamo zadovoljavaju li uvjete zadatka, odnosno jesu li im ostatci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki. Najmanji je broj koji promatramo 2025000, najveći 2025999, a među njima je 112 višekratnika broja 9 (to su brojevi oblika $2025000+9n$ za $n \in \{0, 1, \ldots, 111\}$). 2 boda

	broj	ostatak pri dijeljenju s 2	ostatak pri dijeljenju s 5	uvjeti zadovoljeni
1	**2025000**	**0**	**0**	**da**
2	2025009	1	4	ne
3	2025018	0	3	ne
4	2025027	1	2	ne
5	2025036	0	1	ne
6	2025045	1	0	ne
7	2025054	0	4	ne
8	2025063	1	3	ne
9	2025072	0	2	ne
10	**2025081**	**1**	**1**	**da**
11	**2025090**	**0**	**0**	**da**
12	2025099	1	4	ne
13	2025108	0	3	ne
14	2025117	1	2	ne
15	2025126	0	1	ne
16	2025135	1	0	ne
17	2025144	0	4	ne
18	2025153	1	3	ne
19	2025162	0	2	ne
20	**2025171**	**1**	**1**	**da**
21	**2025180**	**0**	**0**	**da**
22	2025189	1	4	ne
...	...	...	...	...
109	2025972	0	2	ne
110	**2025981**	**1**	**1**	**da**
111	**2025990**	**0**	**0**	**da**
112	2025999	1	4	ne

3 boda

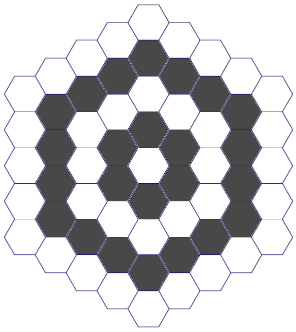
Uvjete zadovoljavaju 1., 10. i 11., 20. i 21., ... te 110. i 111. broj u tome nizu. 2 boda

Nakon prvoga broja imamo ukupno 11 parova, odnosno 22 broja. 2 boda

Ukupno traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Zadatak OŠ-5.4.

Na gradskome trgu postavljen je mozaik od jednakih pločica oblika pravilnoga šesterokuta. U prvome je koraku na središtu trga postavljena jedna bijela pločica. U drugome su koraku oko nje postavljene crne pločice, njih šest. U trećemu su koraku oko njih postavljene bijele pločice itd. U svakome su sljedećem koraku oko prethodno postavljenih pločica postavljene pločice druge boje, naizmjence bijele i crne boje. Slika prikazuje izgled mozaika nakon pet koraka.



Postupak je nastavljen na opisani način dok nije provedeno ukupno 2025 koraka. Time je mozaik dovršen. Za koliko je broj bijelih pločica u gotovome mozaiku veći od broja crnih pločica?

Prvo rješenje.

U prvome je koraku jedna bijela pločica, u trećemu je dodano $12 = 2 \cdot 6$, a u petomu $24 = 4 \cdot 6$ bijele pločice. 1 bod

Broj je bijelih pločica u 2025. koraku

$$1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + \ldots + 2024 \cdot 6.$$ 2 boda

U drugom je koraku oko prve bijele dodano $6 = 1 \cdot 6$, a u četvrtome $18 = 3 \cdot 6$ crnih pločica. 1 bod

Broj je crnih pločica u 2025. koraku

$$1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2023 \cdot 6.$$ 2 boda

Razlika je broja bijelih i broja crnih pločica:

$$1 + (2-1) \cdot 6 + (4-3) \cdot 6 + (6-5) \cdot 6 + \ldots + (2024-2023) \cdot 6 =$$ 2 boda

$$= 1 + 1012 \cdot 6 = 6073.$$ 2 boda

Napomena:

Učenik može izračunati ukupan broj bijelih pločica (6150937), 4 boda

broj crnih pločica (6144864), 4 boda

a zatim odrediti njihovu razliku (6073). 2 boda

Drugo rješenje.

U drugome koraku dodano je 6 crnih, u trećem 12 bijelih, u četvrtome 18 crnih, a u petom 24 bijelih pločica. 2 boda

U svakomu koraku nakon drugoga broj je dodanih pločica za 6 veći od broja dodanih pločica u prethodnome koraku. Stoga je razlika broja zadnje dodanih bijelih i prethodno dodanih crnih pločica uvijek 6. 2 boda

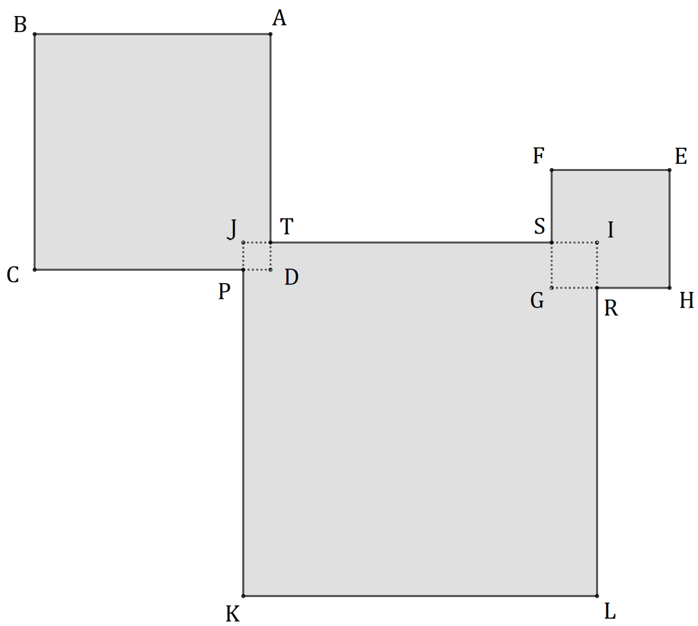
Crne i bijele pločice nakon prvog koraka dodavane su naizmjence 2024 puta (1012 puta bijele, a 1012 puta crne), 2 boda

što znači da je broj bijelih za $1012 \cdot 6 = 6072$ veći od broja crnih pločica. 2 boda

Nakon dodavanja jedne bijele pločice iz prvoga koraka u gotovome mozaiku ukupan broj bijelih pločica veći je od ukupnoga broja crnih pločica za $6072 + 1 = 6073$. 2 boda

Zadatak OŠ-5.5.

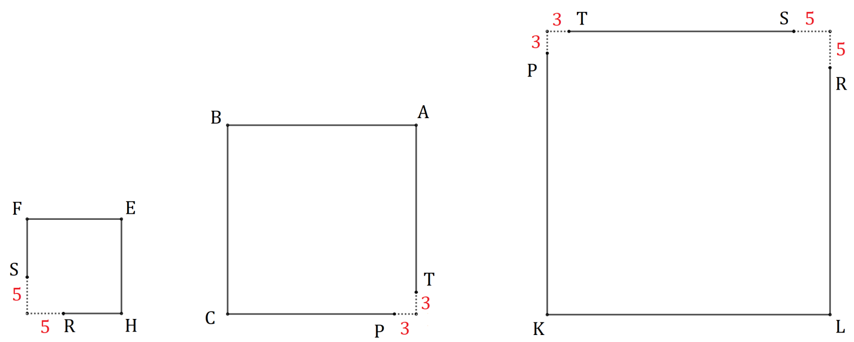
Na veliki papir zalijepljeni su kvadrati $ABCD$, $EFGH$ i $IJKL$, kao što je prikazano na slici. Stranica kvadrata $ABCD$ dva je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Stranica kvadrata $IJKL$ tri je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Točke u kojima se sijeku rubovi kvadrata točke su P, R, S i T. Presjek kvadrata $ABCD$ i $IJKL$ kvadrat je $TJPD$ površine 9. Presjek kvadrata $IJKL$ i $EFGH$ kvadrat je $ISGR$ površine 25. Ako je opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak 280, odredi površinu toga lika.



Prvo rješenje.

Kvadrat kojemu je površina 9 ima stranicu duljine 3, a kvadrat kojemu je površina 25 ima stranicu duljine 5. 1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Neka je x duljina stranice kvadrata $EFGH$. Tada su duljine stranica kvadrata $ABCD$ i $IJKL$ redom $2x$ i $3x$.

Opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju:

- opsega kvadrata $EFGH$ umanjenoga za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4x - 10$ 1 bod
- opsega kvadrata $ABCD$ umanjenoga za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9, odnosno $4 \cdot 2x - 6 = 8x - 6$ 1 bod
- opsega kvadrata $IJKL$ umanjenoga za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9 i duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4 \cdot 3x - 16 = 12x - 16$, 2 boda

tj. opsega sva tri kvadrata umanjenoga za 32

$$4x - 10 + 8x - 6 + 12x - 16 = 280$$

$$24x - 32 = 280$$
$$24x = 312$$
$$x = 13.$$

2 boda

Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9 + 25 = 34$, 1 bod

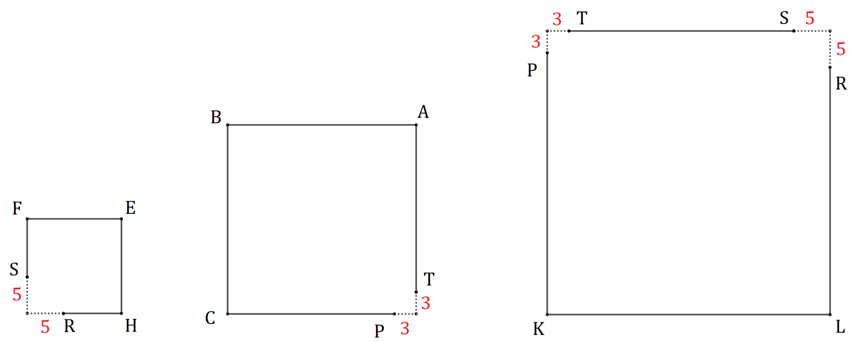
$$P = 13 \cdot 13 + 26 \cdot 26 + 39 \cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$

2 boda

Drugo rješenje.

Kako je presjek kvadrata $EFGH$ i $IJKL$ kvadrat čija je površina 25, odnosno čija je stranica duljine 5, zaključujemo da duljina stranica kvadrata $EFGH$ mora biti veća od 5. 1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Kako je $5+5+3+3+3+3+5+5=32$, opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju opsega sva tri kvadrata umanjenom za 32. 2 boda

Do rješenja se može doći promatranjem opsega kvadrata i opsega traženoga lika.

duljina stranice kvadrata			opseg kvadrata			opseg lika	
$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$	$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$	$ABCPKLRHEFST$	
6	12	18	24	48	72	112	premalo
7	14	21	28	56	84	136	premalo
...	...	...	...	...	...	...	...
12	24	36	48	96	144	256	premalo
13	26	39	52	104	156	**280**	✓
14	28	42	56	112	168	304	previše
15	30	45	60	120	180	328	previše
...	...	...	...	...	...	...	...

4 boda

Zaključujemo da je duljina stranice kvadrata $EFGH$ jednaka 13. 1 bod

Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9+25=34$, odnosno

$$P = 13 \cdot 13 + 26 \cdot 26 + 39 \cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$ 2 boda

Napomena: Kako bi učeniku bila dodijeljena 4 boda za tablicu, potrebno je pokazati da je rješenje jedinstveno, tj. obrazložiti kako nema drugih rješenja. Jedinstvenost rješenja može se argumentirati uočavanjem rasta (pada) opsega s obzirom na rast (pad) duljina stranica kvadrata. Učenik može i ispisivati slučajeve kada je stranica prvoga kvadrata manja (veća) od 13, te na taj način argumentirati smanjenje (povećanje) opsega.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drukčiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo treba i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-6.1.

Marko je s balkona pustio loptu da pada prema ravnome tlu. Nakon svakoga odbijanja od tla lopta odskoči i dosegne $\frac{2}{5}$ prethodne visine. Ako je u trećemu odskoku dostigla visinu od 80 cm, odredi u metrima duljinu ukupnoga puta koji će lopta prijeći od trenutka kad ju je Marko ispustio do trenutka kad peti put dodirne tlo.

Prvo rješenje.

Lopta je u trećemu odskoku dosegnula visinu od 80 cm, što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$80 : \frac{2}{5} = 200 \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} &\tfrac{2}{5} \text{ je } 80 \\ &\tfrac{1}{5} \text{ je } 40 \\ &\tfrac{5}{5} \text{ je } 200. \end{aligned}$$

U trećemu je padu pala s visine od 200 cm. 2 boda

U drugome je odskoku dosegla visinu od 200 cm, što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$200 : \frac{2}{5} = 500 \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} &\tfrac{2}{5} \text{ je } 200 \\ &\tfrac{1}{5} \text{ je } 100 \\ &\tfrac{5}{5} \text{ je } 500. \end{aligned}$$

U drugome je padu pala s visine od 500 cm. 2 boda

U prvome je odskoku dosegla visinu od 500 cm, što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$500 : \frac{2}{5} = 1250 \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} &\tfrac{2}{5} \text{ je } 500 \\ &\tfrac{1}{5} \text{ je } 250 \\ &\tfrac{5}{5} \text{ je } 1250. \end{aligned}$$

Lopta je na početku pala s visine od 1250 cm. 2 boda

U četvrtome je padu pala s visine od 80 cm.

U četvrtome je odskoku dosegnula visinu od $\frac{2}{5}$ od $80 = 32$ cm, što odgovara i duljini pada kad peti put dodirne tlo. 1 bod

Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$, 1 bod

tj. 2874 cm. 1 bod

U metrima duljina puta iznosi 28.74 m. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x visina s koje je Marko ispustio loptu.

U prvome odskoku lopta je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od x, odnosno $\frac{2}{5}x$. 1 bod

U drugome odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{2}{5}x$, odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{4}{25}x$. 1 bod

U trećemu odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{4}{25}x$, odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{25}x = \frac{8}{125}x$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo jednadžbu $\frac{8}{125}x = 80$, čije je rješenje $x = 1250$.

Marko je ispustio loptu s visine od 1250 cm. 1 bod

U prvome je odskoku dosegnula visinu od $\frac{2}{5} \cdot 1250 = 500$ cm, što odgovara i duljini pada kad drugi put dodirne tlo. 1 bod

U drugome je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5} \cdot 500 = 200$ cm, što odgovara i duljini pada kad treći put dodirne tlo. 1 bod

U trećemu odskoku lopta je dosegla visinu od 80 cm (kako je zadano zadatkom), pa je u četvrtome odskoku dostigla visinu od $\frac{2}{5}$ od $80 = 32$ cm, što odgovara i duljini pada kad peti put dodirne tlo. 1 bod

Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$, 1 bod

tj. 2874 cm. 1 bod

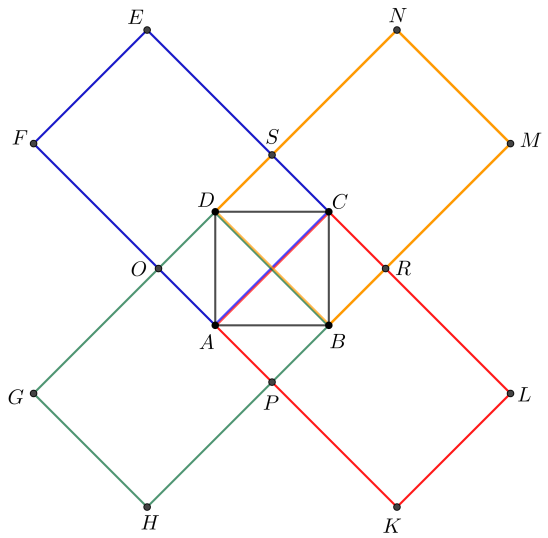
U metrima duljina puta iznosi 28.74 m. 1 bod

Zadatak OŠ-6.2.

Neka je $ABCD$ kvadrat duljine dijagonale 10 cm. Pravokutnici $ACEF$, $AKLC$, $BDGH$ i $BMND$ sukladni su i dulja stranica im je za 60 % dulja od stranice duljine 10 cm. Unija tih četiriju pravokutnika lik je u obliku križa. Odredi opseg i površinu toga lika.

Rješenje.

Skica 2 boda



Vrijedi $|AC| = |KL| = |FE| = |BD| = |GH| = |MN| = 10$ cm.

Dulja stranica pravokutnika iznosi $1.6 \cdot 10 = 16$ cm. 1 bod

Opseg – prvi način:

$|AK| = |CL| = |AF| = |CE| = |BH| = |DG| = |BM| = |DN| = 16$ cm.

$|AP| = 5$ cm i $|AK| = 16$ cm pa je $|PK| = 16 - 5 = 11$ cm. 1 bod

$|PK| = |RL| = |OF| = |SE| = |PH| = |OG| = |RM| = |SN| = 11$ cm.

Opseg lika iznosi $8 \cdot 11 + 4 \cdot 10 = 128$ cm. 2 boda

Opseg – drugi način:

Pravokutnici su na slici sukladni, a opseg svakoga od njih je $2 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = 52$ cm.

Zbroj je opsega tih četiriju pravokutnika $4 \cdot 52 = 208$ cm. 1 bod

Da bismo dobili opseg lika koji je unija ta četiri pravokutnika, moramo oduzeti četiri duljine dijagonale kvadrata $ABCD$ i opseg kvadrata $OPRS$.

Opseg lika iznosi $208 - 4 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 128$ cm. 2 boda

Površina – prvi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površine kvadrata $OPRS$ i četiri sukladna pravokutnika $PKLR$, $RMNS$, $SEFO$ i $OGHP$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100$ cm^2. 1 bod

Površina pravokutnika iznosi $11 \cdot 10 = 110$ cm^2. 1 bod

Površina lika iznosi $100 + 4 \cdot 110 = 540$ cm^2. 2 boda

Površina – drugi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površina četiriju sukladnih pravokutnika $AKLC$, $BMND$, $CEFA$ i $DGHB$, od čega oduzmemo površinu kvadrata $OPRS$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$. 1 bod

Površina pravokutnika iznosi $16 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2$. 1 bod

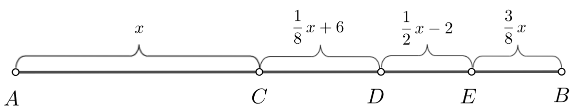
Površina lika iznosi $4 \cdot 160 - 100 = 540 \text{ cm}^2$. 2 boda

Napomena: Ako učenik izračuna točan opseg i površinu lika na način koji nije prikazan u rješenju, ali uz objašnjenje postupka, za svaki točan izračun dobiva 3 boda za opseg, odnosno 4 boda za površinu. Bez objašnjenja postupka točan iznos opsega i površine nose po 1 bod.

Zadatak OŠ-6.3.

Na dužini $\overline{AB}$, počevši od točke A, odabrane su redom točke C, D i E tako da je dužina $\overline{CD}$ za 6 cm dulja od $\frac{1}{8}$ dužine $\overline{AC}$, dužina $\overline{DE}$ za 2 cm kraća je od $\frac{1}{2}$ dužine $\overline{AC}$, a duljina dužine $\overline{EB}$ jest $\frac{3}{8}$ duljine dužine $\overline{AC}$. Kolika je duljina dužine $\overline{AB}$ ako je udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ jednaka 13 cm?

Rješenje.



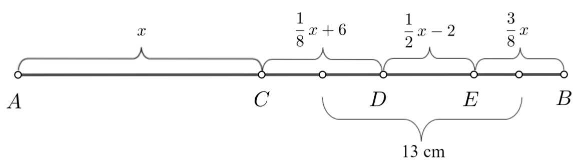
Neka je $x = |AC|$.

Slijedi da je

$$|CD| = \frac{1}{8}x + 6$$ 1 bod

$$|DE| = \frac{1}{2}x - 2$$ 1 bod

$$|EB| = \frac{3}{8}x$$ 1 bod



Udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ iznosi $\frac{1}{2} \cdot |CD| + |DE| + \frac{1}{2} \cdot |EB|$.

Budući da vrijedi $\frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}x + 6\right) = \frac{1}{16}x + 3$, 1 bod te $\frac{1}{2} \cdot |EB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{3}{16}x$, 1 bod

nepoznanicu x računamo iz jednadžbe $\frac{1}{16}x + 3 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{16}x = 13$.

Dobivamo $x = 16$. 2 boda

Slijedi $|CD| = \frac{1}{8}x + 6 = 2 + 6 = 8$, $|DE| = \frac{1}{2}x - 2 = 8 - 2 = 6$, $|EB| = \frac{3}{8}x = 6$. 2 boda

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi $16 + 8 + 6 + 6 = 36$ cm. 1 bod

Zadatak OŠ-6.4.

Ana ima četiri kuglice različitih boja: plavu, crvenu, zelenu i žutu. Treba ih rasporediti u kutije označene brojevima od 1 do 5 tako da su u jednoj kutiji najviše dvije kuglice. Na koliko načina Ana može rasporediti kuglice u kutije?

Rješenje.

Imamo 3 slučaja: svaka je kuglica u svojoj kutiji, dvije su kuglice u jednoj kutiji i preostale dvije su svaka u svojoj kutiji te su po dvije kuglice zajedno u kutiji. 1 bod

1. slučaj: svaka je kuglica u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu može smjestiti u bilo koju od pet kutija, drugu kuglicu u bilo koju od preostale četiri kutije itd. Tada je broj mogućih rasporeda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. 2 boda

2. slučaj: dvije su kuglice u jednoj kutiji, a preostale su dvije svaka u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu za prvu kutiju možemo izabrati na 4 načina, drugu na 3 načina. To je $4 \cdot 3 = 12$ načina. Nije nam važan poredak pa još moramo podijeliti s 2. Dvije kuglice koje će biti zajedno u istoj kutiji možemo izabrati na $4 \cdot 3 : 2 = 6$ načina. 1 bod

Za svaki od tih odabira moramo još odabrati 3 kutije (za te dvije kuglice i preostale dvije kuglice), a to ćemo učiniti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. 1 bod

Ukupan broj rasporeda u navedenome je slučaju $6 \cdot 60 = 360$. 1 bod

3. slučaj: po dvije su kuglice zajedno u kutiji.

Primijetimo da je dovoljno odrediti broj načina da za jednu kuglicu odaberemo s kojom će kuglicom biti u kutiji jer je tada i preostali par određen. Pritom nam nije bitan poredak, tj. koji je par prvi, a koji drugi. Npr. za plavu kuglicu može se odabrati na tri načina s kojom će kuglicom biti u kutiji, dakle, postoje 3 načina za odabir dva para kuglica. 1 bod

Za svaki od tih odabira dvije kutije u kojima će biti kuglice možemo odabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. 1 bod

Dakle, ukupan broj raspreda u ovome je slučaju $3 \cdot 20 = 60$. 1 bod

Konačno, broj svih mogućih rasporeda iznosi $120 + 360 + 60 = 540$. 1 bod

Napomena: Za prvi bod nije nužno da sva tri slučaja budu navedena u istoj rečenici, već je dovoljno da učenik razmatra navedena tri slučaja.

Napomena: U svakome od triju slučajeva možemo prvo prebrojiti broj načina da rasporedimo kuglice koje ne razlikujemo, a nakon toga pridružimo boje kuglicama. Redom po slučajevima zapisujemo te brojeve kao umnoške: $5 \cdot 24$, $30 \cdot 12$, $10 \cdot 6$. Prebrojavanje rasporeda kuglica iste boje daje rezultat $5+30+10=45$, koji uz objašnjenje nosi 5 bodova (1 bod za slučajeve, po 1 bod za svaki slučaj, 1 bod za zbroj), a bez objašnjenja 2 boda. Ako učenik taj rezultat pomnoži s 24 uz objašnjenje da na taj način određuje boje (pritom zanemarujući da u nekim slučajevima nije bitan poredak kuglica unutar kutije) dobiva još 1 bod. Točno prebrojavanje načina na koje možemo pridružiti boje nosi 1 bod u prvome slučaju, a po 2 boda u drugome i u trećemu slučaju.

Zadatak OŠ-6.5.

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi za koje vrijedi

$$a < b < c < d \quad \text{i} \quad V(a,b,c,d) = 120.$$

Najmanji od tih brojeva ima dva djelitelja, a svaki sljedeći dva djelitelja više nego prethodni. Ako je još poznato da vrijedi $V(a,b) = b$, $V(a,c) = c$, $V(a,d) = d$ i $V(b,d) \neq d$, odredi sve mogućnosti za četvorku brojeva (a,b,c,d).

$V(a,b,c,d)$ je najmanji zajednički višekratnik brojeva a, b, c i d.

Prvo rješenje.

Brojevi a,b,c,d djelitelji su broja 120, pa se nalaze u skupu
$\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}$. 1 bod

Broj a ima dva djelitelja, pa je $a \in \{2,3,5\}$.

Broj b ima četiri djelitelja, pa je $b \in \{6,8,10,15\}$.

Broj c ima šest djelitelja, pa je $c \in \{12,20\}$.

Broj d ima osam djelitelja, pa je $d \in \{24,30,40\}$. 2 boda

Iz uvjeta $V(a,b) = b, V(a,c) = c, V(a,d) = d$ zaključujemo da je broj a djelitelj brojeva b, c i d. Iz uvjeta $V(b,d) \neq d$ zaključujemo da broj b nije djelitelj broja d. 1 bod

Za $a = 2$ vrijedi $b \in \{6,8,10\}$, $c \in \{12,20\}$, $d \in \{24,30,40\}$.

Kako b nije djelitelj broja d, za $b = 6$ jedina mogućnost je $d = 40$, za $b = 8$ jedina mogućnost je $d = 30$ i za $b = 10$ jedina je mogućnost $d = 24$. 1 bod

Rješenja su uređene četvorke $(2,6,12,40)$, $(2,6,20,40)$, $(2,8,12,30)$, $(2,8,20,30)$, $(2,10,12,24)$, $(2,10,20,24)$. 1 bod

Za $a = 3$ vrijedi $b \in \{6,15\}$, $c = 12$, $d \in \{24,30\}$.

Zbog uvjeta $b < c$ jedina je mogućnost $b = 6$, ali tada ne postoji broj d koji nije djeljiv sa 6. Ovaj slučaj nema rješenja. 2 boda

Za $a = 5$ vrijedi $b \in \{10,15\}$, $c = 20$, $d \in \{30,40\}$. Zbog uvjeta da broj b nije djelitelj broja d, zaključujemo da je $b = 15$ i $d = 40$. Dobivamo rješenje $(5,15,20,40)$. 2 boda

Drugo rješenje.

Rastavimo broj 120 na proste faktore: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Iz rastava broja 120 na proste faktore i činjenice da broj a ima samo dva djelitelja, zaključujemo da a može biti 2, 3 ili 5. 1 bod

1. slučaj: $a = 2$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2$. 1 bod

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c na proste faktore može biti $2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 5$. 1 bod

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d na proste faktore može biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. 1 bod

Zadano je da je $V(b, d) \neq d$, pa zaključujemo da mora biti

$b = 2 \cdot 3 = 6$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$

$b = 2 \cdot 5 = 10$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ili

$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ i $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. 1 bod

Imamo mogućnosti $V(2, 6, c, 40) = 120$, $V(2, 10, c, 24) = 120$ i $V(2, 8, c, 30) = 120$, pa c u svim tim mogućnostima može biti 12 ili 20. Moguća su rješenja: $(2, 6, 12, 40)$, $(2, 6, 20, 40)$, $(2, 10, 12, 24)$, $(2, 10, 20, 24)$, $(2, 8, 12, 30)$, $(2, 8, 20, 30)$. 1 bod

2. slučaj: $a = 3$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 3$, to jest $c = 12$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, to jest $d = 30$. No, budući da mora vrijediti $V(b, d) \neq d$, ovaj slučaj nema rješenja. 2 boda

3. slučaj: $a = 5$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 5$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Iz $V(b, d) \neq d$ slijedi da mora biti $b = 3 \cdot 5 = 15$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

U ovome slučaju dobivamo rješenje $(5, 15, 20, 40)$. 2 boda

Napomena: Svaka uređena četvorka nosi 1 bod uz obrazloženje, a ako učenik nema obrazloženje, za svake dvije točno određene uređene četvorke učenik dobiva po 1 bod. Ako učenik odredi svih sedam uređenih četvorki, ali nema obrazloženje zašto su to jedine mogućnosti, može dobiti najviše 4 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drukčiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo treba i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-7.1.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća s pijeskom za obranu od poplave. Za koliko bi sekunda 16 volontera napunilo 60 takvih vreća ako cijelo vrijeme rade istom brzinom?

Prvo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Broj vreća trebamo povećati s 40 na 60, tj. $\frac{3}{2}$ puta. 1 bod

Toliko će se puta povećati i broj sati potrebnih da se vreće napune uz jednak broj volontera: $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Dakle, tri volontera za tri sata napune 60 vreća. 2 boda

Više će volontera isti broj vreća napuniti za manje sati, odnosno broj volontera i potrebno vrijeme obrnuto su proporcionalne veličine.

Ako broj volontera povećamo $\frac{16}{3}$ puta, potrebno će se vrijeme smanjiti $\frac{16}{3}$ puta. 1 bod

Dobivamo $3 : \frac{16}{3} = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$ sati. 2 boda

Jedan sat ima 3600 sekunda. 1 bod

Dobivamo $\frac{9}{16} \cdot 3600 = 9 \cdot 225 = 2025$ sekunda. 2 boda

Dakle, 16 će volontera za 2025 sekunda napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Drugo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Ako svi volonteri rade istom brzinom, onda 1 volonter za 2 sata napuni $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ vreća. 1 bod

Jedan sat ima 3600 sekunda. 1 bod

Dakle, jedan volonter napuni $\frac{40}{3}$ vreća za 7200 sekunda. 1 bod

Da bi napunio jednu vreću, volonteru treba

$7200 : \frac{40}{3} = 7200 \cdot \frac{3}{40} = 180 \cdot 3 = 540$ sekunda (to je 9 minuta). 2 boda

Za 60 vreća trebalo bi mu $540 \cdot 60 = 32400$ sekunda. 2 boda

Ako posao obavlja 16 volontera, trebat će im 16 puta manje vremena. 1 bod

$32400 : 16 = 2025$ 1 bod

Dakle, 16 će volontera za 2025 sekunda napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Zadatak OŠ-7.2.

Dunja, Višnja i Jagoda jele su voćnu tortu. Dunja je pojela 20 % više od Višnje, a Jagoda 25 % manje od Dunje. Nisu sve mogle pojesti, pa je ostao komad torte. Da je Dunja pojela 25 % više, Višnja 20 % više, a Jagoda 100 % više od onoga što je pojela, ne bi ostalo ništa. Koliki je udio torte svaka djevojčica pojela i koliko je ostalo? Odgovore zapiši u obliku razlomka.

Rješenje.

Označimo s x dio koji je pojela Višnja.

Dunja je pojela 20 % više, znači da je pojela $1.2x$. 1 bod

Jagoda je pojela 25 % manje od Dunje, znači da je pojela $0.75 \cdot 1.2x = 0.9x$. 1 bod

Da je Dunja pojela 25 % više, pojela bi $1.25 \cdot 1.2x = 1.5x$. 1 bod

Da je Višnja pojela 20 % više, pojela bi $1.2x$. 1 bod

Da je Jagoda pojela 100 % više, pojela bi $2 \cdot 0.9x = 1.8x$. 1 bod

Zajedno bi pojele $1.5x + 1.2x + 1.8x = 1$ (cijelu tortu). 1 bod

Vrijedi $4.5x = 1$, odnosno $x = \frac{1}{4.5} = \frac{2}{9}$. Dakle, Višnja je pojela $\frac{2}{9}$ torte. 1 bod

Dunja je pojela $1.2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{12}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{15}$ torte. 1 bod

Jagoda je pojela $0.9 \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$ torte. 1 bod

Ostalo je $1 - \left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{5}\right) = 1 - \dfrac{20 + 24 + 18}{90} = 1 - \dfrac{62}{90} = \dfrac{28}{90} = \dfrac{14}{45}$ torte. 1 bod

Zadatak OŠ-7.3.

Za prirodne brojeve a i b vrijedi

$$a + ab + b = 441.$$

Odredi sve mogućnosti umnoška ab.

Prvo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} a + ab + b &= 441 \\ a + ab + b + 1 &= 442 \\ b(a + 1) + a + 1 &= 442 \\ (a + 1)(b + 1) &= 442 \end{aligned}$$ 3 boda

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$ 2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$442 = 1 \cdot 442 = 2 \cdot 221 = 13 \cdot 34 = 17 \cdot 26$. 2 boda

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < b$ jer se traži umnožak ab.

Rastav $442 = 1 \cdot 442$ ne daje prirodne brojeve a i b, a iz ostalih rastava imamo sljedeće mogućnosti:

$a=1,\ b=220,\ ab=220$ 1 bod

$a=12,\ b=33,\ ab=396$ 1 bod

$a=16,\ b=25,\ ab=400$ 1 bod

Drugo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
a+ab&=441-b\\
a(1+b)&=441-b/:(1+b),\ b\neq -1\\
a&=\frac{441-b}{1+b}\\
a&=\frac{441-b}{1+b}=\frac{-b-1+442}{b+1}=\frac{-(b+1)+442}{b+1}=-1+\frac{442}{b+1}
\end{aligned}$$

3 boda

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442=2\cdot 13\cdot 17$. 2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$442=1\cdot 442=2\cdot 221=13\cdot 34=17\cdot 26$. 2 boda

Broj $b+1$ mora biti djelitelj broja 442 da bi a bio cijeli broj, ali, kako je $a,b\in\mathbb{N}$, promatramo sljedeće mogućnosti:

$b+1$	b	a	ab
2	1	220	220
221	220	1	220
13	12	33	396
34	33	12	396
17	16	25	400
26	25	16	400

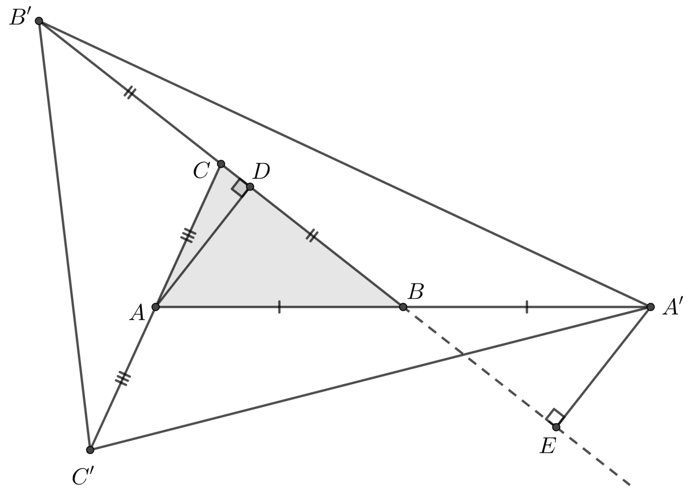
Umnožak ab može biti 220, 396 ili 400. 3 boda

Zadatak OŠ-7.4.

Na produžetku stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC preko vrha B označena je točka A' takva da je $|AB|=|BA'|$. Na produžetku stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC preko vrha C označena je točka B' takva da je $|BC|=|CB'|$, a na produžetku stranice $\overline{CA}$ trokuta ABC preko vrha A označena je točka C' takva da je $|CA|=|AC'|$. Koliko je puta površina trokuta $A'B'C'$ veća od površine trokuta ABC?

Prvo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka D nožište visine trokuta ABC iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, a točka E nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha A' na pravac BC.

Trokuti ABD i $A'BE$ sukladni su pravokutni trokuti po poučku KSK 1 bod

jer vrijedi $|AB| = |BA'|$ 1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova D i E te vršni kutovi s vrhom B). 1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|AD| = |EA'| = v_a$. 1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BB'| \cdot |EA'|}{2} = \frac{2a \cdot v_a}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$. 2 boda

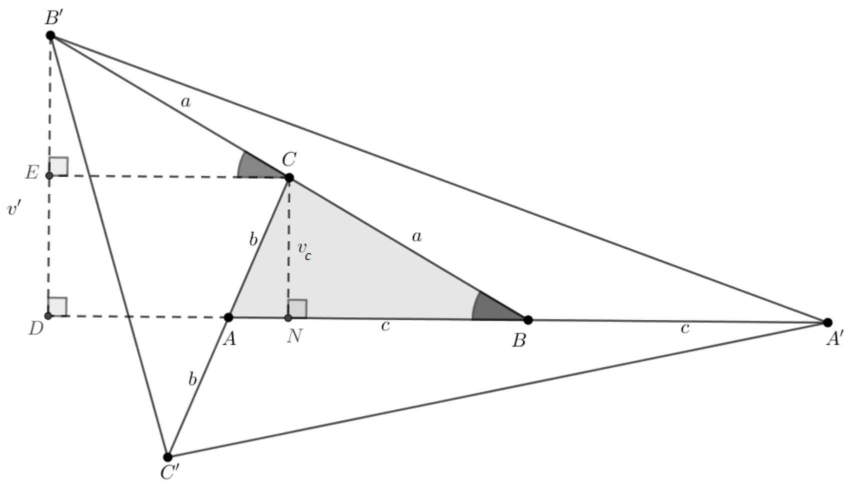
Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC, $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ 7 je puta veća od površine trokuta ABC. 1 bod

Drugo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka N nožište visine trokuta ABC iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka D nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha B' na pravac AB. Nacrtamo dužinu $\overline{CE}$ paralelnu s DN tako da dobijemo pravokutnik $DNCE$.

Trokuti NBC i ECB' sukladni su pravokutni trokuti po poučku KSK 1 bod

jer vrijedi $|BC| = |CB'|$ 1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova N i E te kutovi s usporednim kracima $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle B'CE$). 1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|CN| = |B'E| = v_c$.

Četverokut $DNCE$ pravokutnik je, pa je $|CN| = |ED| = v_c$.

Iz toga slijedi da je $|B'E| = |ED| = v_c$, pa je $|B'D| = 2|CN| = 2v_c$. 1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CN|}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$ 1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BA'| \cdot |B'D|}{2} = \frac{c \cdot 2v_c}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$. 2 boda

Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC, $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ 7 je puta veća od površine trokuta ABC. 1 bod

Zadatak OŠ-7.5.

U tablicu s 3 retka i n stupaca treba upisati brojeve na sljedeći način:

- u svakome od triju redaka moraju biti napisani svi prirodni brojevi od 1 do n,
- zbroj brojeva u svakome stupcu mora biti jednak.

a) Pokaži da n ne može biti 10.
b) Odredi broj takvih rasporeda ako je $n = 5$.

Rješenje.

a) Za $n = 10$ tablica bi imala 3 retka i 10 stupaca.

Ako bi u svakome retku bilo napisano prvih 10 prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bio bi jednak $3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 3 \cdot 55 = 165$.

Ako bi u svakome stupcu zbroj brojeva bio isti, onda bi zbroj u jednome stupcu trebao biti $165 : 10 = 16.5$. 1 bod

To nije moguće jer je zbroj tri prirodna broja prirodan broj. 1 bod

b) Neka je $n = 5$. Jedan raspored koji zadovoljava uvjete iz zadatka je prikazan u sljedećoj tablici.

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1 bod

Želimo pokazati da bilo kojom zamjenom poretka redaka i stupaca dobivamo drukčiji željeni raspored. Promjenom poretka redaka dobivamo ukupno šest različitih rasporeda:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

3	4	5	1	2
1	2	3	4	5
5	3	1	4	2

3	4	5	1	2
5	3	1	4	2
1	2	3	4	5

5	3	1	4	2
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

5	3	1	4	2
3	4	5	1	2
1	2	3	4	5

U svakome od tih rasporeda možemo promijeniti poredak stupaca tako da u prvome retku raspored brojeva bude redom od 1 do 5. Te rasporede zovemo *temeljnima*:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
4	2	5	3	1

1	2	3	4	5
4	2	5	3	1
4	5	1	2	3

1	2	3	4	5
3	5	2	4	1
5	2	4	1	3

1	2	3	4	5
5	2	4	1	3
3	5	2	4	1

1 bod

Promijenimo li poredak stupaca u bilo kojemu od tih rasporeda, dobit ćemo novi željeni raspored. Svaka dva rasporeda koja se dobivaju na taj način su različita jer će im ili biti različit prvi redak ili im je prvi redak isti, ali su dobiveni od različitih temeljnih rasporeda. 1 bod

Za svaki od temeljnih šest rasporeda premještanjem stupaca dobivamo

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

različitih rasporeda, pa svih mogućih rasporeda ima $6 \cdot 120 = 720$. 1 bod

Dokažimo da ne postoji nijedan drugi raspored koji zadovoljava uvjete zadatka. Svakomu takvom rasporedu možemo promijeniti poredak stupaca tako da je prvi redak tablice popunjen redom brojevima od 1 do 5. Tvrdimo da na taj način moramo dobiti jedan od šest temeljnih rasporeda.

Ako bi u svakome retku bilo napisano prvih pet prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bio bi jednak $3 \cdot (1+2+3+4+5) = 3 \cdot 15 = 45$. Da bi u svakom stupcu zbroj bio isti, taj zbroj mora biti $45 : 5 = 9$. 1 bod

Taj se zbroj može postići na sljedeće načine:

$$1+3+5,\ 1+4+4,\ 2+2+5,\ 2+3+4 \ \text{ i } \ 3+3+3.$$

Mogućnost $3+3+3$ možemo eliminirati jer bismo njome iskoristili sva tri broja 3, a ostatak tablice ne bismo mogli po stupcima ispuniti koristeći se samo mogućnostima $1+4+4$ i $2+2+5$. Da bi svaki od brojeva u tablici bio zastupljen točno 3 puta, potrebno je dva puta iskoristiti mogućnost $1+3+5$ i po jednom $1+4+4$, $2+2+5$ i $2+3+4$. Ostale mogućnosti ne postoje. 2 boda

Brojeve 1, 3 i 5 tada možemo upisati u 1., 3. ili 5. stupac. Budući da tu trojku možemo iskoristiti dva puta, možemo ih upisati na tri načina: u 1. i 3. stupac, u 1. i 5. stupac ili u 3. i 5. stupac. Ostale stupce tada možemo popuniti na jedinstven način. Za svaki od ta tri načina zamjenom 2. i 3. retka dobivamo po dva slučaja, što daje točno 6 temeljnih rasporeda. 1 bod

Napomena: Rješenje za $n = 5$ je zapisano na način kojim se naglašava dva dijela rješenja. Prvi dio je opis i prebrojavanje svih tablica sa željenim svojstvom, a drugi dio je dokaz da drugih takvih tablica nema. Očekivano je da će učenici prvo odrediti zbroj po stupcima i načine na koje se taj zbroj može postići, te nakon toga analizirati na koji način se tablica može popuniti po stupcima, pri čemu će sustavno po slučajevima ispisati koji rasporedi su jedino mogući i prebrojati rasporede po slučajevima. Kod takvih pristupa po 1 bod nosi određivanje zbroja po stupcima (9) i određivanje svih mogućnosti postizanja tog zbroja: $1+3+5$, $1+4+4$, $2+2+5$, $2+3+4$ i $3+3+3$. Ako bismo zapisali mogućnosti kao uređene trojke dobili bismo sljedećih 19 trojki:

$$(1,3,5),\ (1,5,3),\ (3,1,5),\ (3,5,1),\ (5,1,3),\ (5,3,1),\ (1,4,4),\ (4,1,4),\ (4,4,1),$$

$$(2,2,5),\ (2,5,2),\ (5,2,2),\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (3,2,4),\ (3,4,2),\ (4,2,3),\ (4,3,2) \ \text{ i } \ (3,3,3).$$

Analiza načina na koji se trojke mogu međusobno kombinirati nosi 3 boda, a prebrojavanje svih mogućih rasporeda 3 boda. Analiza rasporeda trojki po stupcima se može napraviti na više načina. Prikazujemo nekoliko načina.

Prvi način. U prvom retku se mora nalaziti broj 1, pa u jednom stupcu moramo imati jednu od trojki $(1,3,5)$, $(1,4,4)$ i $(1,5,3)$. Budući da u prvom retku mora biti i broj 2, u nekom od stupaca moramo imati jednu od trojki $(2,2,5)$, $(2,5,2)$, $(2,3,4)$ i $(2,4,3)$. Promotramo tri slučaja u ovisnosti o trojkama s brojem 1.

Prvi slučaj. Ako je odabrana trojka $(1,3,5)$, onda uz nju možemo odabrati trojku $(2,5,2)$ ili $(2,4,3)$. Ako odaberemo $(2,5,2)$, onda u preostalim stupcima moramo imati trojke $(3,2,4)$, $(4,4,1)$ i $(5,1,3)$. Ako odaberemo $(2,4,3)$, onda moramo odabrati $(3,5,1)$, $(4,1,4)$ i $(5,2,2)$.

U drugom slučaju uz $(1,4,4)$ možemo odabrati $(2,2,5)$ ili $(2,5,2)$, te su ostali stupci jednoznačno određeni. U trećem slučaju uz $(1,5,3)$ možemo odabrati $(2,2,5)$ ili $(2,3,4)$, te su opet ostali stupci jednoznačno određeni.

Dakle, imamo tri slučaja u kojem stupac s brojem 2 na prvom mjestu možemo odabrati na dva načina, što daje šest mogućnosti za odabir stupaca. Stupce možemo rasporediti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina, te ukupno imamo 720 rasporeda.

Drugi način. Ako bismo imali stupac s trojkom $(3,3,3)$, onda bi u drugim stupcima mogli koristiti samo trojke koje nemaju u sebi broj 3. To su trojke koje odgovaraju zbrojevima $2+2+5$ i $1+4+4$, ali takve trojke se mogu pojavljivati samo jednom (jer bismo inače imali barem četiri puta u tablici broje 2 ili broj 4). Dakle, imali bismo samo tri moguće trojke za pet stupaca, te ne bismo mogli popuniti cijelu tablicu.

Nadalje, ako se trojke koje odgovaraju zbroju $2+2+5$ ne bi pojavljivale, onda bismo morali imati tri puta trojku koja odgovara zbroju $1+3+5$ (kako bismo u tablici imali tri puta broj 5), te bismo tri puta morali imati trojku koja odgovara zbroju $2+3+4$ (kako bismo imali tri puta broj 2). No, imamo samo pet stupaca, pa tako nije moguće popuniti tablicu. Analogno zaključujemo da se mora iskoristiti točno jedna trojka koja odgovara zbroju $1+4+4$.

Slično kao u prvom načinu možemo promatrati tri slučaja ovisno o odabiru jedne od trojki $(2,2,5)$, $(2,5,2)$,$(5,2,2)$, te se za svaki odabir pokazuje da možemo odabrati točno dvije od trojki $(1,4,4)$, $(4,1,4)$ i $(4,4,1)$, a da su odabiri trojki za preostale stupce jednoznačno određeni. Prebrojavamo kao u prvom načinu.

Treći način. Kao u drugom načinu zaključujemo da se ne može pojaviti trojka $(3,3,3)$. Ako bismo imali tri trojke koje odgovaraju zbroju $1+3+5$, onda bi u preostala dva stupca morali biti samo brojevi 2 i 4, što nije moguće. Dakle, moramo imati barem jednu trojku koja odgovara zbroju $2+3+4$. Nije moguće imati tri takve trojke jer bi u preostala dva stupca morali biti samo brojevi 1 i 5, a niti dvije takve trojke jer bismo morali imati barem jednu trojku koja odgovara zbroju $2+2+5$ i tada bismo imali četiri puta broj 2 u tablici. Dakle, imamo točno jednu trojku koja odgovara zbroju $2+3+4$ i točno jednu trojku koja odgovara zbroju $2+2+5$.

Ako odaberemo trojku $(2,3,4)$, onda moramo odabrati trojku $(5,2,2)$, te za ostale stupce moramo odabrati $(1,5,3)$, $(3,1,5)$ i $(4,4,1)$. Za svaku drugu od šest trojki koje odgovaraju zbroju $2+3+4$ na isti način dobivamo da su svi stupci jednoznačno određeni. Stupce možemo rasporediti na 120 načina, pa ima $6 \cdot 120 = 720$ rasporeda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drukčiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo treba i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-8.1.

Odredi vrijednost izraza

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x+y})$$

za $x=0.05$ i $y=5$.

Prvo rješenje.

Množenjem prve i treće zagrade uz primjenu formule za razliku kvadrata dobivamo

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2,$$ 2 boda

odnosno

$$x+2\sqrt{xy}+y-x-y.$$ 1 bod

Analogno, množenjem druge i četvrte zagrade dobivamo $x-2\sqrt{xy}+y-x-y$. 3 boda

Zadani je izraz zato jednak

$$(x+2\sqrt{xy}+y-x-y)(x-2\sqrt{xy}+y-x-y)=2\sqrt{xy}(-2\sqrt{xy}),$$ 1 bod

odnosno iznosi $-4xy$. 2 boda

Za $x=0.05$ i $y=5$ vrijednost je izraza $-4\cdot 0.05\cdot 5=-1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Množenjem prvih dviju zagrada dobivamo

$$\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}-\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}-\sqrt{y^2}-\sqrt{y}\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\sqrt{x+y}-\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{(x+y)^2},$$

a množenjem treće i četvrte zagrade dobivamo

$$\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}-\sqrt{y^2}+\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{(x+y)^2}.$$ 2 boda

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$(x-y-2\sqrt{xy+y^2}-(x+y))\cdot(x-y+2\sqrt{xy+y^2}-(x+y)),$$ 2 boda

odnosno

$$(-2y-2\sqrt{xy+y^2})\cdot(-2y+2\sqrt{xy+y^2}).$$ 1 bod

Množenjem tih dvaju algebarskih izraza dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&= (-2y)^2 - (2\sqrt{xy + y^2})^2 && \text{2 boda}\\
&= 4y^2 - 4xy - 4y^2 && \text{1 bod}\\
&= -4xy && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

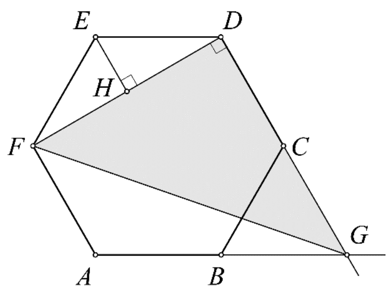
Za $x = 0.05$ i $y = 5$ vrijednost je izraza $-4 \cdot 0.05 \cdot 5 = -1$. 1 bod

Zadatak OŠ-8.2.

Duljina stranice pravilnoga šesterokuta $ABCDEF$ jest 8. Izračunaj površinu trokuta DFG ako je točka G sjecište pravaca AB i CD.

Prvo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjega kuta pravilnoga šesterokuta iznosi 120°. 1 bod

Trokut DEF jednakokračan je, pa je $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle EDF| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. 1 bod

Trokut DFG pravokutan je jer je

$$|\sphericalangle FDC| = |\sphericalangle EDC| - |\sphericalangle EDF| = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

1 bod

Kutovi $\sphericalangle GBC$ i $\sphericalangle BCG$ vanjski su kutovi pravilnoga šesterokuta, tj. $|\sphericalangle GBC| = |\sphericalangle BCG| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, pa je trokut BGC jednakostraničan. 2 boda

Stoga je $|DG| = |DC| + |CG| = 16$. 1 bod

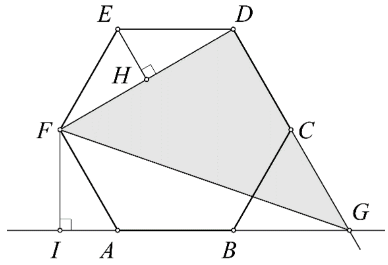
Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakostraničnoga trokuta stranice duljine 8, pa je duljina dužine $\overline{DF}$ jednaka dvostrukoj duljini visine toga jednakostraničnog trokuta, tj.

$|DF| = 2 \cdot |DH| = 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. 2 boda

Površina trokuta DFG iznosi $\frac{|DG| \cdot |DF|}{2} = \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjega kuta pravilnoga šesterokuta iznosi $120°$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle GBC$ i $\sphericalangle BCG$ vanjski su kutovi pravilnog šesterokuta, tj. $|\sphericalangle GBC| = |\sphericalangle BCG| = 180° - 120° = 60°$, pa je trokut BGC jednakostraničan. 2 boda

Površinu trokuta DFG izrčunat ćemo tako da od površine peterokuta $AGDEF$, koja je jednaka zbroju površina pravilnoga šesterokuta $ABCDEF$ i jednakostraničnoga trokuta BGC, oduzmemo zbroj površina trokuta DEF i AGF, tj.

$P_{DFG} = P_{ABCDEF} + P_{BGC} - P_{DEF} - P_{AGF} = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 112\sqrt{3} - P_{DEF} - P_{AGF}$. 1 bod

Trokut DEF jednakokračan je, pa je $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle EDF| = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$. 1 bod

Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakostraničnoga trokuta stranice duljine 8, pa je $P_{DEF} = 16\sqrt{3}$. 2 boda

Dužina $\overline{FI}$ visina je trokuta AGF povučena iz vrha F.

Kako je $|FI|$ duljina visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 8 ona iznosi $\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta AGF iznosi $\frac{|AG| \cdot |FI|}{2} = \frac{(|AB| + |BG|) \cdot |FI|}{2} = \frac{(8+8) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta DFG je $112\sqrt{3} - 16\sqrt{3} - 32\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik površinu trokuta DFG računa tako da od površine peterokuta $IGDEF$ oduzme zbroj površina trokuta DEF i IGF, slijediti bodovnu shemu navedenu u drugomu rješenju.

Zadatak OŠ-8.3.

Svako od polja tablice 3×3 treba obojiti u crvenu, bijelu ili plavu boju te u svako polje treba upisati jedan od brojeva 1, 2 ili 3. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti tako da u svakome stupcu i svakome retku polja budu obojena s tri različite boje i u njih budu upisana tri različita broja?

Rješenje.

Uočimo da je broj načina na koji možemo obojiti tablicu jednak broju načina na koji možemo upisati brojeve. 1 bod

Odredimo broj načina na koje možemo rasporediti brojeve 1, 2 i 3 u tablicu prema uvjetu zadatka.

U prvome retku tablice brojeve možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ različitih načina. 2 boda

Sljedeći redak tablice možemo popuniti na dva različita načina jer odabrani broj u prvome stupcu drugoga retka ne smije biti isti kao broj u prvome retku i prvome stupcu, a izbor preostala dva broja u drugome retku jednoznačno je određen. 2 boda

1	2	3
2		

1	2	3
3		

Posljednji redak tablice time je jednoznačno određen. 1 bod

Ukupan je broj mogućih rasporeda brojeva u tablici $6 \cdot 2 = 12$. 1 bod

Sveukupan broj rasporeda boja i brojeva u tablici jednak je umnošku broja različitih rasporeda boja i broja različitih rasporeda brojeva. 2 boda

Broj je različitih načina popunjavanja tablice uz zadane uvjete $12 \cdot 12 = 144$. 1 bod

Napomena: Ako učenik sustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i time utvrdi da ih ne postoji više, za taj dio zadatka ostvaruje 6 bodova. To može sustavno napraviti na više načina, prikazat ćemo jedan mogući.

Najprije ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 1 u prvome retku i prvome stupcu,

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

potom ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 2 u prvome retku i prvome stupcu,

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

a na kraju ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 3 u prvome retku i prvome stupcu.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

Ako učenik nesustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i ni na koji način ne objasni zašto ih nema više od 12, ostvaruje 4 boda od mogućih 6 bodova za taj dio zadatka.

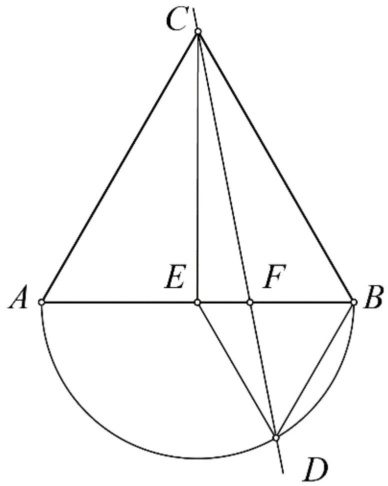
Zadatak OŠ-8.4.

Duljina stranice jednakostraničnoga trokuta ABC jest 18. Nad stranicom $\overline{AB}$ izvan trokuta konstruirana je polukružnica. Točka D pripada polukružnici i dijeli je u omjeru $2:1$. Izračunaj udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.

Neka je točka E polovište stranice $\overline{AB}$, tj. središte polukružnice koja je nacrtana nad stranicom $\overline{AB}$, izvan trokuta, a točka F sjecište pravca CD i stranice $\overline{AB}$.

Skica:



1 bod

Uočimo da je $|EB| = |ED| = 9$. 1 bod

Točka D dijeli kružnicu u omjeru 2:1 pa je $|\sphericalangle DEB| = 60^\circ$. 1 bod

Zaključujemo da je trokut EDB jednakostraničan. S obzirom da su kutovi $\sphericalangle CFA$ i $\sphericalangle DFB$ vršni kutovi i $|\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle FBD| = 60^\circ$ prema KK poučku o sličnosti trokuta zaključujemo je $\triangle AFC \sim \triangle BFD$. 1 bod

Stoga je $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{18}{9} = 2$. 2 boda

Vrijedi $|AB| = |AF| + |FB| = 3|FB|$, iz čega zaključujemo da je $18 = 3|FB|$, tj. $|FB| = 6$.

Slijedi $|EF| = |EB| - |FB| = 9 - 6 = 3$. 1 bod

Trokut EFC pravokutan je trokut kojemu su katete duljina $|EF|$ i $|CE|$.

Dužina $\overline{CE}$ visina je jednakostraničnoga trokuta ABC, pa je $|CE| = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$. 1 bod

Prema Pitagorinu poučku za pravokutni trokut EFC imamo:

$|CF|^2 = |EF|^2 + |CE|^2$ 1 bod

$|CF| = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{3})^2} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$. 1 bod

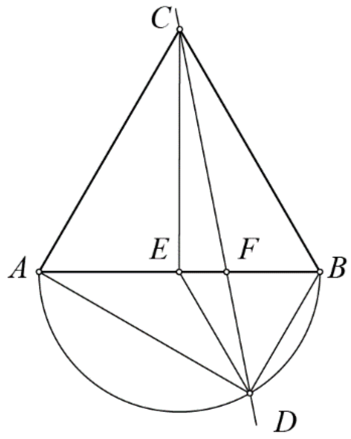
Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ iznosi $6\sqrt{7}$.

Napomena: Ako se učenik umjesto sličnošću trokuta AFC i BFD koristio sličnošću trokuta EDF i BCF te dobio $\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{18}{9} = 2$, $|BE| = |BF| + |EF| = 3|EF|, 9 = 3|EF|$ tj. $|EF| = 3$, treba ostvariti 3 boda kako je navedeno u bodovnoj shemi.

Drugo rješenje.

Kao u prvome rješenju dokazujemo $\triangle AFC \sim \triangle BFD$. 4 boda

Iz $\triangle AFC \sim \triangle BFD$ zaključujemo da je $\frac{|CF|}{|DF|} = \frac{18}{9} = 2$. 2 boda



Vrijedi:

$|CF| = |CD| - |DF|$

$|CF| = |CD| - \frac{1}{2}|CF|$

$|CF| = \frac{2}{3}|CD|$ 1 bod

Trokut ADB pravokutni je trokut s pravim kutom u vrhu D jer je obodni kut nad promjerom kružnice pravi, pa prema Pitagorinu poučku imamo:

$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$

$|AD| = \sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3}$. 1 bod

Trokut ADC pravokutni je trokut jer je $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle EAC| = 30° + 60° = 90°$, pa prema Pitagorinu poučku imamo:

$|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$

$|CD| = \sqrt{18^2 + (9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{7}$. 1 bod

Iz $|CF| = \frac{2}{3}|CD|$ slijedi $|CF| = 6\sqrt{7}$. 1 bod

Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ iznosi $6\sqrt{7}$.

Zadatak OŠ-8.5.

Može li zbroj prvih n prirodnih brojeva biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Zbroj je prvih n prirodnih brojeva $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. 2 boda

Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva, za $m \in \mathbb{N}$ i $m \geqslant 2$ zapisujemo

$$(m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 = 3m^2 + 2.$$ 2 boda

Kako prirodni broj $3m^2 + 2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, razmotrimo slučajeve mogućih ostataka broja $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ pri dijeljenju s 3.

1. Ako je $n = 3k$, za $k \in \mathbb{N}$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{3k\cdot(3k+1)}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 1 bod
2. Ako je $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(3k+1)\cdot(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 3\cdot\frac{3k\cdot(k+1)}{2}+1$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. 2 boda
3. Ako je $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(3k+2)\cdot(3k+3)}{2} = \frac{9k^2+12k+6}{2} = 3\cdot\frac{3k^2+4k+2}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 2 boda

Ostatak pri dijeljenju zbroja prvih n prirodnih brojeva s 3 može biti samo 0 ili 1, čime smo pokazali da zbroj bilo kojih prvih n prirodnih brojeva ne može biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva. 1 bod

Napomena: Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva možemo, za neki prirodni broj m, zapisati i ovako:

$$\begin{aligned}
&m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 \\
&= m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 \\
&= 3m^2 + 6m + 5 && \text{1 bod} \\
&= 3(m^2 + 2m + 1) + 2 && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Daljnji se postupak nastavlja na prethodno opisani način.