ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Marija i Eva vozile su se istim putom iz grada A u grad C. Mariji je trebalo 96 minuta, a Evi 4 minute više. Točno na pola puta između gradova A i C nalazi se grad B. Marija je cijelim putom od A do C vozila istom brzinom, dok je Eva od grada A do grada B vozila 13 km/h sporije od Marije, a od grada B do grada C 13 km/h brže od Marije. Koliko su udaljeni gradovi A i C?

Rješenje.

Kako bismo ujednačili mjerne jedinice, vremena ćemo izraziti u satima.

Marijino putovanje trajalo je $\frac{96}{60} = \frac{8}{5}$ sati, a Evino $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ sati.

Neka je s udaljenost između gradova A i C, a v Marijina brzina. Tada vrijedi

$$v = \frac{s}{8/5} = \frac{5}{8}s.$$ 2 boda

Vrijeme potrebno da Eva dođe od grada A do grada B iznosi $\frac{s/2}{v-13}$, a vrijeme potrebno da dođe od grada B do grada C iznosi $\frac{s/2}{v+13}$. Zato je ukupno vrijeme

$$\frac{s/2}{v-13} + \frac{s/2}{v+13} = \frac{5}{3}.$$ 2 boda

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo $\frac{sv}{v^2-169} = \frac{5}{3}$. 1 bod

Korištenjem $v = \frac{5}{8}s$ izrazimo gornju jednadžbu samo preko v. Dobivamo

$$\frac{\frac{8}{5}v^2}{v^2-169} = \frac{5}{3},$$ 2 boda

odakle slijedi $v^2 = 65^2$, tj. $v = 65$ km/h. 2 boda

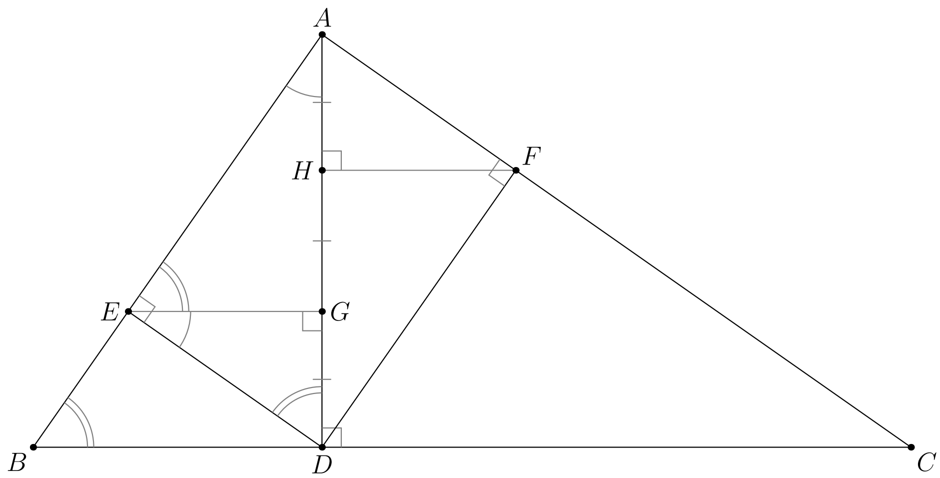
Iz prve jednadžbe dobivamo $s = \frac{8}{5} \cdot 65 = 104$, odnosno zaključujemo da je udaljenost gradova A i C jednaka 104 km. 1 bod

Napomena: Nakon što se dobije sustav jednadžba po s i v (što vrijedi prvih 5 bodova gornje bodovne sheme), sustav se može riješiti i po nepoznanici s. Tada nosi eliminacija nepoznanice v, 3 boda nosi rješavanje jednadžbe po s. 2 boda

Zadatak A-1.2.

Neka je D nožište visine iz vrha A u šiljastokutnome trokutu ABC. Točke E i F redom su nožišta okomica iz točke D na AB i AC, a točke G i H redom su nožišta okomica iz E i F na AD. Ako je $|AH| = |HG| = |GD| = 2$, odredi površinu trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo s α mjeru kuta $\sphericalangle BAD$. Tada je i $\sphericalangle GED = \alpha$ jer je riječ o kutovima s okomitim kracima. Zato su trokuti AEG, ABD i EDG pravokutni trokuti kojima je po jedan šiljasti kut jednak, pa su svi slični po K–K poučku o sličnosti trokuta. 1 bod

Iz sličnosti trokuta AEG i EDG dobivamo

$$\frac{|AG|}{|EG|} = \frac{|EG|}{|GD|},$$

odakle je $|EG|^2 = |AG| \cdot |GD| = 8$, odnosno $|EG| = 2\sqrt{2}$. 2 boda

Iz sličnosti trokuta AEG i ABD dobivamo omjer

$$\frac{|AG|}{|EG|} = \frac{|AD|}{|BD|},$$

pa zaključujemo da je

$$|BD| = \frac{|AD|}{|AG|} \cdot |EG| = \frac{3}{2}|EG| = 3\sqrt{2}.$$ 1 bod

Analogno, po K–K poučku o sličnosti trokuta zaključujemo da su pravokutni trokuti AFH, ACD i FDH slični jer su $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle HFD$ kutovi s okomitim kracima. 1 bod

Kao kod računa duljine $|EG|$, iz sličnosti trokuta AFH i FDH dobivamo

$$|HF| = 2\sqrt{2},$$ 2 boda

a iz sličnosti trokuta AFH i ACD slijedi $|DC| = 3|HF| = 6\sqrt{2}$. 1 bod

Konačno, za površinu trokuta ABC vrijedi

$$P = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{(|BD| + |DC|) \cdot (|AH| + |HG| + |GD|)}{2} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 27\sqrt{2}.$$ 2 boda

Napomena: U ovome zadatku svi su trokuti AEG, ABD, EDG, DBE i ADE međusobno slični. Prvi bod bodovne sheme ostvaruje se za tvrdnju da su bilo koja tri od navedenih pet trokuta međusobno slična. Analogno, peti bod ostvaruje se za tvrdnju da su bilo koja tri od sljedeći pet trokuta međusobno slična: AFH, ACD, FDH, ADF, DCF.

Umjesto izražavanja duljine $|EG|$ s pomoću duljina dužina na pravcu AD, koristeći se odgovarajućom sličnošću, moguće je izraziti duljinu neke od dužina $|AE|$ i $|ED|$, a onda do duljine $|BD|$ doći primjenama Pitagorina poučka i ostale omjere iz dobivenih sličnosti. Rješenja koja dokažu da je $|AE| = 2\sqrt{6}$ ili $|ED| = 2\sqrt{3}$ dobivaju 1 bod, te se ti bodovi ne zbrajaju s 2 boda za dokaz tvrdnje $|EG| = 2\sqrt{2}$ iz gornjega rješenja. Slično, jedna od dokazanih tvrdnji $|AF| = 2\sqrt{3}$ ili $|DF| = 2\sqrt{6}$ ostvaruje 1 bod koji se ne zbraja s bodovima za tvrdnju $|HF| = 2\sqrt{2}$.

Zadatak A-1.3.

Odredi sve prirodne brojeve m i n, $m < n$ takve da je razlika umnoška prvih n prirodnih brojeva i umnoška prvih m prirodnih brojeva broj oblika 600^k, pri čemu je k prirodan broj.

Rješenje.

Označavamo s $n!$ umnožak prvih n prirodnih brojeva. Zadatak je odrediti prirodne brojeve m, n i k takve da je

$$n! - m! = 600^k.$$

Iz jednadžbe mora vrijediti $n! > 600^k \geqslant 600 > 120 = 5!$, pa zaključujemo da je $n \geqslant 6$.

Broj $n!$ umnožak je nekoliko prirodnih brojeva uključujući i broj 5. To znači da su $n!$ i 600^k djeljivi s 5, pa je nužno i $m!$ djeljiv s 5. To će biti samo u slučaju ako $m!$ u sebi ima faktor djeljiv s 5, što je moguće samo ako je $m \geqslant 5$. 1 bod

Kad bi bilo $m \geqslant 7$, zbog $n > m$ imali bismo da u umnošku prvih n i prvih m prirodnih brojeva imamo broj djeljiv sa 7, pa je lijeva strana jednadžbe djeljiva sa 7. Međutim, broj 600^k nije djeljiv sa 7, pa zaključujemo da je nužno $m \leqslant 6$. Dakle, imamo da je $m = 5$ ili $m = 6$. 2 boda

Provjerimo slučajeve kad je $k = 1$: ako je $m = 5$, tada je $n! = 600 + 120 = 720$, odnosno $n = 6$, čime smo dobili jedno rješenje jednadžbe; ako je $m = 6$, tada je $n! = 600 + 720 = 1320$, što nema rješenja. 1 bod

Nadalje, pretpostavljamo da je $k \geqslant 2$. Promotrimo prvo slučaj kad je $m = 5$. Dijeljenjem početne jednadžbe sa 120, odnosno umnoškom prvih 5 prirodnih brojeva, dobivamo

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot 6 - 1 = 5 \cdot 600^{k-1}.$$

Kako je $k \geqslant 2$, desna je strana parna. Također, kako je $n > m = 5$, odnosno $n \geqslant 6$, imamo da je lijeva strana neparna, pa zaključujemo da ova jednadžba nema rješenja. 3 boda

Ako je $m=6$, jednadžbu sada možemo pisati kao

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot 6-6=5\cdot 600^{k-1}.$$

Desna strana jednadžbe djeljiva je s 4, pa mora biti i lijeva. Kako 6 nije djeljiv s 4, ne smije biti ni prvi izraz, a to će biti samo ako je $n<8$. 2 boda

Kako je $n>m=6$, preostao je samo slučaj $n=7$. No tada broj $n!-m!=7!-6!=4320$ nije potencija broja 600. 1 bod

Konačno, jedini su takvi prirodni brojevi n i m $n=6$ i $m=5$.

Napomena: Jednakosti $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 6-1=5\cdot 600^{k-1}$ i $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 6-1=5\cdot 600^{k-1}$ moguće je odjednom svesti na provjeru nekoliko mogućnosti promatrajući ostatke pri dijeljenju s 5 (zaključujemo da je $n<10$ jer bi prvi izraz s lijeve strane i desna strana bili djeljivi s 5, a preostali izraz u jednakosti ne) ili promatrajući ostatke pri dijeljenju s 4 (zaključujemo da je $n<8$). U svakome od slučajeva $m=5$ i $m=6$ ograničavanje vrijednosti n nosi po 2 boda (moguće zbrojiti u 4 boda ako se to ograničavanje provodi zajedno za obje mogućnosti m), dok provjera svih mogućnosti u svakom od slučaja $m=5$ i $m=6$ nosi po 1 bod.

Tvrdnja da je $n=6$, $m=5$ rješenje bez argumenata da je to jedino rješenje nosi 1 bod, što odgovara četvrtome bodu iz bodovne sheme.

Zadatak A-1.4.

Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\frac{a^2+b^2+ab-4a-2b+7}{a^2+b^2-4a+6},$$

pri čemu su a i b realni brojevi.

Rješenje.

Označimo početni izraz s I. Primijetimo da je

$$I=\frac{a^2+b^2+ab-4a-2b+7}{a^2+b^2-4a+6}=1+\frac{ab-2b+1}{a^2+b^2-4a+6} \qquad \text{2 boda}$$

$$=1+\frac{(a-2)b+1}{(a-2)^2+b^2+2} \qquad \text{2 boda}$$

Korištenjem $[(a-2)-b]^2\geqslant 0$, što vrijedi jer je kvadrat realnoga broja uvijek nenegativan, dobivamo

$$2(a-2)b\leqslant(a-2)^2+b^2, \qquad \text{2 boda}$$

odnosno

$$\frac{(a-2)b+1}{(a-2)^2+b^2+2}\leqslant\frac{1}{2}. \qquad \text{2 boda}$$

Zato vrijedi

$$I=1+\frac{(a-2)b+1}{(a-2)^2+b^2+2}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Jednakost se postiže za bilo koje realne brojeve za koje vrijedi $a-2-b=0$ i tada početni izraz poprima najveću moguću vrijednost $\frac{3}{2}$. 1 bod

Zadatak A-1.5.

Na ploču dimenzija 4×4 treba rasporediti određeni broj žetona tako da se na nekim poljima nalazi po jedan žeton, a neka su polja prazna. Za raspored žetona kažemo da je *siguran* ako se svaki žeton nalazi na polju kojemu su sva susjedna polja prazna (dva polja smatraju se susjednima ako imaju zajedničku stranicu). Za koji najmanji prirodan broj k postoji siguran raspored k žetona takav da se na ploču ne može dodati nijedan žeton, a da raspored i dalje bude siguran?

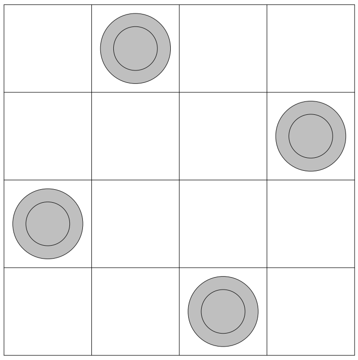
Prvo rješenje.

Odgovor je $k = 4$. 1 bod

Primijetimo da za svaki postavljeni žeton na ploči postoji najviše 5 polja na koja se ne može postaviti žeton. To su polje na kojemu je žeton, i sva njemu susjedna polja (kojih je najmanje 4). 2 boda

Pretpostavimo da je moguće postići željeni raspored s $k \leqslant 3$ žetona. Tada postoji ukupno najviše $k \cdot 5 \leqslant 15$ polja na koje se ne može dodati žeton. Kako na ploči imamo 16 polja, ostaje najmanje jedno polje na koje se može dodati žeton, dakle mora vrijediti $k \geqslant 4$. 4 boda

Jedan siguran raspored s četiri žetona dan je na slici. 3 boda



Drugo rješenje.

Odgovor je $k = 4$. 1 bod

Promotrimo polje koje se nalazi u gornjemu lijevom kutu ploče te njemu susjedna polja (ispod i desno od njega). Na jednome od ta tri polja mora se nalaziti žeton, u suprotnomu bi se mogao dodati žeton na kutno polje. 4 boda

Isto možemo zaključiti i za preostala kutna polja ploče. 1 bod

Kako među kutnim poljima i njima susjednim poljima nema preklapanja, potrebno nam je najmanje 4 žetona za siguran raspored. 1 bod

Primjer sigurnog rasporeda s četiri žetona isti je kao u prvome rješenju. 3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Nad jednom stranicom pravokutnika kao promjerom nacrtan je polukrug. Uniju toga pravokutnika i polukruga nazivamo *prozorom*. Poznato je da je opseg prozora 4 m. Odredi promjer polukruga tako da površina prozora bude najveća moguća.

Rješenje.

Označimo polumjer kruga s r. Tada duljina jedne stranice pravokutnika iznosi $2r$. Neka je a duljina druge stranice pravokutnika.

Opseg prozora jednak je zbroju opsega pravokutnika bez jedne stranice duljine $2r$ i duljine polukružnice polumjera r, odnosno vrijedi

$$2r + 2a + r\pi = 4,$$ 1 bod

iz čega slijedi $a = 2 - r\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$. 2 boda

Površina prozora jednaka je zbroju površina pravokutnika i polukruga, odnosno vrijedi

$$P = a \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem a u izraz za površinu, dobivamo

$$\begin{aligned} P &= \left(2 - r\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2} = (4 - 2r - \pi r) \cdot r + \frac{r^2\pi}{2} \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) r^2 + 4r. \end{aligned}$$ 2 boda

Površina prozora kvadratna je funkcija u nepoznanici r. Kako je vodeći koeficijent negativan, najveća moguća vrijednost postiže se u tjemenu funkcije. 2 boda

Prema tome, najveća moguća vrijednost postiže se za polumjer

$$r = \frac{-4}{2\left(-\frac{\pi}{2} - 2\right)} = \frac{4}{\pi + 4}.$$ 2 boda

Napomena: Nije potrebno računati iznos maksimalne površine i on se ne boduje.

Zadatak je moguće riješiti i tako da se polumjer izrazi pomoću stranice. Tada vrijedi

$$r = \frac{4 - 2a}{2 + \pi}$$

$$P = \frac{-8 - 2\pi}{(2 + \pi)^2} a^2 + \frac{16}{(2 + \pi)^2} a + \frac{8\pi}{(2 + \pi)^2},$$

a najveća vrijednost postiže se za $a = \dfrac{4}{4 + \pi}$. Bodovanje je analogno prethodnome rješenju: posljednja 2 boda gornje bodovne sheme rastavljaju se na 1 bod za izračunanu vrijednost a te 1 bod za izračunanu vrijednost r.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžba

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^2 - x} = y - 1. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Kvadriranjem svake od jednadžba dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 - 2z + 1, \\ y^2 - z &= x^2 - 2x + 1, \\ z^2 - x &= y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$ 1 bod

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo $x + y + z = 3$. 2 boda

Sada zbrajanjem početnih jednakosti slijedi

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = x + y + z - 3 = 0.$$ 2 boda

Kako je svaki od izraza s lijeve strane gornje jednakosti nenegativan broj, a njihova suma iznosi 0, mora vrijediti

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x = 0,$$

odnosno

$$x^2 = y, \quad y^2 = z, \quad z^2 = x.$$ 1 bod

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu imamo $z = y^2 = (x^2)^2 = x^4$. Uvrštavanjem u posljednju jednakost slijedi $x = z^2 = (x^4)^2 = x^8$. 1 bod

Jedina su moguća rješenja $x = 0$ ili $x = 1$. Iz $x = 0$ slijedi $y = 0$ i $z = 0$. Međutim, tada prva jednadžba sustava glasi $0 = -1$, čime dobivamo kontradikciju. Prema tome, rješenje $x = 0$ odbacujemo. 1 bod

Iz $x = 1$ slijedi $x = y = z = 1$. 1 bod

Direktnim uvrštavanjem u početni sustav vidimo da to zaista jest rješenje. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvome rješenju možemo zaključiti $x+y+z=3$. 3 boda

Iz jednakosti $\sqrt{x^2-y}=z-1$ možemo zaključiti $z-1\geqslant 0$, odnosno $z\geqslant 1$. Analogno zaključujemo i $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$. 1 bod

Budući da vrijedi $3=x+y+z\geqslant 1+1+1=3$, kako bi se postigla jednakost, nužno je $x=y=z=1$. 5 bodova

Direktnim uvrštavanjem u početni sustav vidimo da to zaista jest rješenje. 1 bod

Napomena: U oba rješenja posljednji 1 bod ostvaruje se ako se u početnome sustavu provjeri da $x=y=z=1$ zaista jest rješenje, što može biti i bez postupka u kojem se pokazuje da to jest jedino rješenje.

Zadatak A-2.3.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a,b) takve da su rješenja jednadžbe $x^2-ax+b=0$ dva različita prosta prirodna broja, a rješenja jednadžbe $x^2-bx+(5a-5)=0$ dva različita složena prirodna broja.

Prvo rješenje.

Označimo rješenja prve jednadžbe p i q, a rješenja druge jednadžbe m i n.

Prema Vièteovim formulama vrijedi $p+q=a$ i $pq=b$. 1 bod

Iz Vièteovih formula imamo i $m+n=b$ te $mn=5a-5$. 1 bod

Pretpostavimo prvo da su p i q oba neparni.

Iz toga slijedi da je a paran broj, a b neparan.

Kako je b neparan, iz $b=m+n$ slijedi da je jedan od brojeva m i n paran, a drugi neparan. Međutim, tada bi njihov umnožak bio paran. Kako je $5a-5$ neparan broj, dolazimo do kontradikcije. Prema tome, p i q ne mogu biti oba neparni. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $q=2$. Tada je

$$m+n=b=2p\,,\; mn=5a-5=5(2+p)-5=5p+5.$$

Množenjem druge jednakosti s 2 i uvrštavanjem $2p=m+n$ dobivamo

$$2mn=5m+5n+10.$$ 1 bod

Množenjem te jednakosti s 2 dobivamo

$$4mn=10m+10n+20,$$

odnosno

$$(2m-5)(2n-5)=45.$$ 3 boda

Bez smanjenja općenitosti neka je $m\leqslant n$. Broj 45 na tri načina možemo napisati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva, kao $1\cdot 45$, $3\cdot 15$ ili $5\cdot 9$. Dakle, preostaje provjeriti tri slučaja. 1 bod

U prvome slučaju imamo $2m-5=1$, $2n-5=45$, odakle je $m=3$, što nije složen broj. U drugome slučaju je $2m-5=3$, $2n-5=15$, pri čemu za rješenje dobivamo složene brojeve $m=4$ i $n=10$. U trećemu slučaju iz $2m-5=5$, $2n-5=9$ slijedi $m=5$, što nije složen broj. 1 bod

Dakle, jedina je mogućnost $m=4$, $n=10$. U tome je slučaju $p=\frac{m+n}{2}=7$, što jest prost broj, pa stvarno dobivamo rješenja. Uvrštavanjem za a i b dobivamo $a=9$ i $b=14$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvome rješenju, zaključujemo da je $q=2$ te da vrijedi

$$m+n=2p,\ mn=5p+5.$$ 3 boda

Iz prve jednadžbe slijedi $n=2p-m$, a uvrštavanjem u drugu slijedi

$$m^2-2pm+5p+5=0.$$ 1 bod

To je kvadratna jednadžba, koja mora imati cjelobrojna rješenja, pa joj diskriminanta $D\coloneqq 4p^2-20p-20$ mora biti potpun kvadrat. 1 bod

Međutim, primijetimo da je

$$4p^2-20p-20=(2p-5)^2-45<(2p-5)^2,$$ 2 boda

pa je $4p^2-20p-20\leqslant(2p-6)^2$, što je ekvivalentno s $p\leqslant 14$. 1 bod

Kako je p prost broj različit od 2, preostaje provjeriti je li diskriminanta potpun kvadrat u slučajevima kad je p jednak jednomu od brojeva 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Direktnim uvrštavanjem za $p=2$, $p=3$ i $p=5$ dobivamo redom $D=-44$, $D=-44$ i $D=-20$, što očito nisu potpuni kvadrati. U slučaju $p=7$ dobivamo potpuni kvadrat $D=36$. U slučajevima $p=11$ i $p=13$ dobivamo redom $D=244$ i $D=396$, što nisu potpuni kvadrati. 1 bod

Za $p=7$ za m i n dobivamo vrijednosti 4 i 10, što jesu složeni brojevi, pa u tome slučaju dobivamo rješenje. Pripadne su vrijednosti a i b $a=9$, $b=14$. 1 bod

Napomena: Rješenja prate sljedeću bodovnu shemu (navedeno istim redoslijedom kao u gornjim rješenjima):

- korištenje Vièteovih formula (ukupno 2 boda, po jedan u svakoj od jednadžbi),
- dokaz da je jedno rješenje prve kvadratne jednadžbe jednako 2 (1 bod),
- zapis jedne diofantske jednadžbe po dvije nepoznanice po (m,n) ili po (p,m) (1 bod),
- zaključivanje o dobivenoj diofantskoj jednadžbi iz kojega se može vidjeti da je nužno provjeriti nekoliko mogućnosti (3 boda, koje je moguće rastaviti na manje bodove ovisno o strategiji ograničavanja: u prvome rješenju to je faktoriziranje diofantske s konstantnom desnom stranom, a u drugome korištenje nejednakosti),

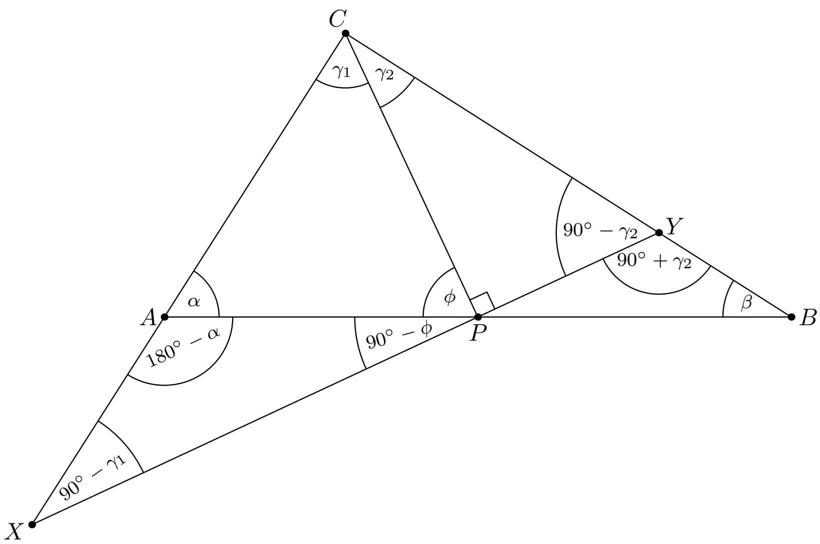
- opisivanje skupa svih preostalih slučajeva koje je potrebno provjeriti (1 bod),
- odbacivanje svih slučajeva osim onoga u kojemu dobivamo rješenje zadatka (1 bod),
- pronalazak jedinoga rješenja $a = 9$ i $b = 14$, s provjerom (1 bod).

Posljednji bod ostvaruje se samo ako je provjereno da su u tome slučaju rješenja prve kvadratne jednadžbe 2 i 7, što su prosti brojevi, a rješenja druge kvadratne jednadžbe 4 i 10, što su složeni brojevi. Taj bod može se ostvariti i ako nema drugih elemenata rješavanja zadatka, odnosno ako nema argumenata da je to jedino moguće rješenje.

Zadatak A-2.4.

Dan je raznostraničan trokut ABC. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Okomica na pravac CP u točki P siječe pravce AC i BC redom u točkama X i Y, pri čemu je A između X i C te Y između B i C. Pretpostavimo da vrijedi $|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC|$. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.

Prvo rješenje.



Označimo s α i β mjere kutova trokuta ABC pri vrhovima A i B. Neka je $\gamma_1 = \sphericalangle ACP$ i $\gamma_2 = \sphericalangle PCB$ te $\phi = \sphericalangle CPA$.

Kako je pravac CP okomit na pravac XY, zaključujemo da je $\sphericalangle XPA = \sphericalangle BPY = 90° - \phi$. Kako su trokuti XPC i YPC pravokutni, možemo zaključiti i da je $\sphericalangle CXP = 90° - \gamma_1$, $\sphericalangle CYP = 90° - \gamma_2$ te $\sphericalangle PYB = 90° + \gamma_2$.

Primjenom sinusova poučka u trokutu XPA dobivamo

$$\frac{|AX|}{|AP|} = \frac{\sphericalangle XPA}{\sphericalangle AXP} = \frac{\sin(90° - \phi)}{\sin(90° - \gamma_1)} = \frac{\cos\phi}{\cos\gamma_1}, \qquad \text{1 bod}$$

a primjenom sinusova poučka u trokutu CPA dobivamo

$$\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{\sphericalangle CPA}{\sphericalangle ACP} = \frac{\sin\phi}{\sin\gamma_1}. \qquad \text{1 bod}$$

Korištenjem gornjih jednakosti dobivamo

$$|AX| \cdot |AC| = |AP|^2 \frac{\sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin\gamma_1 \cdot \cos\gamma_1}.$$ 1 bod

Slično, korištenjem sinusova poučka u trokutu PYB dobivamo

$$\frac{|BY|}{|PB|} = \frac{\sphericalangle BPY}{\sphericalangle PYB} = \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin(90^\circ + \gamma_2)} = \frac{\cos\phi}{\cos\gamma_2},$$ 1 bod

a primjenom sinusova poučka u trokutu PBC dobivamo

$$\frac{|BC|}{|PB|} = \frac{\sphericalangle BPC}{\sphericalangle PCB} = \frac{\sin(180^\circ - \phi)}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\phi}{\sin\gamma_2}.$$ 1 bod

Korištenjem tih dviju jednakosti dobivamo

$$|BY| \cdot |BC| = |PB|^2 \frac{\sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin\gamma_2 \cdot \cos\gamma_2}.$$ 1 bod

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$|AP|^2 \frac{\sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin\gamma_1 \cdot \cos\gamma_1} = |AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC| = |PB|^2 \frac{\sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin\gamma_2 \cdot \cos\gamma_2},$$

Kako je P polovište stranice $\overline{AB}$, vrijedi $|AP| = |BP|$, pa dobivamo

$$\sin\gamma_1 \cos\gamma_1 = \sin\gamma_2 \cos\gamma_2.$$ 2 boda

Korištenjem formule za sinus dvostrukog kuta ($\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, za sve $x \in \mathbb{R}$) nakon množenja gornje jednakosti s 2 dobivamo

$$\sin(2\gamma_1) = \sin(2\gamma_2).$$

Kutovi γ_1 i γ_2 manji su od 180°, pa su njihovi dvostruki kutovi manji od 360°. Zato da bi vrijedila gornja jednakost, mora biti $2\gamma_1 = 2\gamma_2$ ili $2\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma_2$. 1 bod

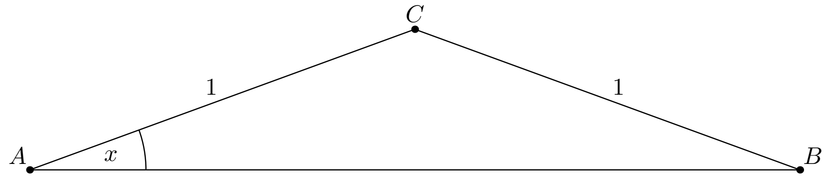
Ako je $2\gamma_1 = 2\gamma_2$, onda je $\gamma_1 = \gamma_2$, pa iz jednakosti s početka imamo

$$\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{\sin\phi}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\phi}{\sin\gamma_2} = \frac{|BC|}{|BP|},$$

odakle je posebno $|AC| = |BC|$, pa trokut ABC nije raznostraničan i time dobivamo kontradikciju. 1 bod

Dakle, nužno je $2\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma_2$, odnosno $\sphericalangle BCA = \gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ$. Dakle, trokut je ABC pravokutan, što je i trebalo dokazati.

Napomena: U gornjemu rješenju nakon jednakosti $\sin\gamma_1\cos\gamma_1 = \sin\gamma_2\cos\gamma_2$ primjenjuje se formula za sinus dvostrukoga kuta: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Ta se formula može dokazati geometrijski.



Za jednakokračan trokut na slici iz kosinusova poučka slijedi

$$2|AB|\cos x = 2\cdot|AC|\cdot|AB|\cos x = |AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2 = |AB|^2,$$

odnosno $|AB| = 2\cos x$. S druge strane, primjenom sinusova poučka dobivamo

$$|AB| = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin(180° - 2x)}{\sin x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x},$$

pa formula za dvostruki kut slijedi kad izjednačimo dva dobivene identiteta za duljinu stranice $|AB|$.

Učenici ne moraju dokazivati formulu za dvostruki kut.

Alternativno, rješenje se može dovršiti algebarski bez korištenja te formule. Kvadriranjem identiteta $\sin\gamma_1\cos\gamma_1 = \sin\gamma_2\cos\gamma_2$ i uvođenjem supstitucija $A = \sin^2\gamma_1 = 1-\cos^2\gamma_1$, $B = \sin^2\gamma_2 = 1-\cos^2\gamma_2$ jednakost postaje

$$A(1-A) = B(1-B), \quad \text{odnosno}, \quad (A-B)(A+B-1) = 0.$$

Prva mogućnost daje $\sin^2\gamma_1 = \sin^2\gamma_2$. Kako su kutovi γ_1 i γ_2 između $0°$ i $180°$, nužno je $\gamma_1 = \gamma_2$, što kao u prvome rješenju odbacujemo. Druga mogućnost daje

$$0 = \sin^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_2 - 1 = \sin^2\gamma_1 - \cos^2\gamma_2 = \sin^2\gamma_1 - \sin^2(90° - \gamma_2),$$

što ponovno slično argumentiramo da je jedina mogućnost $\gamma_1 = 90° - \gamma_2$, dakle da je kut pri vrhu C pravi.

Drugo rješenje.

Neka pravac paralelan s BC kroz A siječe XY u točki Y', a paralelu s AB kroz C u točki B'.

Budući da je četverokut $BCB'A$ paralelogram vrijedi $|BC| = |AB'|$.

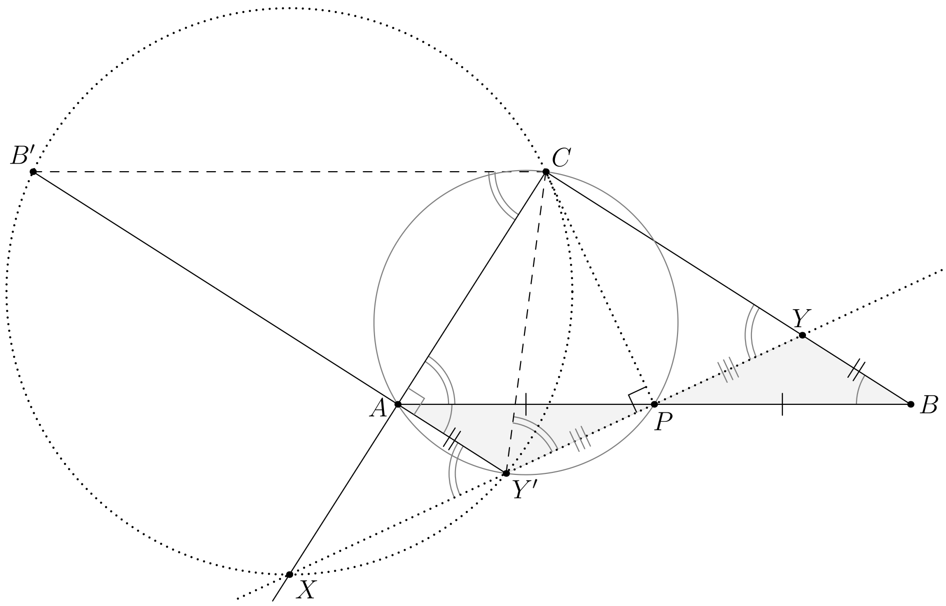
Također, iz $AY' \parallel YB$ slijedi da je $\sphericalangle Y'AP = \sphericalangle PBY$. Kutovi $\sphericalangle Y'PA$ i $\sphericalangle YPB$ su kao vršni kutovi pri vrhu P jednaki, a kako je P polovište stranice AB vrijedi $|PB| = |PA|$. Zato po K–S–K poučku o sukladnosti zaključujemo da su trokuti $PY'A$ i PYB sukladni. 2 boda

Posebno, iz te sukladnosti slijedi $|BY| = |AY'|$. Uvjet iz zadatka sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$|AX|\cdot|AC| = |BY|\cdot|BC| = |AY'|\cdot|AB'|$$ 1 bod

Prema obratu teorema o potenciji točke slijedi da je $XY'CB'$ tetivni četverokut. 2 boda

Iz sukladnosti trokuta $PY'A$ i PYB dodatno slijedi da je $|YP| = |PY'|$. To znači da pravokutni trokuti CPY' i CPY dijele jednu katetu, a drugi par kateta im je jednake duljine, pa su prema S–K–S poučku o sukladnosti i oni sukladni. Posebno: $\sphericalangle CY'P = \sphericalangle CYP$. 1 bod



Koristeći tu jednakost kutava, tetivnost četverokuta $XY'CB'$, te paralelnost pravaca $B'C$ i AB, odnosno BC i AB', dobivamo

$$\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACB' = \sphericalangle AY'X = \sphericalangle CYP = \sphericalangle CY'P,$$ 1 bod

odakle slijedi da je četverokut $CAY'P$ tetivan. 2 boda

Zato je $\sphericalangle CAY' = 180° - \sphericalangle CPY' = 90°$, te konačno

$$\sphericalangle ACB = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA) = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle BAY') = 180° - \sphericalangle CAY' = 90°,$$ 1 bod

čime smo dokazali da je trokut ABC pravokutan.

Zadatak A-2.5.

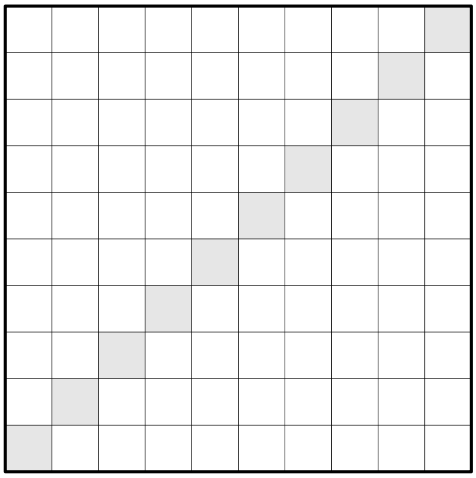
Dana je ploča dimenzija 10×10. U gornjemu lijevomu polju ploče nalazi se muha. Muha se može kretati na dva načina – *korakom* i *letom*. Korak je pomak na polje neposredno ispod ili desno od polja na kojemu se trenutačno nalazi. Letom muha prelazi s posljednjega (krajnjeg desnog) polja na prvo (krajnje lijevo) polje u istome retku ili sa posljednjega (donjeg) polja na prvo (gornje) polje u istome stupcu.

Koji je najmanji broj letova koje muha mora napraviti da bi posjetila svako polje ploče točno jednom?

Prvo rješenje.

Odgovor je 9 letova. 1 bod

Proglasimo *crnim* polja ploče koja leže na dijagonali koja spaja polje u gornjemu desnomu kutu i polje u donjemu lijevomu kutu. Tih je polja ukupno 10. 2 boda

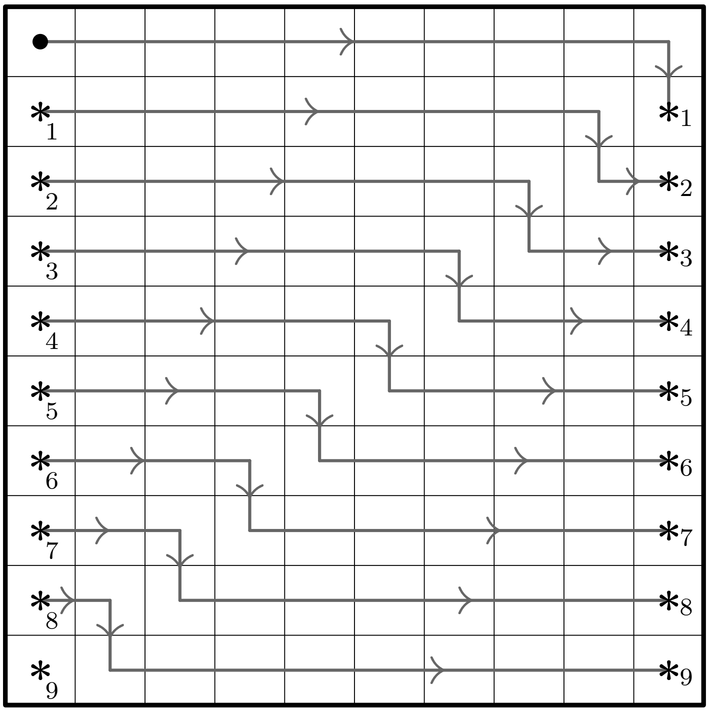


Primijetimo da muha ne može doći od jednoga crnog polja ploče do drugoga, a da između ne izvede barem jedan let. Naime, na kojemu se god crnom polju ploče nalazi, polja su joj ispod nje nedostupna bez letova jer koracima ne može ići ulijevo, a crna polja iznad nje su joj nedostupna jer koracima ne može ići prema gore. 2 boda

Nakon što muha posjeti prvo crno polje, kako bi posjetila preostalih 9 polja mora izvesti još najmanje 9 letova. Dakle, ne postoji šetnja po svim poljima ploče s manje od 9 letova. 2 boda

Da 9 zaista jest najmanji broj letova, dokazujemo konstrukcijom jedne takve šetnje. Neka muha izmjenjuje 9 poteza (koraka ili letova) udesno, pa jedan potez prema dolje. Ako se u nekome trenutku nalazi na desnome rubu ploče kad treba napraviti potez udesno, tad će muha napraviti let na prvo polje toga retka. Neka to ponovi 10 puta, a da deseti put ne napravi korak prema dolje. 2 boda

Nakon svakih 9 poteza udesno muha će posjetiti sva polja toga retka točno jednom. Jednim korakom prema dolje prvi će put posjetiti neko polje novoga retka. Na taj način posjetit će sva polja točno jednom. Ukupan je broj letova zaista 9: izvest će let točno jednom u svakome retku osim prvome. 1 bod



Drugo rješenje.

Kao u prvome rješenju tvrdimo da je najmanji mogući broj letova jednak 9. 1 bod

Svakomu polju ploče koje se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu $(i, j \in \{1, \ldots, 10\})$ pridružimo vrijednost $i + j$. 2 boda

Primijetimo da svakim korakom muha posjećuje polje kojemu je vrijednost veća za 1 od vrijednosti prošloga polja, a letom posjećuje polje kojemu je vrijednost manja za 9.

1 bod

Neka je k broj letova koje je muha izvela u jednoj šetnji po svim poljima ploče. To znači da je $99 - k$ puta izvela korak i time uvećala vrijednost prethodno posjećenog polja za 1, a k puta smanjila tu vrijednost za 9. 1 bod

Budući da je muha krenula s polja vrijednosti 2, završila na polju kojem je vrijednost najviše 20, mora vrijediti

$$2 + (99 - k) \cdot 1 + k \cdot (-9) \leqslant 20,$$

1 bod

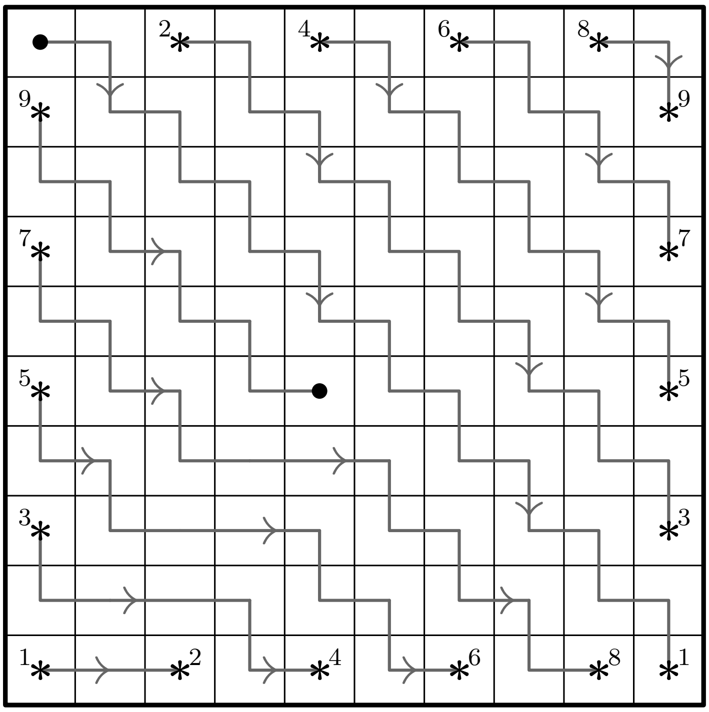
odnosno $81 \leqslant 10k$.

Najmanji je prirodni k koji zadovoljava gornju nejednakost 9, što znači da broj letova ne smije biti manji od 9. 1 bod

Šetnju s 9 letova konstruiramo kao u prvome rješenju. 3 boda

Napomena: Za konstrukciju šetnje s 9 letova 2 boda vrijedi opis konstrukcije tih poteza, a 1 bod dokaz da se tom šetnjom posjete sva polja i uključuje 9 letova. Oba dijela rješenja mogu biti ostvarena grafičkim prikazom ako je iz toga prikaza nedvosmisleno jasno o kojim potezima riječ, odnosno da je ta šetnja valjan primjer šetnje s 9 letova.

Napomena: Očekivano je da učenici pokušaju uočiti uzorke i karakterizirati načine na koje muha može posjetiti svako polje točno jednom, ali takva karakterizacija nije jednostavna (na primjer, nije istina da muha mora koristiti letove samo po retcima ili samo po stupcima, da zadnji let mora biti u desetom retku ili stupcu, da prije prvog leta muha mora raditi korake samo uz rub itd.). Na sljedećem crtežu je prikaz mogućeg obilaska svih polja koji je u mnogim aspektima drugačiji od primjera navedenog u prvom rješenju, te može poslužiti kao kontrola za ispravnost tvrdnji koje učenici žele pokazati.



ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju

$$2\cos^2\left(\frac{x+2y}{4}\right) = 2^x + 2^{-x}.$$

Rješenje.

Kako je

$$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x+2y}{4}\right) \leqslant 1,$$ 1 bod

slijedi

$$0 \leqslant \cos^2\left(\frac{x+2y}{4}\right) \leqslant 1,$$

odnosno lijeva strana početne jednadžbe manja je ili jednaka 2. 1 bod

S druge strane, prema A–G nejednakosti vrijedi

$$2^x + 2^{-x} \geqslant 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2.$$ 2 boda

Kako bi se postigla jednakost u početnoj jednadžbi, obje strane jednakosti moraju biti jednake 2. 2 boda

Kako jednakost $2^x + 2^{-x} = 2$ vrijedi ako i samo ako je $2^x = 2^{-x}$, odakle slijedi $x = -x$, odnosno $x = 0$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo $2\cos^2\left(\frac{2y}{4}\right) = 2$, odnosno $\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = 1$. Slijedi

$$\frac{y}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$ 2 boda

Prema tome, rješenja su zadane jednadžbe $(x, y) = (0, 2k\pi)$, pri čemu je $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\left|8 \cdot 5^m - n^2\right|,$$

pri čemu su m i n prirodni brojevi.

Rješenje.

Traženi izraz može biti jednak 4 za $m = 1$ i $n = 6$. 1 bod

Pretpostavimo da izraz može poprimiti neku manju vrijednost, odnosno da broj $A \coloneqq 8 \cdot 5^m - n^2$ može poprimiti neku od sljedećih vrijednosti: 0, ± 1, ± 2, ± 3.

Kad bi bilo $A = 0$, tada bi moralo vrijediti $n^2 = 8 \cdot 5^n$, no potpun kvadrat ne može biti djeljiv s 8, a ne sa 16.

Promotrimo sada ostatke pri dijeljenju s 4. Kako je broj $8 \cdot 5^n$ djeljiv s 4, dok potpun kvadrat daje ostatke 0 ili 1, zaključujemo da broj A može dati ostatak 0 ili 3 pri dijeljenju s 4. Dakle, da bi $|A|$ imalo vrijednost manju od 4, moguće je samo da je $A = -1$ ili $A = 3$. 2 boda

Slično, promotrimo ostatke koje A daje pri dijeljenju s 5. Izraz $8 \cdot 5^n$ djeljiv je s 5, dok potpun kvadrat daje ostatak 0, 1 ili 4. Zato zaključujemo da je nemoguće da je $A = 3$. 1 bod

Preostalo je dokazati da ne postoje m i n takvi da je $A = -1$, odnosno da jednadžba

$$8 \cdot 5^m - n^2 = -1$$

nema rješenja.

Prebacujući n^2 na drugu stranu i primjenom razlike kvadrata, dobivamo

$$8 \cdot 5^m = (n-1)(n+1).$$ 1 bod

Promotrimo faktore s desne strane. Najviše jedan od ta dva faktora može biti djeljiv s 5 jer bi u suprotnome i njihova razlika $(n+1)-(n-1) = 2$ trebala biti djeljiva s 5, što nije istina. 1 bod

Nadalje, kako je lijeva strana parna, mora biti i desna, što je moguće kad je n neparan broj. Tada su faktori na desnoj strani dva uzastopna parna broja, pa jedan mora biti djeljiv s 2, a drugi s 4. 1 bod

Zaključujemo da su ti faktori $(n-1)$ i $(n+1)$ jednaki 2 i $4 \cdot 5^m$ ili 4 i $2 \cdot 5^m$. 1 bod

Također, faktor $n - 1$ mora biti jednak manjemu od mogućih faktora jer je manji od $n + 1$. Zato je preostalo provjeriti dvije mogućnosti: $n - 1 = 2$, $n + 1 = 4 \cdot 5^m$ te $n - 1 = 4$, $n + 1 = 2 \cdot 5^m$. 1 bod

U prvoj mogućnosti imamo $n = 3$, odnosno $4 = 4 \cdot 5^m$, što nema prirodnih rješenja. U drugoj imamo $n = 5$ i $6 = 2 \cdot 5^m$, što također nema prirodnih rješenja. 1 bod

Time smo provjerili sve mogućnosti te zaista dokazali da je najmanja vrijednost za izraz $|8 \cdot 5^m - n^2|$ jednaka 4.

Napomena: Umjesto promatranja izraza A modulo 4 i modulo 5, sve opcije osim $A = 0$ i $A = -1$ moguće je odjednom odbaciti i gledanjem ostataka pri dijeljenju s 8.

Jednadžba $8 \cdot 5^m = (n-1)(n+1)$ može se riješiti manjom analizom kako moraju izgledati faktori $(n-1)$ i $(n+1)$, ali provjeravanjem većega broja slučajeva. U takvim rješenjima posljednjih 5 bodova pridjeljuje se za te uspješno analizirane ulučajeve koji odgovaraju zaključcima iz gornjega rješenja.

Tvrdnja $A \neq 0$ ne nosi bodove, no rješenja kojima taj argument nedostaje gubi se 1 bod.

Zadatak A-3.3.

Dokaži da za svaki prirodan broj n djeljiv s 4 vrijedi

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin^2\left((n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}.$$

Rješenje.

Označimo $n=4m$, gdje je m prirodan broj. Tražena suma S sada je zbroj pribrojnika oblika $\sin^2\left(k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)$, pri čemu je k iz skupa $\{1,2,\ldots,4m\}$.

Za k za koji vrijedi $1\leqslant k\leqslant m-1$ promotrimo k-ti i $(m-k)$-ti pribrojnik. Za njihov zbroj vrijedi

$$\begin{aligned}\sin^2\left(k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\sin^2\left((m-k)\cdot\frac{\pi}{2m}\right)&=\sin^2\left(k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)\\&=\sin^2\left(k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\cos^2\left(k\cdot\frac{\pi}{2m}\right)=1.\end{aligned}$$

4 boda

To znači da u sumi

$$S_1\coloneqq\sin^2\left(1\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\cdots+\sin^2\left((m-1)\cdot\frac{\pi}{2m}\right)$$

možemo upariti prvi i zadnji pribrojnik, drugi i predzadnji itd. Zaključujemo da vrijedi

$$S_1=\frac{m-1}{2}$$

2 boda

(ako ih je neparno mnogo, za srednji član zbroja vrijedi $\sin^2\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{\pi}{2m}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, pa i dalje vrijedi isti identitet).

Na sličan način uparujemo prvi i zadnji pribrojnik, drugi i predzadnji itd., u sumama

$$\begin{aligned}S_2&\coloneqq\sin^2\left(m\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\cdots+\sin^2\left(2m\cdot\frac{\pi}{2m}\right),\\S_3&\coloneqq\sin^2\left((2m+1)\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\cdots+\sin^2\left((3m-1)\cdot\frac{\pi}{2m}\right),\\S_4&\coloneqq\sin^2\left(3m\cdot\frac{\pi}{2m}\right)+\cdots+\sin^2\left(4m\cdot\frac{\pi}{2m}\right)\end{aligned}$$

2 boda

(zbroj je argumenata uparenih izraza redom $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ i $\frac{7\pi}{2}$, pa ih zato možemo analogno upariti). Dobivamo da vrijedi

$$S_2=\frac{m+1}{2},\quad S_3=\frac{m-1}{2},\quad S_4=\frac{m+1}{2}.$$

1 bod

Zaključujemo da je tražena suma jednaka

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{m-1}{2}+\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}+\frac{m+1}{2}=2m=\frac{n}{2},$$

1 bod

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Uparivanje pribrojnika iz gornjega rješenja nije jedino moguće uparivanje.

Koristeći identitete $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(-x)$, izraz iz zadatka moguće je zapisati kao zbroj $2m$ ili m pribrojnika prije nego se izračuna vrijednost zbroja nekih m pribrojnika. Rješenja koja to ostvare zaslužuju 2 boda za zapis izraza pomoću $2m$ pribrojnika, odnosno 4 boda za zapis izraza pomoću m pribrojnika (i tome odgovaraju bodovi s kraja gornje bodovne sheme).

Umjesto identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ prvi dio rješenja može se izvesti i koristeći formulu za polovični kut

$$\sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{m}\right)\right]$$

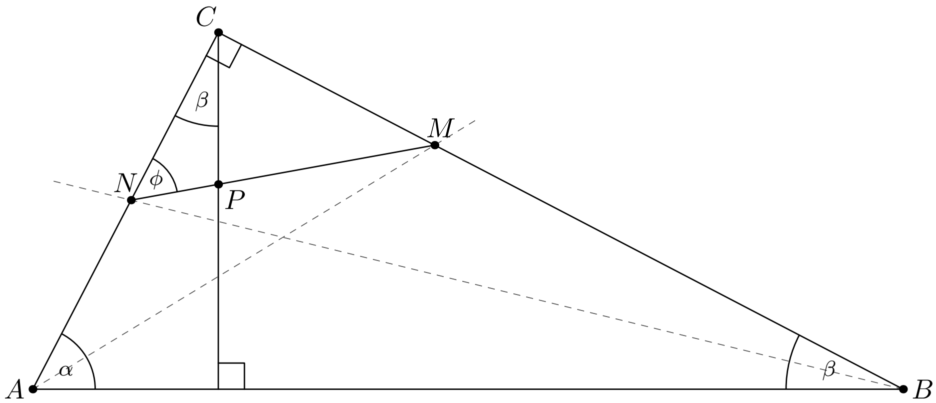
i potom uparivanjem izraza čiji su kosinusi su suprotni brojevi. Korištenje gornje formule vrednuje se s 2 boda, a povoljno uparivanje takvih izraza dodatna 2 boda; ti bodovi odgovaraju prvih 4 boda gornje bodovne sheme.

Zadatak A-3.4.

Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Simetrale šiljastih kutova sijeku nasuprotne stranice u točkama M i N. Neka je P sjecište visine iz vrha C s dužinom $\overline{MN}$. Dokaži da je duljina $|CP|$ jednaka polumjeru upisane kružnice trokuta ABC.

Prvo rješenje.

Neka je M sjecište simetrale iz kuta A i stranice $\overline{BC}$, a N sjecište simetrale iz kuta B i stranice $\overline{AC}$. Označimo s a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, redom, te neka su α i β mjere kutova trokuta ABC pri vrhovima A i B redom. Kutovi $\sphericalangle NCP$ i $\sphericalangle ABC$ kutovi su s okomitim kracima, pa je zato $\sphericalangle NCP = \sphericalangle ABC = \beta$.



Koristeći formule za površinu trokuta

$$P = rs = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \quad \text{i} \quad P = \frac{ab}{2}$$

zaključujemo da vrijedi

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$ 1 bod

Zato je dovoljno dokazati da je $|CP| = \dfrac{ab}{a+b+c}$.

Simetrala kuta dijeli nasuprotnu dužinu u omjeru odgovarajućih stranica. Primjenom na simetralu kuta A dobivamo $\dfrac{|BM|}{|MC|} = \dfrac{c}{b}$, odakle je

$$\frac{a}{|MC|} = \frac{|BC|}{|MC|} = \frac{|BM| + |MC|}{|MC|} = \frac{|BM|}{|MC|} + 1 = \frac{c}{b} + 1 = \frac{b+c}{b},$$

odnosno

$$|MC| = \frac{ab}{b+c}.$$ 1 bod

Analogno $|NC| = \dfrac{ab}{a+c}$. 1 bod

Označimo s ϕ mjeru kuta $\sphericalangle CNP$. Iz trokuta CNP zaključujemo da je $\sphericalangle CPN = 180° - \beta - \phi$. Primjenom sinusova poučka u tome trokutu zaključujemo

$$\begin{aligned}\frac{|CN|}{|CP|} &= \frac{\sin(180° - \beta - \phi)}{\sin\phi} = \frac{\sin(\beta + \phi)}{\sin\phi} \\ &= \frac{\sin\phi\cos\beta + \cos\phi\sin\beta}{\sin\phi} \\ &= \cos\beta + \operatorname{ctg}\phi\sin\beta.\end{aligned}$$

1 bod

3 boda

Sve izraze s desne strane gornje jednakosti možemo izraziti s pomoću duljina stranica trokuta. Iz pravokutnoga trokuta ABC znamo da je

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \quad \text{i} \quad \cos\beta = \frac{a}{c},$$ 1 bod

a iz pravokutnoga trokuta CNM dobivamo

$$\operatorname{ctg}\phi = \frac{|CN|}{|CM|} = \frac{b+c}{a+c}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem u gore dobivenu jednakost slijedi

$$\begin{aligned}\frac{|CN|}{|CP|} &= \cos\beta + \operatorname{ctg}\phi\sin\beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\cdot\frac{b+c}{a+c} = \\ &= \frac{a^2 + ac + b^2 + bc}{c(a+c)} = \frac{c^2 + ac + bc}{c(a+c)} = \frac{a+b+c}{a+c},\end{aligned}$$

odnosno

$$|CP| = |CN| \cdot \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{ab}{a+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c},$$ 1 bod

što je i trebali dokazati.

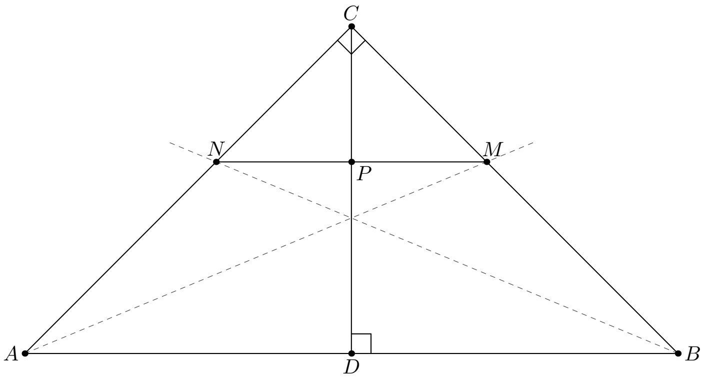
Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prošlome rješenju te želimo dokazati da je

$$|CP| = \frac{ab}{a+b+c}.$$ 1 bod

Dodatno, označimo s D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$.

Pretpostavimo prvo da je trokut ABC jednakokračan: $a = b$ i $c = a\sqrt{2}$.



U tome je slučaju pravac MN paralelan s pravcem AB. Korištenjem svojstva simetrale kuta (dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih stranica) i Talesovom teorem dobivamo

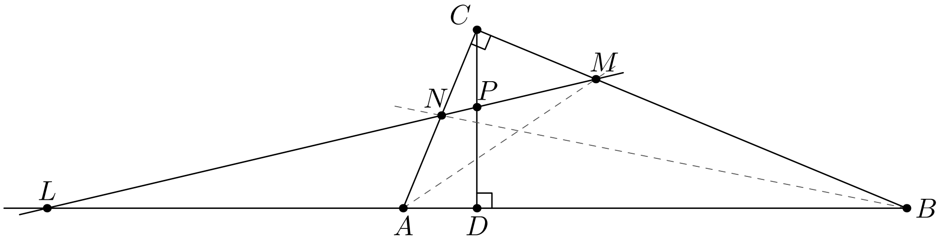
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AN|}{|NC|} = \frac{|PD|}{|CP|}.$$

Dodajući 1 na svaku stranu jednadžbe, dobivamo $\dfrac{c+a}{a} = \dfrac{|CD|}{|CP|}$. U jednakokračnome pravokutnom trokutu ABC dužina $\overline{CD}$ je i polumjer trokutu opisane kružnice, a hipotenuza promjer te kružnice, pa je

$$|CP| = \frac{a}{a+c}|CD| = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{c}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a(1+\sqrt{2})} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b+c},$$

čime je tvrdnja u tom slučaju dokazana.

Ako trokut ABC nije jednakokračan, tada pravac MN nije paralelan s AB, pa možemo definirati točku L kao presjek pravaca MN i AB. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $|AC| < |BC|$, pa se A nalazi između B i L.



Primjenom Menelajeva teorema na trokut ABC i pravac MN dobivamo

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BM|}{|MC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} = 1$$ 2 boda

odakle slijedi

$$\frac{|AL|}{|AL|+c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

te sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$|AL| = \frac{bc}{a-b}.$$ 1 bod

Primjenom Menelajeveg teorema na trokut ADC i pravac LN dobivamo

$$\frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AL|}{|LD|} \cdot \frac{|PD|}{|CP|} = 1.$$ 3 boda

Duljinu visine $|CD|$ trokuta ABC računamo koristeći formulu za površinu trokuta, a duljinu $|AD|$ iz pravokutnoga trokuta ACD. Dobivamo

$$|CD| = \frac{ab}{c}, \quad |AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = \frac{b^2}{c}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem u gore dobiveni identitet i ponovno koristeći da simetrala dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih stranica, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{|CD|-|CP|}{|CP|} = \frac{|PD|}{|CP|} = \frac{|NA|}{|CN|} \cdot \frac{|LD|}{|AL|} &= \frac{|AB|}{|CB|} \cdot \frac{|AL|+|AD|}{|AL|} \\
&= \frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{bc}{a-b} + \frac{b^2}{c}}{\frac{bc}{a-b}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c^2+ab-b^2}{c^2} \\
&= \frac{a^2+ab}{ac} = \frac{a+b}{c}.
\end{aligned}$$ 1 bod

Odavde je

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{a+b+c}{c},$$

odnosno

$$|CP| = \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a+b+c},$$ 1 bod

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Dokaz tvrdnje zadatka u slučaju kad je ABC jednakokračan pravokutan trokut sam po sebi ne nosi bodove, međutim, za potpuna rješenja koja uvode točku L kao u prethodnome rješenju, a ne komentiraju slučaj kad je MN paralelno s AB, gubi se 1 bod.

Zadatak A-3.5.

U ravnini je dano osam točaka koje su vrhovi pravilnoga osmerokuta. Svake dvije točke spojene su dužinom. U svakome potezu odabiru se tri točke te se brišu tri dužine kojima su te točke krajnje. Koliki je najmanji mogući broj preostalih dužina u trenutku kad nije više moguće napraviti takav potez?

Rješenje.

Najmanji je broj preostalih dužina 4. 1 bod

Promotrimo dužine koje izlaze iz nekog fiksnog vrha. Taj vrh krajnja je točka 7 dužina. U svakome potezu u kojemu je taj vrh odabran uklanjamo dvije dužine kojima je on krajnja točka. Stoga za svaki vrh vrijedi da će broj preostalih dužina kojima je taj vrh krajnja točka biti neparan. 4 boda

U trenutku kad više nije moguće napraviti potez, svaki će vrh biti krajnja točka najmanje jedne dužine. To je moguće samo ako na kraju ostanu najmanje 4 dužine. 2 boda

Preostaje dokazati da je moguće odabrati 8 poteza tako da na kraju ostanu točno 4 dužine. Naime, nakon 8 poteza obrisat ćemo $3 \cdot 8 = 24$ dužine, pa će na kraju preostati točno $\frac{7 \cdot 8}{2} - 24 = 28 - 24 = 4$ dužine.

Označimo vrhove osmerokuta s $A_1, A_2 \ldots, A_8$. U k-tome potezu odabiremo trokut $A_k A_{k+1} A_{k+3}$ za $k = 1, 2, \ldots, 8$, pri čemu indekse promatramo modulo 8. 2 boda

Vrhu A_k u k-tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k+1} i A_{k+3}, u $(k-1)$-tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k-1} i A_{k+2}, a u $(k-3)$-tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k-2} i A_{k-3}. To su sve različite dužine pa je taj niz poteza dopušten te tim nizom poteza na kraju zaista preostaju 4 dužine. 1 bod

Napomena: Za konstrukciju 8 poteza s kojim ostaju na kraju točno 4 dužine 2 boda vrijedi opis konstrukcije tih poteza, a 1 bod dokaz da je taj niz poteza dopušten. Oba dijela rješenja mogu biti ostvarena grafičkim prikazom ako je iz toga prikaza nedvosmisleno jasno o kojim potezima je riječ, odnosno da nikoja dva poteza ne koriste istu dužinu.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dani su aritmetički niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i geometrijski niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da su im svi članovi pozitivni realni brojevi i da vrijedi

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \text{i} \quad a_{10} = b_3.$$

Dokaži da se svaki član niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prvo rješenje.

Kako je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički niz, postoje brojevi a, d takvi da je $a_n = a + (n-1)d$. Također, kako je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz, postoje brojevi b, q takvi da je $b_n = bq^{n-1}$. Iz $a_1 = b_1$ zaključujemo $a = b$.

Kako su b_1, b_2 i b_3 uzastopni članovi geometrijskoga niza, vrijedi $b_1 b_3 = b_2^2$. Korištenjem uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} a(a+9d) &= (a+d)^2 && \text{3 boda} \\ a^2 + 9ad &= a^2 + 2ad + d^2 \\ d(7a-d) &= 0. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Ako je $d = 0$, tada je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan. U tome slučaju bismo imali

$$b = b_1 = a_1 = a_2 = b_2 = bq,$$

odakle je $b = 0$ ili $q = 1$. U prvom slučaju članovi niza ne bi bili pozitivni, a u drugome slučaju je i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan i jednak članovima niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pa je tvrdnja zadatka zadovoljena. 1 bod

Inače imamo $d = 7a$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = a + (n-1)d = a + 7(n-1)a. \qquad \text{2 boda}$$

Iz uvjeta $a_2 = b_2$ i korištenjem $a = b$ slijedi $8a = aq$.

Ako je $a = 0$, članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne bi bili pozitivni. Zaključujemo da je nužno $q = 8$, odnosno članovi niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dani su s $b_n = a \cdot 8^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. 2 boda

Brojevi oblika 8^{n-1} za sve $n \in \mathbb{N}$ daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $8^{n-1} = 7k + 1$. Posebno, to znači da je

$$b_n = a \cdot 8^{n-1} = a(7k+1) = a_{k+1},$$

čime smo dokazali da se zaista svaki element niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlome rješenju neka su a, d, b i q takvi da je $a_n = a + (n-1)d$ i $b_n = bq^{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz $a_1 = b_1$ zaključujemo $a = b$.

Nadalje, iz preostala dva uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} a + d &= aq, \\ a + 9d &= aq^2. \end{aligned}$$ 1 bod

Iz prve jednakosti dobivamo $d = a(q-1)$. Kad to uvrstimo u drugu jednakost dobivamo

$$a + 9a(q-1) = aq^2.$$ 3 boda

Slučaj $a = 0$ odbacujemo jer članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne bi bili pozitivni. Dobivamo kvadratnu jednadžbu po q

$$q^2 - 9q + 8 = 0,$$

kojoj su rješenja $q = 1$ i $q = 8$. 1 bod

Ako je $q = 1$, svi brojevi b_n jednaki su $a = a_1$, pa je tvrdnja zadatka zadovoljena. 1 bod

Ako je $q = 8$, dobivamo $d = 7a$. 1 bod

Stoga je

$$a_n = a + 7(n-1)a \text{ i } b_n = 8^{n-1}a \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$ 2 boda

Kao u prošlome rješenju zaključujemo da se svi brojevi oblika $8^{n-1}a$ nalaze u nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 1 bod

Napomena: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ moguće je i eksplicitno naći indeks m takav da je $b_n = a_m$, ali to nije potrebno raditi u rješenju. Taj je indeks $m = \dfrac{8^{n-1}-1}{7}$.

Zadatak A-4.2.

Za koje realne brojeve a sustav

$$\begin{cases} (1+i)\cdot z + (1-i)\cdot \overline{z} = 2a \\ |z+1-i| = \sqrt{2} \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje u skupu kompleksnih brojeva?

Prvo rješenje.

Korištenjem zapisa $z = x + yi$ prva jednadžba postaje

$$(1+i)\cdot(x+yi) + (1-i)\cdot(x-yi) = 2a$$ 1 bod

$$\begin{aligned} x + xi + yi - y + x - xi - yi - y &= 2a \\ 2x - 2y &= 2a \\ y &= x - a. \end{aligned}$$ 2 boda

Kvadriranjem druge jednadžbe sustava i uvrštavanjem y preko x i a dobivamo ekvivalentan niz jednakosti

$$\begin{aligned}
(x+1)^2+(y-1)^2&=2 && \text{1 bod}\\
(x+1)^2+(x-a-1)^2&=2\\
x^2+2x+1+x^2+a^2+1-2ax+2a-2x&=2\\
2x^2-2xa+a^2+2a&=0. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Dobivena je jednadžba kvadratna po x s parametrom a. Početni sustav imat će jedno rješenje ako i samo ako i ova jednadžba ima jedno rješenje, a to je u slučaju kad je diskriminanta te kvadratne jednadžbe jednaka nuli: 2 boda

$$\begin{aligned}
0=D&=(-2a)^2-4\cdot 2\cdot (a^2+2a)\\
&=4a^2-8a^2-16a\\
&=-4a^2-16a && \text{1 bod}\\
&=-4a(a+4).
\end{aligned}$$

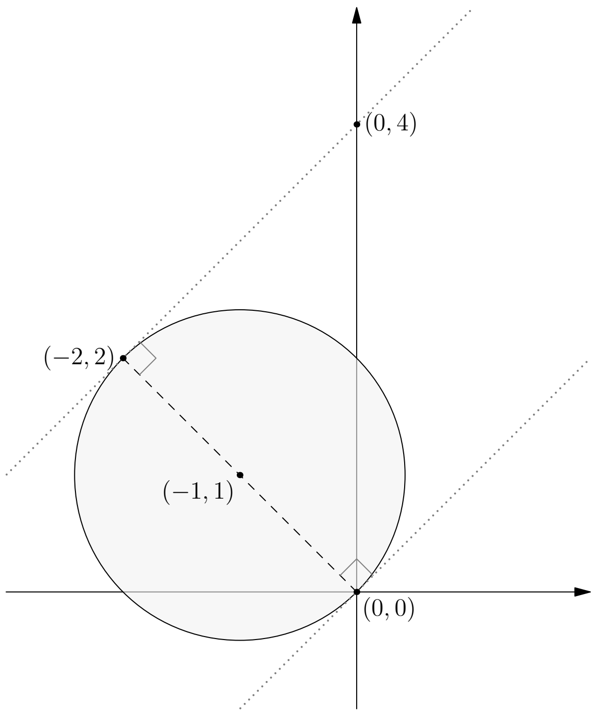
Zaključujemo da su tražene vrijednosti parametara $a=0$ i $a=-4$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvome rješenju koristimo zapis $x+yi$ te zaključujemo da je prva jednadžba ekvivalentna s $y=x-a$. 3 boda

Promotrimo dobivene uvjete u Gaussovoj ravnini. Točke koje zadovoljavaju jednadžbu $y=x-a$ leže na nekome pravcu paralelnom s $y=x$. Druga jednadžba sustava predstavlja kružnicu sa središtem u $z_0=-1+i$, odnosno točki $(-1,0)$ i radijusom $\sqrt{2}$.

1 bod



Početni sustav imat će točno jedno rješenje ako i samo ako opisani pravac i kružnica imaju točno jednu zajedničku točku. To je moguće samo ako je pravac tangenta na kružnicu. 2 boda

Točke dirališta pravaca paralelnih s $y = x$ leže na promjeru kružnice koji je okomit na taj pravac. Koeficijent smjera jednak mu je -1 te prolazi kroz središte $(-1, 1)$, pa je zato jednadžba pravca na kojemu leži taj promjer $y - 1 = -1(x + 1)$, odnosno $y = -x$.

1 bod

Točke $(0, 0)$ (tj. $w_1 = 0 + 0i = 0$) i $(-2, 2)$ ($w_2 = -2 + 2i$) očito leže na pravcu $y = -x$. Međutim, leže i na danoj kružnici, što vidimo direktnom provjerom:

$$\begin{aligned} |w_1 + 1 - i| &= |1 - i| = \sqrt{2}, \\ |w_2 + 1 - i| &= |-1 + i| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2 boda

Dakle, to su krajnje točke promjera okomitoga na pravce oblika $y = x - a$, pa su to tražene točke dirališta.

Sada vrijednosti za a dobivamo uzimanjem u obzir uvjeta da te točke leže na pravcu $y = x - a$. U slučaju točke $(0, 0)$ dobivamo $0 = 0 - a$, odnosno $a = 0$. U slučaju točke $(-2, 2)$ dobivamo $2 = -2 - a$, odnosno $a = -4$. 1 bod

Zaključujemo da su tražene vrijednosti parametara $a = 0$ i $a = -4$.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$n \cdot 2^m + m = m \cdot 2^n + n.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbu zapišimo u obliku

$$\frac{2^n - 1}{n} = \frac{2^m - 1}{m}.$$

1 bod

Definirajmo niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dan s $a_n = \dfrac{2^n - 1}{n}$ i pokažimo da je taj niz strogo rastući. 2 boda

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1} - 1}{n + 1} - \frac{2^n - 1}{n} \qquad \text{2 boda} \\ &= \frac{n(2^{n+1} - 1) - (n + 1)(2^n - 1)}{n(n + 1)} \\ &= \frac{(n - 1)2^n + 1}{n(n + 1)} > 0, \qquad \text{4 boda} \end{aligned}$$

zaključujemo da je svaki sljedeći član niza veći od prethodnoga, pa je onda niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaista rastući.

Stoga, da bi vrijedila početna jednadžba, jedino je moguće da vrijedi $m = n$. Očito su svi parovi (n, n) za $n \in \mathbb{N}$ zaista rješenja početne jednadžbe. 1 bod

Drugo rješenje.

Jednadžbu zapišimo u obliku

$$n(2^m - 1) = m(2^n - 1).$$

Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva m i n. Tada postoje relativno prosti brojevi a i b takvi da je $n = da$ i $m = db$ za relativno proste brojeve a i b. Uvrštavanjem tih jednakosti u početnu jednadžbu i dijeljenjem s d dobivamo

$$a(2^{db} - 1) = b(2^{da} - 1).$$ 1 bod

Iz dobivene jednakosti zaključujemo $2^{da} - 1 \mid a(2^d - 1)$, odakle posebno mora vrijediti

$$2^{da} - 1 \leqslant a(2^d - 1).$$ 2 boda

Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi nejednakost $2^k \geqslant k + 1$. 2 boda

(Naime, za $k = 0$ vrijedi jednakost, dok za $k \geqslant 1$ znamo da je broj svih podskupova k-članoga skupa veći ili jednak broju podskupova s 0 ili 1 elementom).

Koristeći tu tvrdnju i dobivenu nejednakost imamo

$$a(2^d - 1) \geqslant 2^{da} - 1 = (2^d) \cdot (2^d)^{a-1} - 1 \geqslant (2^d) \cdot 2^{a-1} - 1 \geqslant 2^d \cdot a - 1.$$ 3 boda

Uspoređujući prvi i zadnji izraz, dobivamo da je $a \leqslant 1$, odnosno $a = 1$. 1 bod

Analogno se pokazuje $b = 1$, odakle zaključujemo da je nužno $m = n$. Očito su svi parovi (n, n) za $n \in \mathbb{N}$ zaista rješenja početne jednadžbe. 1 bod

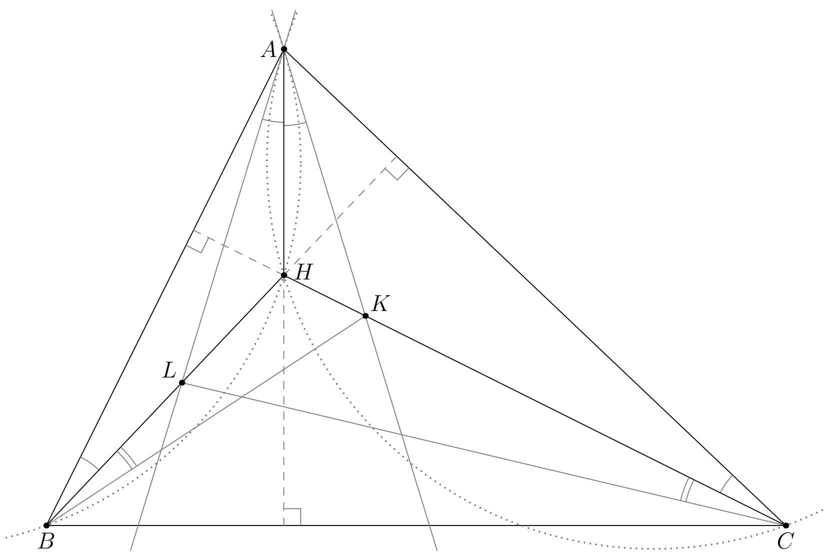
Napomena: Nejednakost $2^k \geqslant k + 1$ može se dokazati i korištenjem principa matematičke indukcije. Međutim, za potpuni broj bodova na ovome zadatku tu tvrdnju nije nužno dokazivati.

Zadatak A-4.4.

Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H. Tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABH u točki A siječe pravac CH u točki K, a tangenta na opisanu kružnicu trokuta AHC u točki A siječe pravac BH u točki L. Dokaži da točke B, C, K i L pripadaju istoj kružnici.

Rješenje.

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom vrijedi $\sphericalangle HAK = \sphericalangle HBA$ i $\sphericalangle LAH = \sphericalangle ACH$. 2 boda



Nadalje, kako je H ortocentar trokuta ABC, slijedi da je CH okomito na AB i BH okomito na AC. Prema tome imamo da je $\sphericalangle HBA = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACH$. 1 bod

Iz gornjih jednakosti slijedi da je $\sphericalangle HAK = \sphericalangle ACH$, pa zaključujemo da su trokuti HKA i HAC slični po K–K poučku o sličnosti. 1 bod

Iz gornje sličnosti imamo da je $|HC| \cdot |HK| = |AH|^2$. 1 bod

Analogno su trokuti LHA i AHB slični te vrijedi $|HB| \cdot |HL| = |AH|^2$. 1 bod

Spajanjem gornjih jednakosti dobivamo $|HB| \cdot |HL| = |HC| \cdot |HK|$. 2 boda

Iz prethodne jednakosti slijedi da je $\dfrac{|HL|}{|HC|} = \dfrac{|HK|}{|HB|}$, pa prema S–K–S poučku o sličnosti zaključujemo da su trokuti HLC i HKB slični. 1 bod

Stoga je

$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle HCL = \sphericalangle KBH = \sphericalangle KBL,$$

iz čega slijedi da je četverokut $BKCL$ tetivan. 1 bod

Napomena: Nakon što se dobije jednakost $|HB| \cdot |HL| = |HC| \cdot |HK|$, dokazati da je četverokut $BKCL$ tetivan može se korištenjem potencije točke.

Zadatak A-4.5.

Za neparni prirodan broj $n > 1$ na ploči su napisani brojevi $n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-1$. Dokaži da se s ploče može izbrisati jedan broj tako da zbroj preostalih brojeva na ploči ne bude djeljiv nijednim od preostalih brojeva na ploči.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno. Tada uklanjanjem broja k s ploče postoji neki broj s ploče $x_k \neq k$ takav da dijeli zbroj preostalih brojeva, za svaki $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$.

Neka je $S = n + \cdots + (2n-1)$. Dakle, vrijedi

$$x_k \mid S - k.$$ 1 bod

Primijetimo da ni za koja dva različita broja s ploče k i l ne smije vrijediti $x_k = x_l$. U suprotnome bismo imali da su brojevi $S-k$ i $S-l$ djeljivi s $x_k = x_l$, pa je njime djeljiva i razlika $|k-l|$. Međutim, kako su svi brojevi s ploče između n i $2n-1$, vrijedi

$$n \leqslant x_k \leqslant |k-l| \leqslant |(2n-1)-n| = n-1,$$

odakle dobivamo kontradikciju. 3 boda

Posebno, postoji broj m na ploči takav da je $x_m = n$. U suprotnome bi n brojeva $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}$ moglo poprimiti najviše $n-1$ moguću vrijednost, pa bi nužno među njima postojala dva jednaka. 3 boda

Kako je n neparan, broj $S = \dfrac{(2n-1)2n}{2} - \dfrac{(n-1)n}{2} = n \cdot \dfrac{3n-1}{2}$ djeljiv je brojem n. 1 bod

Također, n dijeli $S-n$. No, kao ranije posljednja relacija zajedno s $n \mid S-m$ daje kontradikciju (jer oduzimanjem slijedi da n dijeli $|m-n|$, a $0 < |m-n| < n$). 2 boda

Dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Napomena: Umjesto za tvrdnju da postoji m takav da je $x_m = n$, odgovarajuća 3 boda iz bodovne sheme ostvaruju se za bilo koju dokazanu tvrdnju da za neki broj s ploče k postoji m takav da je $x_m = k$.