

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

1. Marija i Eva vozile su se istim putem iz grada A u grad C . Mariji je trebalo 96 minuta, a Evi 4 minute više. Točno na pola puta između gradova A i C nalazi se grad B . Marija je cijelim putem od A do C vozila istom brzinom, dok je Eva od grada A do grada B vozila 13 km/h sporije od Marije, a od grada B do grada C 13 km/h brže od Marije. Koliko su udaljeni gradovi A i C ?
2. Neka je D nožište visine iz vrha A u šiljastokutnom trokutu ABC . Točke E i F su redom nožišta okomica iz točke D na AB i AC , a točke G i H redom su nožišta okomica iz E i F na AD . Ako je $|AH| = |HG| = |GD| = 2$, odredi površinu trokuta ABC .
3. Odredi sve prirodne brojeve m i n , $m < n$, takve da je razlika umnoška prvih n prirodnih brojeva i umnoška prvih m prirodnih brojeva broj oblika 600^k pri čemu je k prirodan broj.
4. Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\frac{a^2 + b^2 + ab - 4a - 2b + 7}{a^2 + b^2 - 4a + 6},$$

pri čemu su a i b realni brojevi.

5. Na ploču dimenzija 4×4 treba rasporediti određeni broj žetona tako da se na nekim poljima nalazi po jedan žeton, a neka su polja prazna. Za raspored žetona kažemo da je *siguran* ako se svaki žeton nalazi na polju kojemu su sva susjedna polja prazna (dva polja smatraju se susjednima ako imaju zajedničku stranicu). Za koji najmanji prirodan broj k postoji siguran raspored k žetona takav da se na ploču ne može dodati nijedan žeton, a da raspored i dalje bude siguran?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

1. Nad jednom stranicom pravokutnika kao promjerom nacrtan je polukrug. Uniju toga pravokutnika i polukruga nazivamo *prozorom*. Poznato je da je opseg prozora 4 m. Odredi promjer polukruga tako da površina prozora bude najveća moguća.
2. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednažbi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^2 - x} = y - 1. \end{cases}$$

3. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da su rješenja jednažbe $x^2 - ax + b = 0$ dva različita prosta prirodna broja, a rješenja jednažbe $x^2 - bx + (5a - 5) = 0$ dva različita složena prirodna broja.
4. Dan je raznostraničan trokut ABC . Neka je P polovište dužine \overline{AB} . Okomica na pravac CP u točki P siječe pravce AC i BC redom u točkama X i Y , pri čemu je A između X i C te Y između B i C . Pretpostavimo da vrijedi $|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC|$. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.
5. Dana je ploča dimenzija 10×10 . U gornjem lijevom polju ploče nalazi se muha. Muha se može kretati na dva načina – *korakom* i *letom*. Korak je pomak na polje neposredno ispod ili desno od polja na kojem se trenutno nalazi. Letom muha prelazi sa zadnjeg (krajnjeg desnog) polja na prvo (krajnje lijevo) polje u istom retku ili sa zadnjeg (donjeg) polja na prvo (gornje) polje u istom stupcu.
Koji je najmanji broj letova koje muha mora napraviti da bi posjetila svako polje ploče točno jednom?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

1. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju

$$2 \cos^2 \left(\frac{x + 2y}{4} \right) = 2^x + 2^{-x}.$$

2. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$|8 \cdot 5^m - n^2|,$$

pri čemu su m i n prirodni brojevi.

3. Dokaži da za svaki prirodan broj n djeljiv s 4 vrijedi

$$\sin^2 \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \sin^2 \left((n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(n \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2}.$$

4. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C . Simetrale šiljastih kutova sijeku nasuprotnu stranice u točkama M i N . Neka je P sjecište visine iz vrha C s dužinom \overline{MN} . Dokaži da je duljina $|CP|$ jednaka polumjeru upisane kružnice trokuta ABC .
5. U ravnini je dano osam točaka koje su vrhovi pravilnoga osmerokuta. Svake dvije točke spojene su dužinom. U svakome potezu odabiru se tri točke te se brišu tri dužine kojima su te točke krajnje. Koliki je najmanji mogući broj preostalih dužina u trenutku kad nije više moguće napraviti takav potez?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

1. Dani su aritmetički niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i geometrijski niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takvi da su im svi članovi pozitivni realni brojevi i da vrijedi

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \text{i} \quad a_{10} = b_3.$$

Dokaži da se svaki član niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Za koje realne brojeve a sustav

$$\begin{cases} (1+i) \cdot z + (1-i) \cdot \bar{z} = 2a \\ |z+1-i| = \sqrt{2} \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje u skupu kompleksnih brojeva?

3. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$n \cdot 2^m + m = m \cdot 2^n + n.$$

4. Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H . Tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABH u točki A siječe pravac CH u točki K , a tangenta na opisanu kružnicu trokuta AHC u točki A siječe pravac BH u točki L . Dokaži da točke B, C, K i L pripadaju istoj kružnici.
5. Za neparni prirodan broj $n > 1$ na ploči su napisani brojevi $n, n+1, \dots, 2n-1$. Dokaži da se s ploče može izbrisati jedan broj tako da zbroj preostalih brojeva na ploči ne bude djeljiv nijednim od preostalih brojeva na ploči.